2e ÉDITION

Calcul multivariable

Une approche libre

Juan Carlos Bustamante

UdS Université de Sherbrooke

Calcul multivariable

Une approche libre

Deuxième édition

Calcul multivariable

Une approche libre

Juan Carlos Bustamante
Université de Sherbrooke

2e édition, octobre 2026

Ce manuel électronique : Fut utilisé pendant son développement dans le cadre du cours MAT298 - Calcul vectoriel à l'Université de Sherbrooke, à compter de l'automne 2021. Par la suite, il a aussi été utilisé pour MAT117 - Mathématiques I. Il est diffusé sous licence CC BY-NC-SA 4.0.

Il s'agit d'une version traduite et adaptée de CLP-3 Multivariable Calculus [3] et de CLP-4 Vector Calculus [4] de Feldman, J. et collab. (2023), disponibles sous licence CC BY-NC-SA 4.0.
Vous êtes encouragé(e) à : Partager, copier, distribuer et communiquer le matériel par tous les moyens et sous tous les formats ainsi qu'à adapter, remixer, transformer et créer à partir du matériel.
Selon les conditions suivantes : Paternité : vous devez citer le nom des auteur(e)s.Aucune utilisation commerciale : vous n'avez pas le droit d'utiliser le matériel à des fins commerciales.Partage dans les mêmes conditions : vous devez diffuser les versions dérivées sous une licence similaire.

Édition : Deuxième

Site Web : Publication du manuel : https ://rel-math.communaute.usherbrooke.ca/relcalc-3

Site Web : DOI : 10.71892/11143/1911

Site Web : Dépôt des sources https ://github.com/JCBustamante/RELCALC-3

©2026 Juan Carlos Bustamante



Remerciements

Les mathématiques. Je tiens à remercier Joel Feldman, Andrew Rechnitzer et Elyse Yeager de UBC pour avoir libéré les sources PreTeXt de leurs livres. Un merci particulier à Joel Feldman pour la francisation de plusieurs de leurs figures.

Bien que la plus grande partie des figures du livre viennent de *CLP* ou aient été produites avec des logiciels libres (SageMath, Asymptote) ou avec GeoGebra, il y a une exception : la figure 4.3.1 vient du volume *Calculus Volume 3*, d'OpenStax, [8]. Je remercie également les auteur(e)s de ce livre de rendre accessible leur travail.

Collaborateur(-trice)s. Ce vaste projet compte plusieurs collaborateur(-trice)s, à différents titres et intensités. Un grand merci à Sylvain Bérubé, Virginie Charette, Gabriel Dupuis, Joel Feldman, Simon Lévesque, Jean-Philippe Morin, Katerine Robert, Pier-Olivier Rodrigue et Julie Tremblay.

D'autres noms, je l'espère sincèrement, s'ajouteront à cette liste !

PreTeXt. Il faut souligner la générosité de Bob Beezer, développeur de PreTeXt. La communauté de soutien et de développement autour de ce système d'écriture et de publication a aussi été d'une grande aide.

Support financier. Le projet *RELCALC* est financé par le Pôle régional en enseignement supérieur de l'Estrie, qui regroupe les institutions d'enseignement supérieur de l'Estrie, à savoir : l'Université de Sherbrooke, le Cégep de Sherbrooke, l'Université Bishop's, le Collège Champlain – Lennoxville et le Collégial du Séminaire de Sherbrooke.

La portion *Calcul multivariable* du projet *RELCALC* a compté sur le soutien pédagogique, technique et financier de la FabriqueREL.

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ESTRIE HIGHER EDUCATION

fabrique REL
RESSOURCES ÉDUCATIVES LIBRES

Support institutionnel. Je remercie également le Département de mathématiques du Cégep de Sherbrooke, celui du Collège Champlain et celui de l'Université de Sherbrooke pour leur soutien informatique.

Crédits couverture. La couverture et la 4ème de couverture ont été réalisées par Dany Turcotte et Hélène Beaudet avec une image de Harryarts tirée de freepick.

Préface

Pour l'accessibilité du savoir. J'ai enseigné des cours de calcul différentiel et intégral à plusieurs reprises, surtout à l'Université de Sherbrooke (à compter de 2010), mais aussi à l'Université San Francisco de Quito, en Équateur (2005-2009). Le contenu de ces cours est très commun : intégrales curvilignes, intégrales multiples, intégrales de surface ; changements de variables, jacobien ; divergence et rotationnel, théorèmes de Gauss et de Stokes, champ conservatif, différentiation en chaîne, laplacien ; multiplicateurs de Lagrange ; série de Taylor à plusieurs variables, extremums, cols[1]. Plusieurs livres bien adaptés à ce contenu existent : je me suis servi régulièrement de plusieurs d'entre eux. Bien qu'ils conviennent, je trouve qu'ils sont de plus en plus chers.

Par ailleurs, il est vrai que plusieurs types de ressources additionnelles aux textes eux-mêmes ont vu le jour : par exemple, des sites Web qui accompagnent les livres, avec des activités ou des documents pour les enseignant(e)s ou des plateformes pour la correction automatique d'exercices. Là encore, le prix est relativement élevé.

Il va de soi que plusieurs collègues ont tenu un bon nombre de conversations à ce sujet ; certain(e)s ont même entrepris de faire leurs propres notes de cours, par exemple.

Ces deux problèmes, liés à l'accessibilité des ressources éducatives, sont à l'origine de ce projet. Plusieurs initiatives similaires ont vu le jour, surtout dans le monde anglophone. On trouve plusieurs textes de *source libre*, produits par des enseignant(e)s de différentes universités au Canada et aux États-Unis. Parmi eux, on compte le projet *Active Calculus* (Grand Valley State University, https ://activecalculus.org) ou encore la suite *CLP Calculus Textbooks* (University of British Columbia, https ://personal.math.ubc.ca/~CLP/about/). Ils ont été écrits en PreTeXt, ce qui permet notamment d'obtenir, au-delà du PDF, des versions HTML avec du matériel interactif (exercices auto-corrigés WeBWorK, applets de visualisation/expérimentation), et surtout bien adaptées à la panoplie d'appareils mobiles que les étudiant(e)s utilisent de nos jours.

Le projet *RELCALC* vise donc la production de *R*essources *É*ducatives *L*ibres pour le *CALC*ul différentiel et intégral au niveau fin de cégep/début de l'université, pour les programmes dits « scientifiques ».

Le projet original, en 2021 - 2022 avait pour but de produire trois manuels : un pour le calcul différentiel, un autre pour le calcul intégral et un autre pour le calcul multivariable/vectoriel. Au-delà de ça, il était prévu d'avoir une bonne sélection d'exercices WeBWorK, pas seulement imbriqués dans le texte, et de produire du matériel pour des « laboratoires » d'apprentissage.

Ce volume, la portion de calcul multivariable et vectoriel, est la première portion (chronologiquement) de ce projet qui évolue encore. Il est très largement inspiré des volumes *CLP-3 Multivariable Calculus Textbook*, [3] et *CLP-4 Vector Calculus Textbook*, [4], par J. Feldman, A. Rechnitzer et E. Yeager.

La très grande partie du matériel provient de ces sources, bien que plusieurs passages ont été écrits à nouveau. Également, plusieurs exercices viennent de sources complémentaires. Pour la plupart il s'agit d'exercices très « communs » ou « classiques » qui peuvent être trouvés à différents endroits. Les principales sources pour ceci ont été [10], [11], [8], [9], [6].

Dans les faits, parmi les trois manuels originalement planifiés, seul celui-ci aura vu le jour. Par contre, une ressource additionnelle s'est greffée au projet. Il s'agit d'une version francisée de *Notes on Diffy QS : Differential Equations for Engineers* par J. Lebl. Plus précisément, Pre. Virginie Charette du Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke a entrepris une adaptation et la francisation de ce volume.

Après trois ans de développement et utilisation, le moment est venu pour rendre les sources et tout ce travail publique. À l'instar de *Active Calculus*, j'espère qu'une communauté de développement et d'utilisation se formera autour de ce projet.

[1] Tiré de la description officielle du cours MAT298 - Calcul vectoriel de l'Université de Sherbrooke

Deuxième édition. Le texte a connu plusieurs modifications depuis sa première version. Elles ont été incorporées graduellement dans la version .html, et dans des versions .pdf « extra-officielles ». Le moment est venu de produire une nouvelle version .pdf. Ceci coïncide notamment avec un changement dans le nom du site de publication.

Cette deuxième édition apporte plusieurs améliorations par rapport à la version initiale :

- L'inclusion d'exercices WeBWorK auto-corrigés, directement dans le texte des sections. Dans la version .pdf, ces exercices ne peuvent pas être corrigés automatiquement ; ils sont plutôt identifiés par l'icône correspondant à WeBWorK.
- Quelques corrections d'ordre mathématique. Il est possible que certaines erreurs subsistent, et je vous invite à m'en faire part. J'ai également inclus quelques démonstrations de théorèmes qui n'étaient pas présentes dans la première version.
- Une révision importante des figures. Leur mise en page a été revue, et les figures tridimensionnelles, auparavant produites avec SageMath, ont été refaites avec Asymptote. Les annotations sont plus soignées dans les deux versions ; dans la version .html, on peut toujours faire pivoter les figures, et le rendu est nettement meilleur dans la version .pdf. Le code SageMath d'origine est conservé sous forme de notebooks Jupyter dans le dépôt des sources.
- Une version .pdf améliorée, grâce à un thème visuel plus élaboré.
- Une correction linguistique du texte, uniformisation des références internes.
- L'ajout d'une nouvelle annexe sur les cylindres et les surfaces quadriques. Dans le même esprit, ce qui avant était la première section du manuel est devenu une annexe.
- Les réponses et solutions des exercices sont désormais exclues de la version .pdf ; elles demeurent toujours disponibles dans la version .html.

Pour la préparation de cette deuxième édition j'ai travaillé avec l'aide d'outils d'intelligence artificielle générative (Claude, Anthropic, en différentes versions). Le traitement technique de plusieurs aspects (code pour exercices WeBWorK, code des figures en Asymptote), ou encore uniformisation de certains aspects typographiques ou conventions de mise en page, ou références internes sont des tâches dans lesquelles ces outils présentent un énorme gain d'efficacité. Au-delà de ça, la correction linguistique et quelques corrections mathématiques (parfois des simples fautes de frappe) ont aussi bénéficié de l'utilisation de ces outils. Toutes les modifications ont été examinées et validées par l'auteur, qui demeure seul responsable du contenu.

Préface à la version .pdf. Depuis ses débuts le format privilégié pour ce manuel est le .html. Il comporte à mon avis plusieurs avantages : facilité de naviguer dans le document, éléments interactifs, accessibilité... Cependant, une version .pdf peut aussi avoir ses avantages, qu'elle soit faite pour impression, ou pour lecture / annotation avec un ordinateur ou une tablette. Certains étudiants ont demandé une telle version. Par ailleurs, afin de faire un dépôt dans la plateforme web Savoirs UdS, la version .pdf est aussi nécessaire. Elle est offerte en deux formats de papier : le format lettre, usuel en Amérique du Nord, et le format A4, en usage dans le reste de la francophonie.

Ceci dit, les utilisateurs et utilisatrices de la version .pdf sont invités et invitées à consulter la version web de ce manuel. Elle sera mise à jour plus fréquemment. Il faut aussi noter qu'à la page web du projet RELCALC on pourra trouver des versions .pdf mises à jour plus fréquemment que la version déposée dans Savoirs UdS. De plus, la taille des figures et certains aspects visuels ont été optimisés pour la version .html. En ce sens la version .pdf sera certainement moins peaufinée. Finalement, dans la version en ligne on trouvera que plusieurs exercices comportent des pistes de solution.

Ce qu'il reste à faire (mise à jour octobre 2026). Les sources originales (empruntées en bonne partie à *CLP*) contiennent encore, pour plusieurs problèmes, des indications ou des solutions qui n'ont pas été traduites de l'anglais. Il serait envisageable de s'attaquer à cette traduction lors d'une prochaine itération.

Par ailleurs, dans d'autres cas, les solutions, réponses ou indications ne sont tout simplement pas encore là. Du côté des mathématiques, il faudrait compléter ce texte avec des preuves de certains théorèmes importants : Stokes, la divergence, les fonctions implicites...

Table des matières

Remerciements v

Préface vii

1 Vecteurs et géométrie dans l'espace 1

1.1 Vecteurs . . . 1
1.2 Produit scalaire : angles et distances . . . 6
1.3 Produit vectoriel . . . 13
1.4 Droites et plans . . . 19
1.5 Courbes paramétriques et leurs tangentes . . . 27
1.6 Longueur d'arc et courbure . . . 44

2 Fonctions de plusieurs variables 59

2.1 Fonctions de plusieurs variables . . . 59
2.2 Limites et continuité . . . 68
2.3 Dérivées partielles . . . 77
2.4 Différentiabilité et approximations linéaires . . . 96
2.5 Règle de dérivation des fonctions composées . . . 114
2.6 Vecteur gradient . . . 135
2.7 Polynômes de Taylor avec plusieurs variables . . . 158
2.8 Valeurs maximales et minimales . . . 166
2.9 Multiplicateurs de Lagrange . . . 197

3 Intégrales multiples 213

3.1 Intégrales doubles . . . 213
3.2 Intégrales doubles en coordonnées polaires . . . 247
3.3 Applications des intégrales doubles . . . 269
3.4 Intégrales triples . . . 281
3.5 Intégrales triples en coordonnées cylindriques et sphériques . . . 294
3.6 Changements de variables pour les intégrales multiples . . . 315

4 Calcul vectoriel 333

4.1 Champs de vecteurs . . . 333
4.2 Intégrales de ligne . . . 344
4.3 Le rotationnel et la divergence . . . 358
4.4 Champs conservatifs et indépendance de la trajectoire . . . 370
4.5 Le théorème de Green . . . 384
4.6 Surfaces . . . 399
4.7 Intégrales de surface . . . 414
4.8 Le théorème de Stokes . . . 433
4.9 Le théorème de la divergence . . . 451

Appendices

A. Points et coordonnées en deux et trois dimensions **475**

A.1 Points et coordonnées en deux et trois dimensions 475

B. Transformations linéaires et matrices **479**

B.1 Matrices et transformations linéaires 479

C. Cylindres et surfaces quadriques **481**

C.1 Cylindres 481
C.2 Surfaces quadriques 482

D. SageMath **487**

D.1 Généralités 487
D.2 Vecteurs et courbes 487
D.3 Calcul différentiel 489
D.4 Calcul intégral 493
D.5 Surfaces paramétrées 493

Annexes

Références **497**

Chapitre 1

Vecteurs et géométrie dans l'espace

Pour se repérer dans le plan, deux nombres suffisent ; dans l'espace, il en faut trois. Mais bien souvent, les quantités qui nous intéressent ne sont pas des points dans l'espace, mais plutôt des déplacements ou des forces — ce qui mène au concept de *vecteur*. C'est cet outil vectoriel, essentiel pour la suite, que nous introduisons dans ce chapitre. (Un rappel sur les coordonnées dans le plan et dans l'espace se trouve à l'annexe A.1.) Outre les techniques et les notions élémentaires d'algèbre linéaire, nous nous intéressons aux fonctions vectorielles (courbes) ainsi qu'à certaines de leurs propriétés : longueur d'arc, courbure.

1.1 Vecteurs

Dans plusieurs applications, on s'occupe de *quantités* qui ne sont pas des nombres, mais qui ont une *direction* et une *grandeur*. Ces quantités sont appelées des vecteurs. Il est habituel de représenter un vecteur par une flèche. Si l'on se déplace, la grandeur du déplacement sera la distance, la direction étant évidente. De la même façon, la vitesse sera caractérisée par la rapidité et par la direction du déplacement.

Quelques exemples

- Il est naturel de dessiner le vecteur vitesse d'une particule en mouvement avec sa source à la position de la particule (qui peut changer). Le diagramme ci-contre montre la position d'une particule et son vecteur vitesse à deux moments différents.

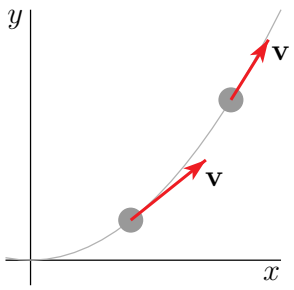


Figure 1.1.1 Une particule en mouvement et son vecteur vitesse

- On suppose qu'un point se déplace le long d'une droite en partant d'un point P pour terminer au point Q. Le **vecteur déplacement** correspondant, $\mathbf{v}$ dessiné dans la figure ci-après, a sa source en P et son but en Q. On écrit alors $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$. On remarque qu'il est parfaitement possible d'avoir une autre paire de points, R et S, tels que le déplacement nécessaire pour aller de R à S soit le même, c'est-à-dire $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, sans que le segment RS soit le même que le segment PQ.

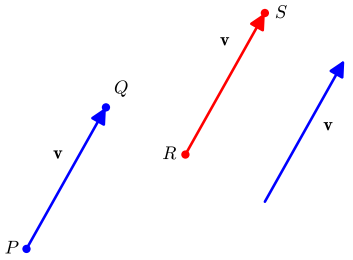


Figure 1.1.2 Plusieurs flèches représentent le même vecteur

Le vecteur nul, $\mathbf{0}$, est le déplacement trivial, il n'a pas de sens, et toute flèche le représentant a une longueur nulle.

- Supposons que nous considérions le mouvement d'un pendule, c'est-à-dire un mobile attaché à une corde. Il y a trois forces qui s'appliquent sur le pendule : la gravité **g**, dirigée vers le bas, la tension **t** de la corde, qui ramène le pendule dans la direction de la corde, et la résistance de l'air, qui repousse le pendule dans la direction opposée à celle de son mouvement. Les trois forces s'appliquent sur le pendule. Il est alors naturel de dessiner les flèches représentant chacune des trois forces avec leur source située au mobile.

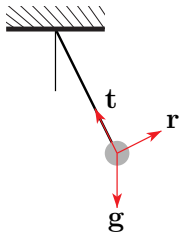


Figure 1.1.3 Un pendule soumis à plusieurs forces

Opérations avec vecteurs

Reprenons notre exemple et supposons qu'un mobile se déplace de P vers Q. Par la suite, le déplacement continue et va de Q vers R (voir la figure 1.1.4). L'effet combiné de ces déplacements est que notre mobile est allé de P à R. Le déplacement résultant est donc $\overrightarrow{PR}$, et l'on convient qu'il s'agit de la **somme** de $\overrightarrow{PQ}$ et de $\overrightarrow{QR}$, ce qu'on écrit naturellement

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Cette relation est appelée la **relation de Chasles**, ou encore la **loi du triangle**.

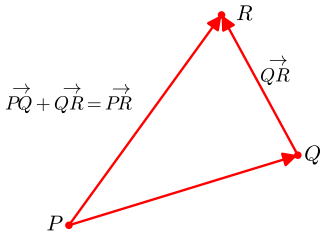


Figure 1.1.4 La relation de Chasles : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Il est aussi possible de multiplier un vecteur par un scalaire s. Par souci de cohérence, on voudrait que $2\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v}$, qui a la même direction, le même sens et une longueur double à celle de **v**. Par ailleurs, on voudrait que $-1\mathbf{v}$ additionné à **v** donne **0** comme résultat, donc que son sens soit l'opposé de celui de **v**. En général, on définit la **multiplication d'un vecteur v par un scalaire** s comme suit :

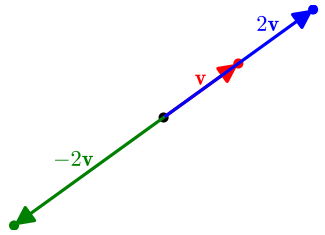


Figure 1.1.5 La multiplication d'un vecteur par un scalaire

- On change la longueur de **v** d'un facteur $|s|$, et
- si $s < 0$, on renverse l'orientation,

Afin de soustraire **b** de **a** graphiquement, on peut additionner $-\mathbf{b}$ (qui est obtenu de **b** en renversant son orientation) à **a**. Une autre possibilité est de dessiner **a** et **b** avec leur source à un même point, alors $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est le vecteur reliant le but de **b** au but de **a**, c'est-à-dire que $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est le vecteur qu'il faut ajouter à **b** de sorte à obtenir **a**.

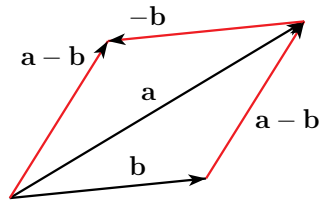


Figure 1.1.6 Soustraction de vecteurs

L'ensemble des vecteurs $\mathbb{R}^n$

Bien que l'approche du paragraphe précédent soit très utile en soi, notamment pour faire de la géométrie, il est très utile d'introduire un système de coordonnées afin d'utiliser la puissance de l'algèbre linéaire. On choisit donc un espace à deux ou trois dimensions dans lequel un point est choisi et désigné comme l'origine O, et un système de coordonnées rectangulaires associé. Chaque point A de notre espace aura alors ses coordonnées, (a_1, a_2) ou (a_1, a_2, a_3) selon que notre espace a deux ou trois dimensions. On écrira alors $A(a_1, a_2)$ ou $A(a_1, a_2, a_3)$, confondant un point avec ses coordonnées, ou encore $A(x_A, y_A)$ ou $A(x_A, y_A, z_A)$.

À chaque point A, on associe son **vecteur position**, $\overrightarrow{OA}$, et l'on fera la convention d'écriture suivante : on désignera par une lettre minuscule en caractère gras le vecteur position correspondant au point dont le nom est la même lettre majuscule en caractère normal :

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}.$$

Réciproquement, si un vecteur $\mathbf{a}$ est dessiné avec sa source avec l'origine, alors son but se trouve au point $A(a_1, a_2)$ ou $A(a_1, a_2, a_3)$. On dira alors que les coordonnées de A sont les composantes de $\mathbf{a}$, et l'on écrira ces composantes comme un vecteur colonne :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Il est souvent pratique, afin d'alléger l'écriture, d'écrire les vecteurs en rangées, en utilisant la notation suivante :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (a_1, a_2) \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (a_1, a_2, a_3).$$

Certains textes écriraient aussi $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ou $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Il faut bien comprendre qu'il s'agit simplement d'une convention d'écriture ; nos vecteurs seront *toujours* des vecteurs colonnes, ceci sera important lorsque les matrices entreront en jeu.

Définition 1.1.7 L'espace $\mathbb{R}^n$.

Pour $n \geqslant 1$ un entier, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des vecteurs colonnes à n composantes réelles :

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

En particulier, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont les ensembles des vecteurs colonnes à deux et trois composantes, respectivement : c'est donc, à nouveau, le même ensemble que celui des points du plan et de l'espace introduit plus haut, vu maintenant comme ensemble de *vecteurs* plutôt que de *points* — une distinction qui, comme on vient de le voir, n'en est pas vraiment une.

Prenons maintenant le vecteur $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, dessiné avec sa source au point $P(p_1, p_2, p_3)$ et avec son but à $Q(q_1, q_2, q_3)$. Comme $\mathbf{v}$ est précisément le déplacement nécessaire pour aller de P à Q, on doit avoir $p_i + v_i = q_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$[1]. Ainsi, écrit avec ces composantes, nous avons :

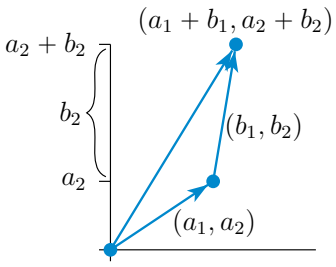
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{bmatrix}.$$

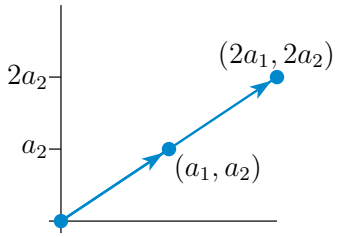
- On suppose que l'on fait un premier pas, se déplaçant de a_1 unités parallèlement à l'axe des abscisses et de a_2 unités parallèlement à l'axe des ordonnées. Dans ce cas, on dira que $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ est le vecteur de déplacement pour ce premier pas. Supposons maintenant

[1] L'expression « $i \in \{1, 2, 3\}$ » doit se lire comme « i dans l'ensemble formé des éléments $1, 2, 3$ ».

que lors d'un deuxième pas, on bouge de b_1 unités dans la direction des abscisses et de b_2 unités dans la direction des ordonnées, comme cela est indiqué dans la figure de gauche ci-bas. Ainsi, le vecteur de déplacement pour le deuxième pas est $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Globalement, on s'est déplacé de $a_1 + b_1$ unités parallèlement à l'axe des abscisses et de $a_2 + b_2$ unités parallèlement à l'axe des ordonnées. Le vecteur de déplacement pour les deux pas combinés est donc $\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$. Nous allons définir l'addition $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ par $\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$.

- On suppose maintenant que l'on décide de se déplacer dans la même direction que, lors du premier pas, mais d'un pas deux fois plus long, comme cela est indiqué dans la figure de droite ci-bas. Ce pas sera alors de $2a_1$ unités dans la direction des abscisses et de $2a_2$ unités dans la direction des ordonnées, et le vecteur de déplacement résultant sera $\begin{bmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix}$. On définit alors le produit du nombre réel 2 et du vecteur $\mathbf{a}$, qu'on dénote $2\mathbf{a}$, par $2\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix}$.





En somme, l'addition des vecteurs se fait de composante à composante, et la multiplication d'un vecteur par un scalaire se fait en multipliant chacune des composantes du vecteur par le scalaire en question. Les définitions données pour les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ se généralisent de façon évidente à $\mathbb{R}^3$ et à $\mathbb{R}^n$ (1.1.7) en général. Nous formulons les définitions dans le cas général.

Définition 1.1.8 Addition de vecteurs et multiplication par un scalaire.

Soit $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $s \in \mathbb{R}$. On définit alors

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$,
- $s\mathbf{a} = \begin{bmatrix} sa_1 \\ \vdots \\ sa_n \end{bmatrix}$.

Les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire qui viennent d'être définies sont naturelles, elles héritent des propriétés usuelles des nombres réels.

Théorème 1.1.9 Propriétés des opérations.

Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *et* $s, t \in \mathbb{R}$. *Alors,*

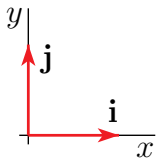
(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,
(2) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$,
(3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$,
(4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$,
(5) $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$,
(6) $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$,
(7) $(st)\mathbf{a} = s(t\mathbf{a})$,
(8) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

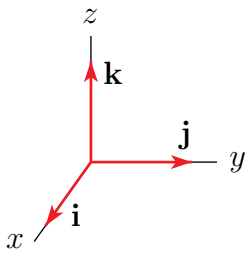
Les « vecteurs de la base canonique » jouent un rôle crucial.

Définition 1.1.10

Les vecteurs de la **base canonique** sont[a]

- en deux dimensions : $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;
- en trois dimensions : $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.





Grâce aux propriétés des vecteurs, on peut notamment écrire :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}, \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}.$$

Une expression qui est une somme de multiples de vecteurs, comme $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, est appelée une *combinaison linéaire* de ces vecteurs. Ainsi, tout vecteur peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique. Ceci rend ces vecteurs de base très utiles.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Soit $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Évaluer et esquisser $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ et $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Pour mieux comprendre.

2. Déterminer si oui ou non les points donnés sont colinéaires (c'est-à-dire s'ils appartiennent à une droite commune)

(a) $(1, 2, 3)$, $(0, 3, 7)$, $(3, 5, 11)$. (b) $(0, 3, -5)$, $(1, 2, -2)$, $(3, 0, 4)$.

3. Trouvez l'équation d'une sphère si l'un de ses diamètres a pour extrémités les points $(2, 1, 4)$ et $(4, 3, 10)$.

4. Montrez que l'ensemble de tous les points P qui sont deux fois plus éloignés de $(3, -2, 3)$ que de $(3/2, 1, 0)$ est une sphère. Trouvez son centre et son rayon.

5. Utilisez les vecteurs pour prouver que la ligne joignant les points médians de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et de longueur égale à la moitié de celle-ci.

6. Montrez que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en deux.

Pour aller plus loin.

7. Considérez un cube tel que chaque côté a une longueur de s. Nommer, dans l'ordre, les quatre sommets au bas du cube A, B, C, D et les quatre sommets correspondant sur le

[a] Certain(e)s auteur(e)s écrivent $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ à la place de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$, respectivement.

dessus du cube A', B', C', D'.

(a) Montrer que toutes les arêtes du tétraèdre $A'C'BD$ ont la même longueur.

(b) Soit E le centre du cube. Trouvez l'angle entre EA et EC.

1.2 Produit scalaire : angles et distances

Dans cette section et celle qui suit, nous allons étudier deux *produits* avec les vecteurs. Le premier est le *produit scalaire*, qui a comme résultat un nombre [1], le second est le *produit vectoriel*, défini pour les vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, dont le résultat est un autre vecteur. Tous les deux nous seront extrêmement utiles par la suite.

Produit scalaire

Le produit scalaire est défini pour des vecteurs avec un nombre arbitraire de composantes. Cependant, dans le cadre de ce texte, nous utiliserons souvent les vecteurs à deux ou trois composantes. Afin d'alléger l'écriture [2], nous exposons la théorie pour les vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, nous laissons au lectorat le soin de faire les spécialisations aux cas $n = 2$ ou $n = 3$.

Définition 1.2.1

Soit $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Leur produit scalaire est le nombre

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Exemple 1.2.2

(a) Soit $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculer $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(b) Calculer $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

(a) Nous avons :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 1 = 0.$$

(b) Nous avons cette fois :

$$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 1 \times (-2) + 2 \times (-1) = -4.$$

[1] D'où le nom : le résultat est un scalaire.

[2] Et surtout puisque nous présumons que le lecteur ou la lectrice générique de ce texte a suivi un cours d'algèbre linéaire.

Proposition 1.2.3

Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *et* $s, t \in \mathbb{R}$*, alors :*

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant 0$*, et l'égalité a lieu si et seulement si* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ *(positivité) ;*

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ *(commutativité) ;*

(c) $(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b})$;

(d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ *(distributivité du produit scalaire sur l'addition).*

Remarque 1.2.4

Si le point P a pour coordonnées (x, y, z), alors le vecteur $\mathbf{p} = (x, y, z)$ est tel que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = x^2 + y^2 + z^2$. Ceci revient, en vertu du théorème de Pythagore, à dire que la distance de P à l'origine est donnée par $\sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}$. Ceci nous mène à la définition de la norme d'un vecteur.

Définition 1.2.5

Soit $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Sa *norme* est la quantité

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

On dit d'un vecteur $\mathbf{a}$ qu'il est *unitaire* si $\|\mathbf{a}\| = 1$.

Exemple 1.2.6

Calculer la norme de $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$.

Solution. On calcule d'abord $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3$, de sorte que $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3}$.

On utilisera pour la norme la notation à double barre, $\|\mathbf{a}\|$, plutôt que la simple barre $|\mathbf{a}|$ employée par certain(e)s auteur(e)s. Ceci permet d'éviter toute ambiguïté avec la valeur absolue d'un scalaire, qui utilise le même symbole à une seule barre : si on rencontre malgré tout cette notation à une seule barre ailleurs, le contexte permettra de dissiper le doute, la norme d'un vecteur et la valeur absolue d'un scalaire étant deux notions bien différentes malgré ce partage de notation.

Proposition 1.2.7

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *et* $k \in \mathbb{R}$*, alors*

$$\|k\mathbf{a}\| = |k| \, \|\mathbf{a}\| .$$

Il est souvent utile de se donner un vecteur unitaire dans une direction donnée. Pour ce faire, si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ est donné, on considère

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

En effet, en vertu de la proposition 1.2.7, le vecteur $\mathbf{a}'$ est unitaire et il pointe dans la même direction que $\mathbf{a}$, puisqu'il s'agit d'un multiple scalaire de celui-ci. On dit alors que $\mathbf{a}$ a été **normalisé**.

À vous de jouer 1.2.8

Soit $\mathbf{u} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\mathbf{v} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ et $\mathbf{w} = 4\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Calculer les valeurs suivantes (dans cette question la norme d'un $\mathbf{u}$ vecteur est notée $|\mathbf{u}|$) :

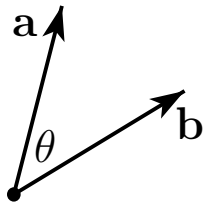
$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| &= \_\_\_\_\_ \\ |-6\mathbf{u}| + 3|\mathbf{v}| &= \_\_\_\_\_ \\ |3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w}| &= \_\_\_\_\_ \\ \tfrac{1}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w} &= \_\_\_\_\_ \\ \left|\tfrac{1}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w}\right| &= \_\_\_\_\_ \end{aligned}$$

Une des principales utilités du produit scalaire est son lien avec les angles, traduite dans le résultat suivant.

Théorème 1.2.9

Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle formé par ces vecteurs (voir la figure ci-après). Alors,

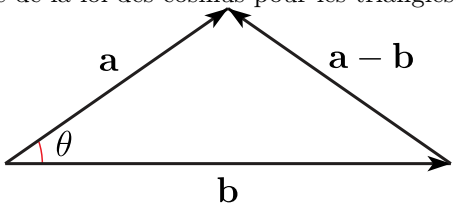
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$



Démonstration. Afin d'établir ce résultat, on calcule $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$ de deux façons différentes. La première consiste à calculer $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$ au moyen du produit scalaire, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la seconde façon de calculer $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$ fait appel à l'interprétation d'une norme comme distance et découle de la loi des cosinus pour les triangles.



Si l'on applique la loi des cosinus à un triangle dont un sommet est à l'origine et que deux côtés adjacents sont déterminés par les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ (voir la figure ci-haut), le troisième côté est donné par $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, d'où

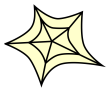
$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\,\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\,\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta,$$

et le résultat suit après simplifications. ■

À vous de jouer 1.2.10



Déterminer $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ sachant que $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 5$, et que l'angle entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ radians.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____

Projections

Le résultat du théorème 1.2.9 permet d'utiliser le produit scalaire pour déterminer si deux vecteurs sont orthogonaux ou pas, c'est-à-dire si l'angle qu'ils forment est $\frac{\pi}{2}$ [3]. De la même façon, on peut utiliser le produit scalaire pour calculer l'angle formé par deux vecteurs (le cosinus de cet angle en réalité). Notamment, si le produit scalaire est positif, il en va de même pour le cosinus, de sorte que l'angle est un angle aigu. Naturellement, un produit scalaire négatif signifie que l'angle est obtus.

Exemple 1.2.11

Considérer les vecteurs suivants :

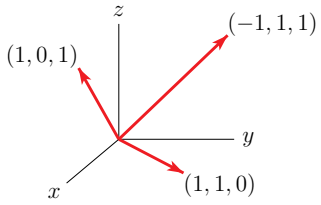
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, les produits scalaires sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1; \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0; \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 0. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure que $\mathbf{c}$ est orthogonal à la fois à $\mathbf{a}$ et à $\mathbf{b}$. Étant donné que $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, le premier produit scalaire nous dit aussi que l'angle θ formé par $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ vérifie

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{2}, \text{ de sorte que } \theta = \frac{\pi}{3}.$$



[3] La notion d'orthogonalité a été généralisée aux ensembles de fonctions, par exemple. Ceci joue un rôle très important dans les mathématiques appliquées plus avancées. La généralisation du produit scalaire est celle d'un « produit intérieur ».

À vous de jouer 1.2.12

Déterminer si les vecteurs ci-dessous sont colinéaires, orthogonaux, ou ni l'un ni l'autre.

Les vecteurs $\mathbf{a} = \langle -3, -1, 3\rangle$ et $\mathbf{b} = \langle 6, -12, 2\rangle$ sont (☐ orthogonaux ☐ colinéaires ☐ ni l'un ni l'autre) .

Les vecteurs $\mathbf{a} = \langle -3, -1, 3\rangle$ et $\mathbf{c} = \langle 15, 5, -14\rangle$ sont (☐ orthogonaux ☐ colinéaires ☐ ni l'un ni l'autre) .

Les vecteurs $\mathbf{a} = \langle -3, -1, 3\rangle$ et $\mathbf{d} = \langle -9, -3, 9\rangle$ sont (☐ orthogonaux ☐ colinéaires ☐ ni l'un ni l'autre) .

Notons que si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ est donné, alors

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_1, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_2, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = a_3,$$

de sorte que le produit scalaire peut servir à isoler les composantes d'un vecteur donné dans la direction des vecteurs de la base canonique.

Le même problème peut se poser pour d'autres directions. Voyons comment le traiter.

Étant donné deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, on veut décomposer $\mathbf{a}$ comme la somme d'un vecteur parallèle à $\mathbf{b}$, qu'on appellera la **projection** de $\mathbf{a}$ sur $\mathbf{b}$, et d'un autre vecteur orthogonal à $\mathbf{b}$.

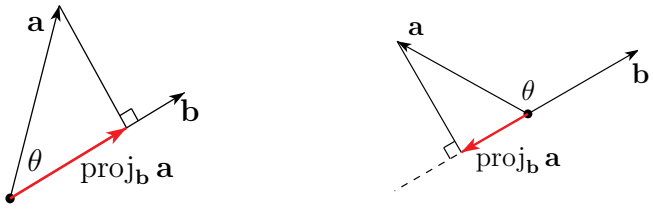


Figure 1.2.13 Faire une projection revient à faire une décomposition. Les figures illustrent la projection d'un vecteur $\mathbf{a}$ sur un vecteur $\mathbf{b}$.

Autrement dit, on veut trouver un scalaire λ et un vecteur $\mathbf{w}$ orthogonal à $\mathbf{b}$, tels que

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mathbf{w}.$$

Afin d'isoler la valeur de λ, prenons le produit scalaire de $\mathbf{a}$ avec $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\lambda\mathbf{b} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{b} = \lambda\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} = \lambda\mathbf{b} \cdot \mathbf{b},$$

où la dernière égalité suit de ce que $\mathbf{w}$ doit être orthogonal à $\mathbf{b}$, de sorte que $\lambda = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$. Ceci étant, il suffit de poser $\mathbf{w} = \mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$. En effet, ce vecteur est orthogonal à $\mathbf{b}$, puisque

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Définition 1.2.14

Étant donné deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, la **projection de a sur b** est le vecteur

$$\text{proj}_{\,\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\mathbf{b}.$$

Le scalaire $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$ est la **composante de a dans la direction de b.**

On remarquera que la norme de la projection est

$$\|\text{proj}_{\,\mathbf{b}}\,\mathbf{a}\| = \left\|\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\mathbf{b}\right\| = \left|\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right| \|\mathbf{b}\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{b}\|} = \|\mathbf{a}\| \, |\cos\theta|.$$

Par ailleurs, si $\mathbf{b}$ est un vecteur unitaire, la composante de $\mathbf{a}$ dans la direction de $\mathbf{b}$ est simplement $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Exemple 1.2.15

Trouver la projection de $(0,3)$ sur $(1,1)$, telle qu'indiquée dans la figure.

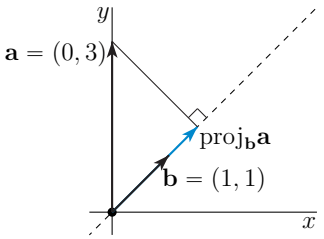


Figure 1.2.16 Projection de $(0,3)$ sur $(1,1)$.

En vertu de la définition 1.2.14 avec $\mathbf{a} = (0,3)$ et $\mathbf{b} = (1,1)$, la projection est

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} &= \frac{(0,3)\cdot(1,1)}{\|(1,1)\|^2}\,(1,1) \\ &= \frac{0\times 1 + 3\times 1}{1^2+1^2}\,(1,1) = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Déterminer si oui ou non les paires de vecteurs sont orthogonaux.

(a) $(1,3,2)$, $(2,-2,2)$. (b) $(-3,1,7)$, $(2,-1,1)$. (c) $(2,1,1)$, $(-1,4,2)$.

2. Soit $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Calculer la projection de $\mathbf{a}$ sur $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$.

3. Est-ce que le triangle avec sommets $(1,2,3)$, $(4,0,5)$ et $(3,6,4)$ a un angle droit ?

4. Calculez le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Trouvez l'angle entre eux.

(a) $\mathbf{a} = (1,2)$, $\mathbf{b} = (-2,3)$.
(b) $\mathbf{a} = (-1,1)$, $\mathbf{b} = (1,1)$.
(c) $\mathbf{a} = (1,1)$, $\mathbf{b} = (2,2)$.
(d) $\mathbf{a} = (1,2,1)$, $\mathbf{b} = (-1,1,1)$.
(e) $\mathbf{a} = (-1,2,3)$, $\mathbf{b} = (3,0,1)$.

5. Déterminez l'angle entre les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ si

(a) $\mathbf{a} = (1,2)$, $\mathbf{b} = (3,4)$.
(b) $\mathbf{a} = (2,1,4)$, $\mathbf{b} = (4,-2,1)$.
(c) $\mathbf{a} = (1,-2,1)$, $\mathbf{b} = (3,1,0)$.

6. Déterminer toutes les valeurs de y pour lesquelles les vecteurs donnés sont orthogonaux.

(a) $(2,4)$, $(2,y)$. (b) $(4,-1)$, (y,y^2). (c) $(3,1,1)$, $(2,5y,y^2)$.

Pour mieux comprendre.

7. Considérons l'énoncé suivant : « Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ et si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, alors $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. » Si l'affirmation est vraie, prouvez-la. Si l'affirmation est fausse, donnez un contre-exemple.

8. Une bille est posée sur le plan $ax + by + cz = d$. Le système de coordonnées a été choisi de sorte que l'axe positif z pointe vers le haut. Le coefficient c est non nul et les coefficients a et b sont non tous nuls. Dans quel sens roule la bille ? Pourquoi les conditions « $c \neq 0$ » et « a, b » n'ont-elles pas toutes deux été imposées à zéro ?

9. Trouvez l'angle entre la diagonale d'un cube et la diagonale d'une de ses faces.

10. Considérons les trois points $O(0,0)$, $A(a,0)$ et $B(b,c)$.

(a) Esquisser, en une seule figure,

- le triangle formé des sommets O, A et B, et
- le cercle circonscrit pour le triangle (c'est-à-dire le cercle passant par les trois sommets), et
- les vecteurs
  - $\overrightarrow{OA}$, de O à A,
  - $\overrightarrow{OB}$, de O à B,
  - $\overrightarrow{OC}$, de O à C, où C est le centre du cercle circonscrit.

Ensuite, ajouter l'esquisse et evaluer, à partir de l'esquisse,

- la projection du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OA}$, et
- la projection du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

(b) Déterminer C.

(c) Évaluer, en utilisant la formule Définition 1.2.14,

- la projection du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OA}$, et
- la projection du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

11. Soit $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ et $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Trouver α tel que

(a) $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ soient orthogonaux,

(b) $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ soient colinéaires,

(c) L'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est de $60°$.

12. Définissez $\mathbf{a} = (1,2,3)$ et $\mathbf{b} = (4,10,6)$.

(a) Trouvez la composante de $\mathbf{b}$ dans la direction de $\mathbf{a}$.

(b) Trouver la projection de $\mathbf{b}$ sur $\mathbf{a}$.

(c) Trouvez la projection de $\mathbf{b}$ perpendiculaire à $\mathbf{a}$.

1.3 Produit vectoriel

Dans cette section, nous étudierons une seconde « multiplication », définie pour des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (contrairement au produit scalaire qui est défini sans égard à la dimension des vecteurs). Le produit vectoriel est souvent défini au moyen de ses applications en physique, mais il a aussi une très claire interprétation géométrique. L'approche qu'on retient relève plutôt de l'algèbre linéaire : on tire profit des propriétés des déterminants.

Définition et propriétés

Étant donné deux vecteurs fixes $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, on peut définir une application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\phi(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

En vertu des propriétés des déterminants, il s'agit d'une fonction linéaire, c'est-à-dire que, pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}) \qquad \text{et} \qquad \phi(k\mathbf{x}) = k\phi(\mathbf{x}).$$

Ainsi, il existe un unique vecteur $\mathbf{n}$, tel que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \phi(\mathbf{x}).$$

Ceci nous permet de définir le produit vectoriel.

Définition 1.3.1

Étant donné deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, leur **produit vectoriel**, noté $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$[a], est l'unique vecteur vérifiant

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

L'expression $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se lit en français *« $\mathbf{a}$ croix $\mathbf{b}$ »* ou encore *« $\mathbf{a}$ produit vectoriel $\mathbf{b}$ »*.

Proposition 1.3.2

Étant donné $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;

(b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *est orthogonal à* $\mathbf{a}$ *et à* $\mathbf{b}$;

(c) $\mathbf{a} \times (\beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$;

(d) Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, *alors*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} ;$$

(e) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \sin\theta$, *où* $\theta \in [0, \pi]$ *est l'angle (non orienté) formé par* $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$. *En particulier,* $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *sont parallèles si et seulement si* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Démonstration.

(a) Cela suit de ce que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, on a $\det(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\det(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$.

[a] Il est aussi souvent noté $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, surtout dans les textes européens.

(b) En effet, en vertu de la définition, on a

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0,$$

ce qui montre le premier énoncé ; le second se démontre de la même façon.

(c) De nouveau, ce sont les propriétés des déterminants qui donnent la preuve. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c})) &= \det(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c}) \\ &= \det(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \beta\,\mathbf{b}) + \det(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \gamma\,\mathbf{c}) \\ &= \beta\det(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + \gamma\det(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ &= \beta\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{x} \cdot (\beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})).\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, on obtient la conclusion voulue[1].

(d) Écrivons $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Nous avons alors

$$x = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Nous montrons de la même façon les autres égalités.

(e) Nous avons

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2.\end{aligned}$$

Après développement, nous pouvons arranger les termes de façon équivalente pour obtenir

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2,$$

qui à son tour est égal à

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1 - \cos^2\theta)\end{aligned}$$

et le résultat suit de ce que $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$, et nous considérons l'angle $\theta \in [0, \pi]$, de sorte que son sinus est positif.

■



À vous de jouer 1.3.3

Déterminer un vecteur orthogonal à la fois à $-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ et à $-5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$:

_____.

- Remarquons qu'il est usuel de définir le produit vectoriel au moyen de la formule de la propriété 3. La vérification des autres propriétés est alors un exercice de calcul, plutôt fastidieux et pas très édifiant.

[1] En effet, bien que la loi de simplification pour le produit scalaire ne soit pas valide en général, il demeure vrai que si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, alors $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

- La formule 4 fournit une façon concise d'écrire le produit vectoriel comme un *déterminant symbolique*[2] :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_2 \\ \mathbf{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Applications géométriques

Les propriétés 2 et 5 de la proposition 1.3.2 nous disent que si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est orthogonal au plan engendré par $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, et sa norme est $\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin\theta$. Ceci laisse encore deux choix pour le produit vectoriel. Dans la figure de gauche ci-bas, les vecteurs $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ sont des candidats potentiels. Lequel des deux choisir ? La **règle de la main droite** fournit la réponse : lorsque vos doigts de la main droite tournent d'un angle θ de $\mathbf{a}$ jusqu'à $\mathbf{b}$, alors votre pouce indique la direction de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

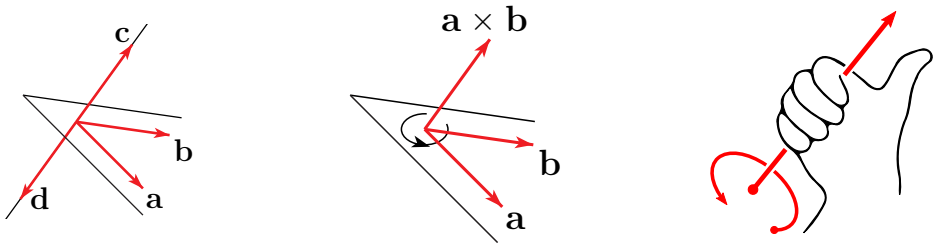


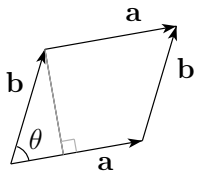
Figure 1.3.4 Pour le produit vectoriel, l'ordre des facteurs est important. À droite, la règle de la main droite.

La partie 5 admet une interprétation qui nous sera utile à plusieurs reprises par la suite : le produit vectoriel permet de calculer l'aire d'un parallélogramme.

Corollaire 1.3.5

Soit $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *deux vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$. *Alors, l'aire du parallélogramme qu'ils déterminent est* $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$.

Démonstration.
En effet, l'aire du parallélogramme en question est donnée par le produit de la longueur d'un de ses côtés, disons $\mathbf{a}$ par la distance h d'un sommet à ce côté. Cette distance vaut $h = \|\mathbf{b}\| \sin\theta$.



■

À vous de jouer 1.3.6

Déterminer l'aire du parallélogramme de sommets $P\,(3,2)$, $Q\,(8,6)$, $R\,(8,4)$ et $S\,(13,8)$.
Réponse : _____

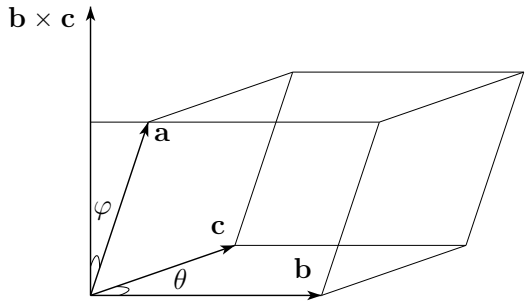
Le volume d'un parallélépipède est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur. On vient de voir que cette base peut être calculée au moyen d'un produit vectoriel. De plus, la hauteur n'est rien d'autre qu'une projection, donc le produit scalaire n'est pas loin. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

[2] *Symbolique*, car il ne s'agit pas, à proprement parler, d'un déterminant, les éléments apparaissant dans la première ligne étant des vecteurs, pas des nombres.

Corollaire 1.3.7 Volume d'un parallélépipède : le produit mixte.

Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *et* $\mathbf{c}$ *trois vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$. *Le volume du parallélépipède qu'ils déterminent est*

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$



Démonstration. En effet, on peut choisir comme base le parallélogramme déterminé par $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$. Soit $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. L'aire de la base est donc $A = \|\mathbf{n}\|$. Par ailleurs, $\mathbf{n}$ est orthogonal au plan qui contient cette base. La hauteur du parallélépipède est donnée par $h = \|\text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{a}\|$. Il vient alors que le volume cherché est

$$\begin{aligned} V = h \cdot A &= \|\text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{a}\| \, \|\mathbf{n}\| = \left\| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \right\| \, \|\mathbf{n}\| \\ &= \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|^2} \|\mathbf{n}\|^2 = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| \, . \end{aligned}$$

■

Propriétés supplémentaires

Le produit vectoriel a d'autres propriétés, nous finissons avec deux qui sont souvent utilisées.

Proposition 1.3.8

Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *et* $\mathbf{c}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *Alors*

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$

Démonstration.

(a) La première identité résulte directement du fait que lorsqu'on échange deux vecteurs dans un déterminant, celui-ci est multiplié par -1. En effet, nous avons, par définition

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ &= -\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) \\ &= \det(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

(b) La preuve de la deuxième égalité n'est pas exceptionnellement difficile, il s'agit de calculer explicitement les deux côtés et remarquer qu'ils sont effectivement égaux. Nous avons d'une part

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} \;=\; (b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\mathbf{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}$$

Remplaçons dans le terme de gauche de l'égalité que nous devons montrer, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & a_1 & b_2c_3-b_3c_2\\ \mathbf{j} & a_2 & -b_1c_3+b_3c_1\\ \mathbf{k} & a_3 & b_1c_2-b_2c_1\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{i}\big[a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(-b_1c_3+b_3c_1)\big]\\ &\quad -\mathbf{j}\big[a_1(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_2c_3-b_3c_2)\big]\\ &\quad +\mathbf{k}\big[a_1(-b_1c_3+b_3c_1)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\big]\end{aligned}$$

D'autre part, le terme de droite est

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} &= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\ &\quad -(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k})\\ &= \mathbf{i}\,\big[a_1b_1c_1+a_2b_1c_2+a_3b_1c_3-a_1b_1c_1\\ &\quad -a_2b_2c_1-a_3b_3c_1\big]\\ &\quad +\mathbf{j}\,\big[a_1b_2c_1+a_2b_2c_2+a_3b_2c_3-a_1b_1c_2\\ &\quad -a_2b_2c_2-a_3b_3c_2\big]\\ &\quad +\mathbf{k}\,\big[a_1b_3c_1+a_2b_3c_2+a_3b_3c_3-a_1b_1c_3\\ &\quad -a_2b_2c_3-a_3b_3c_3\big]\\ &= \mathbf{i}\,[a_2b_1c_2+a_3b_1c_3-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1]\\ &\quad +\mathbf{j}\,[a_1b_2c_1+a_3b_2c_3-a_1b_1c_2-a_3b_3c_2]\\ &\quad +\mathbf{k}\,[a_1b_3c_1+a_2b_3c_2-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3]\end{aligned}$$

La dernière expression que nous avons pour le terme de gauche est équivalente à la dernière expression que nous avons pour le terme de droite.

■

À vous de jouer 1.3.9



Soient $\mathbf{a}=5\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\mathbf{b}=4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ et $\mathbf{c}=2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$. Dans ce problème on note les projections au moyen d'indices : la projection d'un vecteur $\mathbf{x}$ sur un vecteur $\mathbf{y}$ est notée $\mathbf{x}_\mathbf{y}$.

Effectuer les opérations suivantes :

A) $\mathbf{a}_\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=$ _____

B) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_\mathbf{c}=$ _____

C) $\mathbf{c}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}=$ _____

D) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}})=$ _____

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Vérifier par calcul direct que

(a) $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

(b) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}$.

2. Calculez les aires des parallélogrammes déterminés par les vecteurs suivants.

(a) $\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}$.

3. Calculez les volumes des parallélépipèdes déterminés par les vecteurs suivants :

(a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

4. Calculez le produit vectoriel $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

5. Calculez les produits vectoriels suivants :

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

6. Soit $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vérifiez, par calcul direct, que

(a) $\mathbf{p} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$.

(b) $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = -\mathbf{q} \times \mathbf{p}$.

(c) $\mathbf{p} \times (3\mathbf{r}) = 3(\mathbf{p} \times \mathbf{r})$.

(d) $\mathbf{p} \times (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{r}$.

(e) $\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \neq (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r}$.

7. Calculez l'aire du triangle dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ et $(3, 2, 1)$.

Pour mieux comprendre.

8. Considérons l'énoncé suivant : « Le vecteur $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ est de la forme $\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$ pour certains nombres réels α et β. » Si l'affirmation est vraie, prouvez-la. Si l'affirmation est fausse, donnez un contre-exemple.

9. Quelles conclusions géométriques pouvez-vous tirer de $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$?

10. Quelles conclusions géométriques pouvez-vous tirer de $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$?

11. Trouvez une formule pour $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ qui fait intervenir les produits scalaires mais pas les produits vectoriels.

12. Un prisme a les six sommets suivants

$$\begin{aligned} A &= (1, 0, 0) & A' &= (5, 0, 1) \\ B &= (0, 3, 0) & B' &= (4, 3, 1) \\ C &= (0, 0, 4) & C' &= (4, 0, 5) \end{aligned}$$

(a) Vérifier que trois des faces sont des parallélogrammes. Sont-ils rectangulaires ?

(b) Trouvez la longueur de AA'.

(c) Trouvez l'aire du triangle ABC.

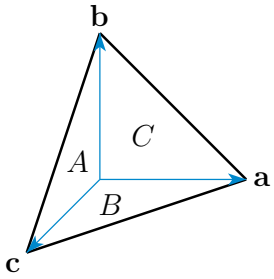
(d) Trouvez le volume du prisme.

Pour aller plus loin.

13. Une particule P de masse unitaire dont la position dans l'espace au temps t est $\mathbf{r}(t)$ a un moment angulaire $L(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$. Si $\mathbf{r}''(t) = \rho(t)\mathbf{r}(t)$ pour une fonction scalaire ρ, montrez que L est constante, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas avec le temps. Ici $'$ désigne $\frac{d}{dt}$.

14.

(Théorème de Pythagore à trois dimensions) Un corps solide dans l'espace avec exactement quatre sommets est appelé un tétraèdre. Soit A, B, C et D les aires des quatre faces d'un tétraèdre. Supposons que les trois arêtes se rejoignant au sommet opposé à la face d'aire D sont perpendiculaires l'une à l'autre. Montrez que $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$.



15. (Loi des cosinus en trois dimensions) Soient A, B, C et D les aires des quatre faces d'un tétrahèdre. Soit α l'angle entre les faces d'aires B et C, soit β l'angle entre les faces d'aires A et C et soit γ l'angle entre les faces d'aires A et B. (Par définition, l'angle entre deux faces est l'angle entre les vecteurs normaux aux faces). Montrez que

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha - 2AC\cos\beta - 2AB\cos\gamma$$

1.4 Droites et plans

Droites dans le plan

Une droite $\mathcal{D}$ dans le plan peut être spécifiée en donnant un point $P_0 = (x_0, y_0)$ par lequel elle passe, et sa direction. Cette dernière peut, à son tour, être spécifiée en donnant un vecteur $\mathbf{n}$ qui est orthogonal à $\mathcal{D}$. On dira que $\mathbf{n}$ est un vecteur normal pour $\mathcal{D}$. On peut aussi spécifier un vecteur directeur $\mathbf{d}$ pour $\mathcal{D}$.



Figure 1.4.1 Un droite, un vecteur normal et un vecteur directeur.

- Un point $X(x, y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\mathbf{x} - \mathbf{p}_0 = \overrightarrow{P_0X}$ et $\mathbf{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si

  $$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0X} = 0,$$

  ce qui donne à son tour

  $$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0. \tag{$*$}$$

  Ces deux équations équivalentes sont **l'équation normale** de $\mathcal{D}$.

- Si $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ et $P_0 = (x_0, y_0)$, ces équations deviennent simplement

  $$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad \text{et} \quad ax + by = ax_0 + by_0. \tag{$\dagger$}$$

  L'**équation générale** d'une droite dans le plan est une équation de la forme

  $$ax + by + c = 0.$$

Il est important de noter que les coefficients de x et y dans une telle équation donnent un vecteur normal pour la droite.

- Si l'on veut plutôt donner un vecteur directeur pour $\mathcal{D}$, il suffit de considérer $\mathbf{d}$ tel que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$. On peut choisir par exemple $\mathbf{d} = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$. Un point $X(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si les vecteurs $\mathbf{x} - \mathbf{p}_0 = \overrightarrow{P_0X}$ et $\mathbf{d}$ sont parallèles, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un scalaire t tel que

$$\overrightarrow{P_0X} = t\mathbf{d}$$

ou encore

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{d}. \qquad (\dagger\dagger)$$

C'est ce qu'on appelle une **équation vectorielle** de la droite, ou encore un **paramétrage** de celle-ci. Il faut noter que cette équation n'est pas unique. En effet, si $\mathbf{p}_0'$ est le vecteur position d'un autre point sur la droite et que $\mathbf{d}'$ est un autre vecteur direction pour $\mathcal{D}$, c'est-à-dire un vecteur colinéaire à $\mathbf{d}$, alors l'équation

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0' + t\mathbf{d}'$$

est également une équation paramétrique de $\mathcal{D}$.

- La relation de parallélisme entre $\overrightarrow{P_0X}$ et $\mathbf{d}$ s'exprime aussi en disant que le déterminant des deux vecteurs est nul. Ceci se traduit à son tour par

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou encore} \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

qui est l'équation (†).

Plans dans l'espace

Afin de spécifier un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace, il n'est pas suffisant de donner un point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur parallèle au plan. En effet, la droite passant par ce point et dirigée par ce vecteur sera contenue dans le plan, mais le plan pourrait tourner autour de cette droite. Cette dernière ne détermine donc pas le plan. Par contre, donner un point et un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ suffit à déterminer ce dernier.



Figure 1.4.2 Un point et vecteur $\mathbf{d}$ parallèle au plan ne suffisent pas à le spécifier.

- Si $\mathbf{n}$ et P_0 sont donnés, alors le point X appartient au plan $\mathcal{P}$ passant par P_0 de vecteur normal $\mathbf{n}$ si et seulement si les vecteurs $\mathbf{x} - \mathbf{p}_0 = \overrightarrow{P_0X}$ et $\mathbf{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0X} = 0$, ce qui donne exactement l'équation (∗), qu'on appellera encore **l'équation normale du plan**.

- Dans ce contexte, on aura $\mathbf{n} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ et $P_0(x_0, y_0, z_0)$, de sorte qu'après développement du produit scalaire, l'équation devient

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

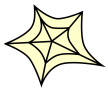
ou $$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

L'équation générale d'un plan dans l'espace est une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

De nouveau, il faut noter que les coefficients de x, y, z fournissent un vecteur normal pour le plan $\mathcal{P}$.

À vous de jouer 1.4.3



Qu'est-ce que les équations suivantes représentent dans $\mathbb{R}^3$?

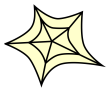
($\square$ Un plan vertical $\square$ Un plan horizontal $\square$ Un plan qui n'est ni vertical, ni horizontal) $6x + 7y = 4$

($\square$ Un plan vertical $\square$ Un plan horizontal $\square$ Un plan qui n'est ni vertical, ni horizontal) $x = -5$

($\square$ Un plan vertical $\square$ Un plan horizontal $\square$ Un plan qui n'est ni vertical, ni horizontal) $y = 7$

($\square$ Un plan vertical $\square$ Un plan horizontal $\square$ Un plan qui n'est ni vertical, ni horizontal) $z = -3$

À vous de jouer 1.4.4



Déterminer l'angle (en radians) formée par les plans $\pi_1 : z - 2x = 1$ et $\pi_2 : 3y + z = 1$.

_____ radians

- Comme cela a été mentionné plus haut, la notion de vecteur directeur pour un plan dans l'espace est délicate. Cependant, si P_0, U, V sont trois points non alignés sur un plan $\mathcal{P}$, alors les vecteurs $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0V}$ et $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0U}$ sont linéairement indépendants, ils engendrent donc un plan. Ainsi, un point X appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe des scalaires s, t tels que

$$\overrightarrow{P_0X} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

ou encore

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}. \qquad (*)$$

Cette équation sera appelée une **équation vectorielle** ou une **équation paramétrique** du plan $\mathcal{P}$.

- L'équation $(*)$ dit que les vecteurs $\overrightarrow{P_0X}, \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ sont linéairement dépendants. Ceci, à nouveau, s'exprime par

$$\det\left(\overrightarrow{P_0X}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\right) = 0.$$

Lorsqu'on développe le déterminant, on obtient l'équation générale du plan.

À vous de jouer 1.4.5



Soit $P\,(0,0,1)$, $Q\,(1,1,1)$ et $R\,(1,-1,1)$. Déterminer

a) L'aire du triangle PQR.

Aire = _____

b) L'équation cartésienne du plan qui contient P, Q et R.

Ce plan est _____

Droites dans l'espace

Tout comme dans le plan, une droite peut être spécifiée dans l'espace au moyen d'un point par lequel elle passe, et d'un vecteur directeur. Le même raisonnement que celui menant à l'équation (††) tient, l'équation vectorielle a la même forme, il faut ajouter une composante aux vecteurs. Ici encore, la relation de parallélisme entre $\mathbf{x} - \mathbf{p}_0$ et $\mathbf{d}$ pourrait s'exprimer en disant que le produit vectoriel est nul. Cependant, si $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, alors l'équation vectorielle (††) se traduit par trois équations scalaires :

$$x - x_0 = t\alpha, \qquad y - y_0 = t\beta, \qquad z - z_0 = t\gamma.$$

Si l'on suppose de plus que les composantes α, β et γ de $\mathbf{d}$ sont non nulles, on **élimine le paramètre** t, c'est-à-dire qu'on isole t en fonction des autres quantités, pour obtenir

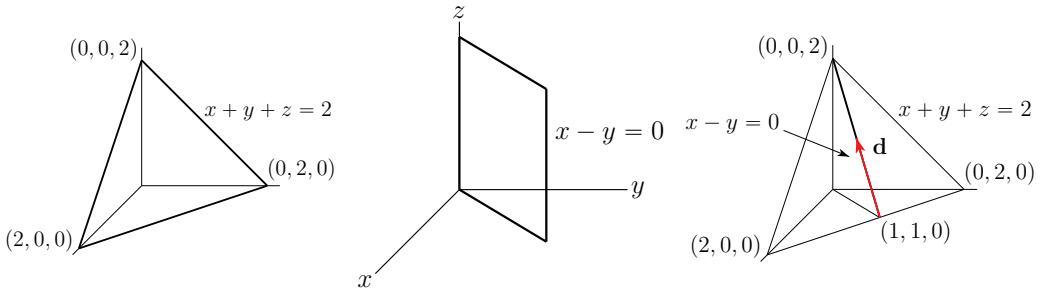
$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

ce qu'il est commun d'appeler les **équations symétriques** de la droite. Voici quelques exemples.

Exemple 1.4.6

L'ensemble des points (x, y, z) vérifiant $x + y + z = 2$ forme un plan, et l'équation $x - y = 0$ définit un second plan. Les points (x, y, z) qui vérifient les deux équations appartiennent donc à l'intersection des deux plans. Les vecteurs normaux, à savoir $\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ et $\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}-\mathbf{j}$, sont non colinéaires, de sorte que les plans ne sont pas parallèles. Leur intersection est donc une droite. Nous allons trouver les équations de cette droite.

Afin d'esquisser $x+y+z = 2$, nous observons que si deux parmi x, y, z sont nuls, alors le troisième doit valoir 2. Ainsi, $(0, 0, 2)$, $(0, 2, 0)$ et $(2, 0, 0)$ appartiennent au plan $x+y+z = 2$. Le plan $x - y = 0$ contient tout l'axe Oz, puisque $(0, 0, z)$ vérifie $x - y = 0$ pour tout z. Voici quelques esquisses montrant partiellement les deux plans, ainsi que leur intersection.



Méthode 1. Chaque point sur la ligne a une valeur distincte de z. Nous allons utiliser z comme paramètre (nous pourrions en faire autant avec x ou y, rien ne nous oblige à utiliser le nom t pour le paramètre, mais c'est ce que nous ferons). Posons donc $t = z$. Si (x, y, z) se trouve sur la droite, alors $z = t$, et

$$\begin{aligned} x + y + t &= 2, \\ x - y \quad &= 0. \end{aligned}$$

La seconde équation force $y = x$. En remplaçant dans la première, on obtient

$$2x + t = 2 \implies x = y = 1 - \tfrac{t}{2},$$

de sorte que l'équation est

$$x = 1 - \frac{t}{2},\ y = 1 - \frac{t}{2},\ z = t \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Méthode 2. Nous commençons par trouver un point sur la droite, disons le point vérifiant $z = 0$ (n'importe quelle valeur fonctionnerait, mais 0 rend les calculs faciles). Si (x, y, z) se trouve sur la droite et que $z = 0$, alors

$$\begin{aligned} x + y &= 2, \\ x - y &= 0. \end{aligned}$$

La seconde équation donne $y = x$. Après substitution dans la première équation, on obtient

$$2x = 2 \implies x = y = 1.$$

Ceci donne que $(1, 1, 0)$ se trouve sur $\mathcal{L}$. Trouvons maintenant un vecteur directeur, $\mathbf{d}$.

- Soit $\mathbf{d}$ un vecteur direction pour $\mathcal{L}$. Étant donné que $\mathcal{L}$ est contenu dans le plan $x+y+z = 2$, le vecteur $\mathbf{d}$ doit être orthogonal au vecteur normal du plan : $x+y+z = 2$, c'est-à-dire $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- De la même façon, $\mathcal{L}$ est contenu dans le plan $x - y = 0$, un vecteur directeur doit être orthogonal au vecteur normal du plan, c'est-à-dire $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Ainsi, on doit choisir un vecteur directeur $\mathbf{d}$ qui est orthogonal à la fois à $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ et à $\mathbf{i}-\mathbf{j}$. Le produit vectoriel fournit un tel vecteur :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 & 1 \\ \mathbf{j} & -1 & 1 \\ \mathbf{k} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nous avons un point sur la droite, ainsi qu'un vecteur directeur, nous pouvons donc donner une équation paramétrique pour $\mathcal{L}$.

$$(x - 1, y - 1, z) = t\,(-1, -1, 2) \qquad \text{ou} \qquad x = 1 - t,\ y = 1 - t,\ z = 2t.$$

Ceci peut avoir l'air différent de notre solution précédente ; nous verrons qu'il s'agit de deux équations vectorielles de la même droite. Avant, explorons une troisième méthode.

Méthode 3. Nous commençons par trouver deux points sur $\mathcal{L}$. Nous savons déjà que $(1, 1, 0)$ se trouve sur notre droite. Nous pouvons penser, à partir de la figure ci-haut, que $(0, 0, 2)$ fait partie de $\mathcal{L}$ aussi. C'est en effet le cas, puisque $(0, 0, 2)$ vérifie les deux équations, $x + y + z = 2$ et $x - y = 0$. Notons que nous aurions pu aussi trouver $(0, 0, 2)$ en imposant $x = 0$ et en résolvant $y+z = x+y+z = 2$, $-y = x-y = 0$ pour z et y. Nous avons donc un vecteur directeur pour la droite : le vecteur déplacement allant de $(0, 0, 2)$ à $(1, 1, 0)$, c'est-à-dire $(1 - 0, 1 - 0, 0 - 2) = (1, 1, -2)$. Puisque $(0, 0, 2) \in \mathcal{L}$ et que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur, nous obtenons l'équation

$$\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad x = t,\ y = t,\ z = 2 - 2t.$$

Ceci est semblable, sans être identique à nos solutions précédentes. Voyons comment tout ceci se tient.

Comparons. Les équations paramétriques obtenues par les trois méthodes sont différentes. Ceci a lieu simplement parce que nous avons utilisé des paramètres différents dans ces trois méthodes, même si nous l'avons toujours nommé t. Pour clarifier la relation entre les trois réponses, dénotons par t_1 le paramètre pour la première méthode, t_2 celui pour la deuxième, et t_3 celui pour la dernière. Les équations paramétriques deviennent donc :

$$\text{Méthode 1 :} \qquad x = 1 - \frac{t_1}{2}, \qquad y = 1 - \frac{t_1}{2}, \qquad z = t_1;$$

Méthode 2 :	$x = 1 - t_2,$	$y = 1 - t_2,$	$z = 2t_2;$
Méthode 3 :	$x = t_3$	$y = t_3$	$z = 2 - 2t_3.$

La substitution $t_1 = 2t_2$ dans la solution de la méthode 1 donne les équations de la méthode 2, et la substitution $t_3 = 1 - t_2$ dans l'équation de la méthode 3 donne l'équation de la méthode 2. Les trois donnent la même droite, mais paramétrée de façon différente.

Mise en garde 1.4.7 Une droite dans $\mathbb{R}^3$ admet une infinité de vecteurs normaux linéairement indépendants.

Par exemple, la droite $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ a comme vecteur directeur $\mathbf{d} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. N'importe quel vecteur orthogonal à $\mathbf{d}$ est orthogonal à la droite. Un vecteur $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ est orthogonal à $\mathbf{d}$ si et seulement si

$$0 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = n_1 + 2n_2 - 2n_3.$$

L'ensemble des vecteurs $\mathbf{n}$ vérifiant cette condition est un plan contenant, entre autres, les vecteurs $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Les deux exemples qui suivent montrent comment calculer la distance d'un point à une droite.

Exemple 1.4.8

Dans cet exemple, on calcule la distance du point $(2, 3, -1)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Le vecteur de $(2, 3, -1)$ à $(1 + t\,,\, 2 + t\,,\, 3 + 2t)$ sur la droite $\mathcal{D}$ est $\begin{bmatrix} t-1 \\ t-1 \\ 2t+4 \end{bmatrix}$. Le carré de la distance entre $(2, 3, -1)$ et le point de coordonnées $(1 + t\,,\, 2 + t\,,\, 3 + 2t)$ appartenant à $\mathcal{D}$ est

$$d(t)^2 = (t-1)^2 + (t-1)^2 + (2t+4)^2.$$

Le point sur $\mathcal{D}$ qui est le plus près de $(2, 3, -1)$ est celui pour lequel la valeur de t vérifie

$$0 = [d(t)^2]' = 2(t-1) + 2(t-1) + 2(2)(2t+4). \qquad (*)$$

Avant de résoudre cette équation pour trouver t, remarquons que l'équation (divisée par 2) donne

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t-1 \\ t-1 \\ 2t+4 \end{bmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que *le vecteur de* $(2, 3, -1)$ *au point de* $\mathcal{D}$ *le plus proche de* $(2, 3, -1)$ *est orthogonal au vecteur directeur de* $\mathcal{D}$.

Reprenons le calcul. L'équation $(*)$ conduit à $12t + 12 = 0$, de sorte que la valeur qui minimise $d(t)^2$ est $t = -1$, et la distance est alors

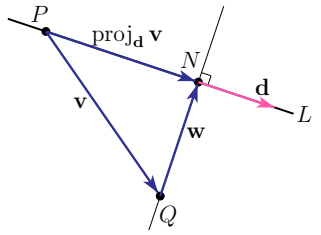
$$d(-1) = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-1)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{12}.$$

Exemple 1.4.9 exemple 1.4.8 revisité.

Dans cet exemple, on présente une autre méthode pour trouver la distance entre le point

$(2,3,-1)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Dans la figure ci-dessous, Q est le point $(2,3,-1)$.

Si l'on mène une perpendiculaire de Q à $\mathcal{D}$, celle-ci coupe $\mathcal{D}$ au point N, qui est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de Q. Ainsi, la distance de Q à $\mathcal{D}$ est exactement la distance de Q à N, c'est-à-dire la norme du vecteur $\overrightarrow{QN}$. Dans la figure ci-contre, $\mathbf{w} = \overrightarrow{QN}$. Comme $\mathbf{w}$ doit être orthogonal au vecteur directeur de $\mathcal{D}$, à savoir $\mathbf{d}$, il doit être orthogonal à $\mathbf{d}$.



Cependant, comme on l'a vu à la mise en garde 1.4.7, il y a une infinité de tels vecteurs pointant dans des directions différentes, tous orthogonaux à $\mathbf{d}$. Ainsi, on pourrait penser qu'il est très difficile de déterminer la direction de $\mathbf{w}$.

Heureusement, ce n'est pas le cas, voici la stratégie.

- Choisissons un point quelconque sur $\mathcal{D}$, disons P.
- Il est aisé de trouver le vecteur $\overrightarrow{PN}$, c'est simplement la projection de $\overrightarrow{PQ}$ (c'est-à-dire $\mathbf{w}$) sur $\mathbf{d}$.
- Une fois que nous connaissons $\text{proj}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{v}$, nous pourrons calculer

$$\mathbf{w} = \text{proj}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{v} - \mathbf{v},$$

- et alors la distance de Q à la droite $\mathcal{D}$ sera simplement $\|\mathbf{w}\|$.

Voici les calculs. On choisit la valeur $t = 0$ pour avoir $P(1,2,3)$, de sorte que $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ est $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ -1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. La projection de $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ sur $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est alors

$$\text{proj}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{v} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-6}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

et alors $\mathbf{w} = \text{proj}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{v} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, et finalement la distance entre Q et la droite $\mathcal{D}$ est $\|\mathbf{w}\| = 2\sqrt{3}$.

À vous de jouer 1.4.10

Soit la droite $\Delta :\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ et le point $P(-4,1,5)$.

Quelle est la distance entre le point P et la droite Δ ? _____.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Deux points déterminent une droite. Vérifions que les équations

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

décrivent la même droite en trouvant deux points différents qui appartiennent aux deux droites.

2. Donnez les équations paramétriques et les équations symétriques pour la droite contenant le point donné et la direction donnée.

(a) point $(1, 2)$, direction $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) point $(5, 4)$, direction $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(c) point $(-1, 3)$, direction $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Donnez les équations paramétriques et les équations symétriques pour la droite contenant le point donné et le vecteur normal donné.

(a) point $(1, 2)$, vecteur normal $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) point $(5, 4)$, vecteur normal $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(c) point $(-1, 3)$, vecteur normal $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. Utiliser la projection pour trouver la distance du point $(-2, 3)$ à la droite d'équation $3x - 4y = -4$.

Pour mieux comprendre.

5. Une droite dans $\mathbb{R}^2$ a pour direction $\mathbf{d}$ et passe par le point de vecteur position $\mathbf{c}$.
Laquelle des deux équations suivantes donne l'équation paramétrique de la droite : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{c} + t\mathbf{d}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{c} - t\mathbf{d}$?

6. Une droite dans $\mathbb{R}^2$ a pour direction $\mathbf{d}$ et passe par le point de vecteur position $\mathbf{c}$.
Laquelle des deux équations suivantes donne l'équation paramétrique de la droite : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{c} + t\mathbf{d}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\mathbf{c} + t\mathbf{d}$?

7. Une droite dans $\mathbb{R}^2$ admet les équations paramétriques

$$\begin{aligned} x - 3 &= 9t \\ y - 5 &= 7t \end{aligned}$$

Il existe de nombreuses façons d'écrire les équations paramétriques de cette droite. Si nous réécrivons les équations sous la forme

$$\begin{aligned} x - x_0 &= d_x t \\ y - y_0 &= d_y t \end{aligned}$$

quelles sont toutes les valeurs possibles de (x_0, y_0) et de $\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$?

Pour aller plus loin.

8. Soit **a**, **b** et **c** les sommets d'un triangle. Par définition, une médiane du triangle est une ligne droite passant par un sommet du triangle et le point milieu du côté opposé.

(a) Trouver les équations paramétriques des trois médianes.

(b) Est-ce que les médianes s'intersectent en un point commun ? Si oui, en quel point ?

9. Soit C le cercle de rayon 1 centré en $(2, 1)$. Trouver une équation pour la droite tangente à C au point $\left(\frac{5}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. Considérez le plan $\mathcal{W}$ d'équation $-x + 3y + 3z = 6$. Trouver l'aire du parallélogramme de $\mathcal{W}$ défini par $0 \leqslant x \leqslant 3$ et $0 \leqslant y \leqslant 2$.

1.5 Courbes paramétriques et leurs tangentes

Dans cette section et celle qui suit nous étudions les courbes paramétriques, c'est-à-dire les courbes qui sont données par des fonctions à valeurs vectorielles d'une variable réelle. Nous allons aussi étudier les tangentes à ces courbes, et les notions de vitesse et d'accélération associées à un chemin.

Courbes et chemins

À la section 1.4 nous avons étudié les droites au moyen de leurs équations paramétriques. En effet, étant donné $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{d}$ fixes, on a considéré l'équation de la droite passant par $\mathbf{p}_0$ dans la direction de $\mathbf{d}$. On peut considérer l'expression

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{d}$$

comme étant une fonction qui, au paramètre t, associe un vecteur.

Définition 1.5.1

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Un **chemin** dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \mathbf{r}(t) \end{aligned}$$

On appelle ceci une **fonction vectorielle** également.

Bien entendu, les cas les plus intéressants pour nous seront :

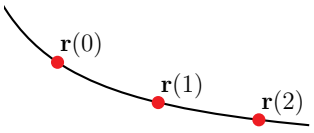
- $n = 2$ et, dans ce cas, nous écrirons $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$;
- $n = 3$ et, dans ce cas, nous écrirons $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$.

Il est très utile de penser qu'un chemin donne en effet la position d'un mobile, $\mathbf{r}(t)$ à l'instant t. Cette interprétation n'est pas strictement nécessaire, mais elle aide beaucoup à la compréhension des concepts.

Étant donné un chemin $\mathbf{r}$, son image, que l'on notera $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ ou $\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{C}_\mathbf{r} = \{\mathbf{r}(t) | t \in I\},$$

décrit une **courbe** dans $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, on dira que le chemin $\mathbf{r}$ est un **paramétrage** de la courbe.



Exemple 1.5.2 Plusieurs paramétrages d'une droite.

Nous avons vu à la section 1.4 qu'une droite $\mathcal{D}$ passant par le point de vecteur position $\mathbf{p}_0$ et de vecteur directeur $\mathbf{d}$ admet le paramétrage

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{d}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Le chemin

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{p}_0 + t^3\,\mathbf{d}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

a lui aussi $\mathcal{D}$ pour image, puisque t^3 prend toutes les valeurs réelles lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

Interprétons ces chemins comme la position d'un mobile :

- avec $\mathbf{r}_1$, le mobile parcourt la droite à vitesse constante, toujours dans le même sens ;
- avec $\mathbf{r}_2$, il parcourt aussi la droite une seule fois et dans le même sens, mais il ralentit à l'approche du point $\mathbf{p}_0$, s'y arrête un instant (en $t = 0$), puis repart.

Si $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont les vecteurs position de deux points P et Q, le chemin

$$\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{p} + t\,(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

va de P à Q en parcourant le segment PQ une seule fois, à vitesse constante.

L'exemple précédent montre qu'une même courbe peut admettre plusieurs paramétrages différents, ce qui soulève des questions délicates. Un chemin peut notamment repasser plusieurs fois par une même portion de la courbe, ou encore s'arrêter et rebrousser chemin, ou avoir un changement abrupt de direction. Pour mesurer la longueur d'une courbe (section 1.6), et plus tard pour intégrer le long d'une courbe, il faudra écarter ces comportements. Le premier est exclu par la définition qui suit ; les deux autres le seront à l'aide de la dérivée (définition 1.5.20).

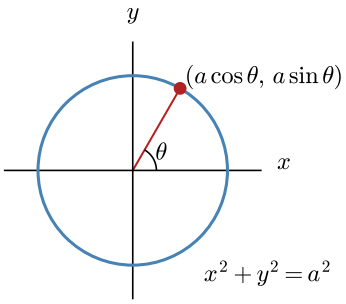
Définition 1.5.3

Un chemin $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est dit **simple** si c'est une fonction injective sur $[a, b[$, c'est-à-dire si à deux valeurs distinctes $a \leqslant t_1 < t_2 < b$ correspondent deux valeurs différentes $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$.

Pour l'instant, voyons quelques exemples.

Exemple 1.5.4 Paramétrage du cercle $x^2 + y^2 = a^2$.

S'il est vrai qu'on utilise souvent t comme paramètre, il n'y a aucune raison d'utiliser la lettre t et de penser que le paramètre est le temps. Par exemple, considérons le cercle $x^2 + y^2 = a^2$. Il est naturel d'utiliser l'angle θ de la figure ci-contre comme paramètre.



Ceci donne $\mathbf{r}(\theta) = a\cos\theta\mathbf{i} + a\sin\theta\mathbf{j}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Il s'agit d'un paramétrage du cercle $x^2 + y^2 = a^2$. En effet, ici, nous avons $x(\theta) = a\cos\theta$, $y(\theta) = a\sin\theta$, de sorte que

$$x(\theta)^2 + y(\theta)^2 = (a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 = a^2.$$

Ceci montre que la courbe associée à notre fonction $\mathbf{r}$ est contenue dans le cercle. De simples considérations géométriques montrent que lorsque θ parcourt $[0, 2\pi]$, $\mathbf{r}(\theta)$ parcourt le cercle au complet.

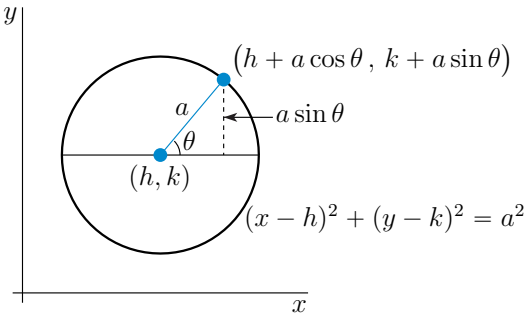
Il faut faire preuve de prudence : savoir que $\mathbf{r}(t)$ fait partie d'une courbe ne garantit pas que, à mesure que t parcourt le domaine de $\mathbf{r}$, le vecteur $\mathbf{r}(t)$ parcourt la courbe en entier. Par exemple, si t parcourt $\mathbb{R}$, $\frac{2}{\pi}\arctan(t)$ parcourt l'intervalle $]-1, 1[$. De l'équation $x^2 + y^2 = a^2$, on tire $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$. Ainsi, pour tout t,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = a\frac{2}{\pi}\arctan(t)\mathbf{i} + a\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}\arctan^2(t)}\mathbf{j}$$

est correctement défini et satisfait $x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$. Mais ce chemin n'est pas un paramétrage du cercle, puisque $y(t) \geqslant 0$.

Exemple 1.5.5 Paramétrage de $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$.

On peut modifier le paramétrage de l'exemple 1.5.4 pour obtenir celui du cercle de rayon a centré à (h, k). Une façon de procéder est de refaire l'esquisse de l'exemple 1.5.4 avec le cercle translaté de sorte à avoir son centre à la bonne position. Cette translation s'obtient en additionnant le vecteur $h\mathbf{i} + k\mathbf{j}$.



Ainsi, $\mathbf{r}(\theta) = (h + a\cos\theta)\,\mathbf{i} + (k + a\sin\theta)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, est un paramétrage du cercle $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$.

Une seconde façon de procéder est de remarquer que l'on peut transformer l'identité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ pour qu'elle devienne l'équation du cercle $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$, en

- multipliant l'identité par a^2 pour obtenir $(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2$, et ensuite
- en posant $a\cos t = x - h$ et $a\sin t = y - k$, ce qui transforme $(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2$ en $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$.

Exemple 1.5.6 Paramétrage de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et de $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

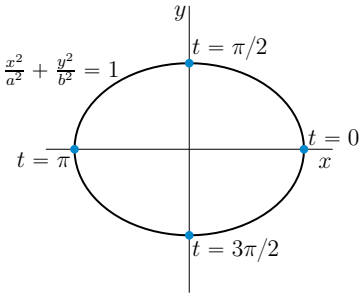
On peut obtenir des paramétrages des courbes $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ en partant de l'identité $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, comme on l'a fait dans la seconde partie de l'exemple précédent.

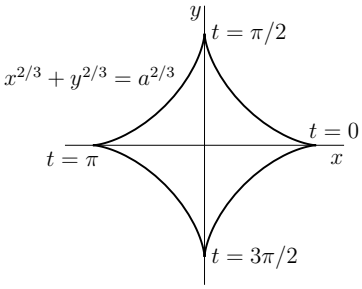
- Si l'on pose $\cos t=\frac{x}{a}$ et $\sin t=\frac{y}{b}$, alors l'égalité $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ devient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- Si l'on pose $\cos t=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$, et $\sin t=\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$, alors l'égalité $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ devient $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}=1$.

Ainsi,

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\,\mathbf{i}+(b\sin t)\,\mathbf{j}, \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$
$$\mathbf{r}(t)=(a\cos^3 t)\,\mathbf{i}+(a\sin^3 t)\,\mathbf{j} \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

sont des paramétrages des courbes $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Afin de voir que, si t parcourt $[0,2\pi]$, alors $\mathbf{r}(t)$ parcourt la courbe au complet, considérons les figures ci-bas.





La courbe $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ est appelée une **astroïde**. Son équation suggère qu'elle devrait ressembler à un cercle, mais ce n'est pas évident qu'elle admette les coins. Nous aborderons ces aspects plus tard.

Exemple 1.5.7 Paramétrage de $e^y=1+x^2$.

Une méthode simple qui peut être utilisée pour paramétrer une courbe donnée par une équation de la forme $f(x,y)=0$ consiste à utiliser x ou y comme paramètre et à isoler pour l'autre variable. Dans cet exemple, puisqu'on peut résoudre $e^y=1+x^2$ pour avoir y comme fonction de x, en prenant les logarithmes des deux côtés, on obtient $y=\ln\left(1+x^2\right)$, on utilise x comme paramètre en posant $t=x$. Ceci donne le paramétrage

$$\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+\ln(1+t^2)\,\mathbf{j} \qquad -\infty<t<\infty.$$

Exemple 1.5.8 Nouveau paramétrage de $x^2+y^2=a^2$.

Il est aussi fréquent qu'on puisse utiliser x ou y pour paramétrer une partie d'une courbe, mais pas toute la courbe. Un exemple simple est fourni par le cercle $x^2+y^2=a^2$. Pour chaque $-a<x<a$, il existe deux points sur le cercle dont l'abscisse est x. Ainsi, on ne peut pas utiliser x pour paramétrer le cercle au complet. La situation avec y est la même. Cependant,

$$\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+\sqrt{a^2-t^2}\,\mathbf{j}, \qquad -a<t<a$$

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - \sqrt{a^2 - t^2}\,\mathbf{j} \qquad -a < t < a$$

sont des paramétrages de la moitié supérieure et de la moitié inférieure[a] du cercle, respectivement. Elles utilisent toutes les deux x comme paramètre, et

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{a^2 - t^2}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, \qquad -a < t < a$$
$$\mathbf{r}(t) = -\sqrt{a^2 - t^2}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} \qquad -a < t < a$$

sont des paramétrages de la moitié droite et la moitié gauche du cercle respectivement. Cette fois, on utilise y comme paramètre.

Les courbes apparaissent souvent comme intersections de deux surfaces. Par exemple, l'intersection de l'ellipsoïde $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3} = 1$ avec le paraboloïde d'équation $z = x^2 + 2y^2$ est la courbe montrée dans la figure 1.5.9. Nous verrons à l'exemple 1.5.12 comment en obtenir un paramétrage.

Une façon de paramétrer de telles courbes est de choisir une des trois coordonnées x, y, z comme paramètre et de résoudre les équations donnant les surfaces pour les deux autres coordonnées en termes du paramètre. Voyons deux exemples.

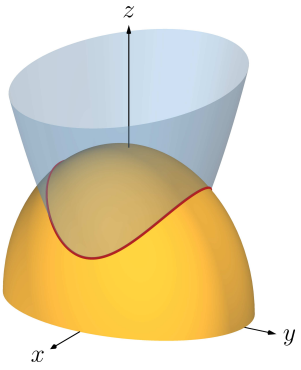


Figure 1.5.9 L'intersection de deux surfaces

Exemple 1.5.10

L'ensemble des points (x, y, z) vérifiant

$$\begin{aligned} x^3 - e^{3y} &= 0, \\ x^2 - e^y + z &= 0 \end{aligned}$$

est une courbe. On choisit d'utiliser y comme paramètre et l'on considère

$$\begin{aligned} x^3 &= e^{3y}, \\ x^2 + z &= e^y \end{aligned}$$

comme un système de deux équations dont les inconnues sont x et z, en traitant y comme une constante.

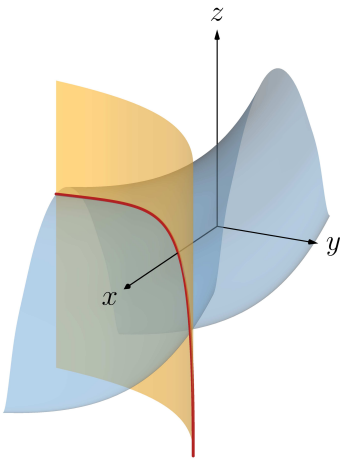


Figure 1.5.11 Courbe paramétrée par $\mathbf{r}(y) = e^y\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (e^y - e^{2y})\,\mathbf{k}$

On résout la première équation pour x, puis l'on remplace dans la seconde équation et l'on résout pour z.

$$\begin{aligned} x^3 &= e^{3y} \implies x = e^y \\ x^2 + z &= e^y \qquad\qquad \implies e^{2y} + z = e^y \implies z = e^y - e^{2y} \end{aligned}$$

[a] En réalité, les deux points $(-a, 0)$ et $(a, 0)$ manquent, dans les deux cas.

Ainsi,

$$\mathbf{r}(y) = e^y\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (e^y - e^{2y})\,\mathbf{k}$$

est un paramétrage de la courbe.

L'exemple précédent était truqué de sorte que les équations étaient faciles à résoudre pour trouver x et z en fonction de y. Dans la pratique, ce n'est pas toujours facile, il peut même être impossible de le faire. Voyons un exemple un peu plus réaliste.

Exemple 1.5.12

Considérons l'ensemble des (x, y, z) vérifiant

$$x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1,$$
$$x^2 + 2y^2 = z,$$

qui est la courbe rouge de la figure 1.5.9. On remplace $x^2 = z - 2y^2$ (de la seconde équation) dans la première, ce qui donne

$$-\frac{3}{2}y^2 + z + \frac{z^2}{3} = 1.$$

Après complétion des carrés (pour z), ceci équivaut à

$$-\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{3}\Big(z + \frac{3}{2}\Big)^2 = \frac{7}{4}.$$

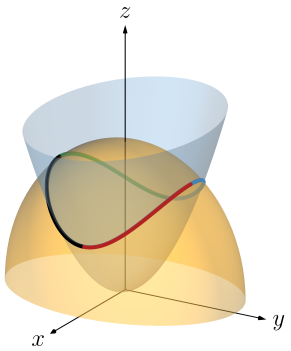


Figure 1.5.13 Quatre portions de la courbe données par les différents signes de x et y

Si, par exemple, on s'intéresse aux points (x, y, z) sur la courbe qui vérifient en plus $y \geqslant 0$, on peut résoudre pour avoir y en fonction de z.

$$y = \sqrt{\frac{2}{9}\Big(z + \frac{3}{2}\Big)^2 - \frac{14}{12}}$$

Alors, $x^2 = z - 2y^2$ donne aussi x en fonction de z. Si $x \geqslant 0$,

$$x = \sqrt{z - \frac{4}{9}\Big(z + \frac{3}{2}\Big)^2 + \frac{14}{6}} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4}{9}z^2 - \frac{1}{3}z}.$$

Les autres signes de x et y peuvent être obtenus avec les signes adéquats devant les racines carrées. Dans notre exemple, (x, y, z) se trouve sur la courbe, c'est-à-dire qu'il vérifie les équations originelles, si et seulement si $(\pm x, \pm y, z)$ appartiennent à la courbe.

Exemple 1.5.14

Trouver un paramétrage de la courbe intersection du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et du plan $z = 1 + y$.

- Pour commencer, on peut élever au carré z de l'équation du plan et remplacer dans celle du cône, ce qui mène à

$$(1+y)^2 = x^2 + y^2$$
$$\implies 1 + 2y = x^2.$$

De là, on tire $x = \pm\sqrt{1+2y}$. Comme $z = 1 + y$, on choisit $y = t$ comme paramètre pour obtenir

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{1+2t}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1+t)\,\mathbf{k},$$

avec $t \geqslant -\frac{1}{2}$.

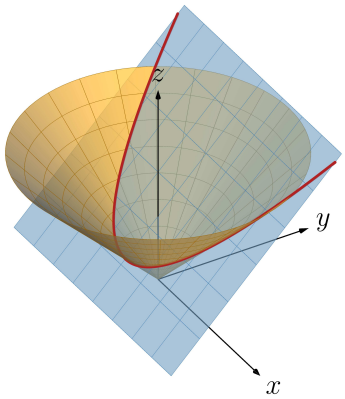


Figure 1.5.15 Le plan $z = 1 + y$ et le cône $z^2 = x^2 + y^2$

Il faut noter qu'on a en réalité deux paramétrages, selon le signe choisi pour la racine carrée dans l'expression de x. Chacun des deux paramétrages présente une moitié de la courbe (il s'agit en fait d'une parabole).

- On peut choisir d'utiliser $x = s$ comme paramètre. De notre équation $1 + 2y = x^2$, on tire $y = \frac{1}{2}(s^2 - 1)$, et l'équation du plan fournit $z = \frac{1}{2}(s^2 + 1)$. On a donc un autre paramétrage :

$$\mathbf{r}(s) = s\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(s^2-1)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(s^2+1)\,\mathbf{k} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

À vous de jouer 1.5.16

Trouvez une paramétrisation de la courbe formée par l'intersection du paraboloïde $z = 3x^2 + 3y^2$ et le cylindre $y = 3x^2$. Utilisez la variable t pour paramètre.

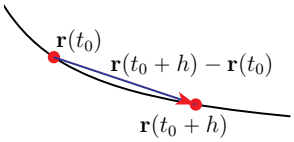
$\mathbf{r}(t) = \langle t, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ \rangle$

Tangentes aux courbes paramétriques

Définition 1.5.17

Soit $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction à valeurs vectorielles, avec $I \subseteq \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ un point intérieur de I (c'est-à-dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subseteq I$). La **dérivée de r en** t_0 est

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0+h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}$$



lorsque la limite existe. En particulier, si $\mathbf{r}(t_0) = x(t_0)\,\mathbf{i} + y(t_0)\,\mathbf{j} + z(t_0)\,\mathbf{k}$, alors

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\mathbf{i} + y'(t_0)\,\mathbf{j} + z'(t_0)\,\mathbf{k}.$$

En somme, pour dériver une fonction vectorielle, on doit simplement dériver chacune de ses composantes.

On pense souvent à $\mathbf{r}(t)$ comme à la position d'une particule au temps t. Dans ce contexte, on aura que $\mathbf{r}'(t)$ est le **vecteur vitesse instantané** au temps t et l'on écrira souvent $\mathbf{v}(t)$ au lieu de $\mathbf{r}'(t)$, voire $\mathbf{v}$ au lieu de $\mathbf{r}'$.

Bien entendu, la dérivation interagit avec les opérations arithmétiques usuelles de façon évidente. Seuls le produit scalaire et le produit vectoriel demandent une attention particulière. Voyons quelques exemples.

Exemple 1.5.18

Soit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{a}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + t^6\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b}(t) = e^{-t}\,\mathbf{i} + e^{-3t}\,\mathbf{j} + e^{-5t}\,\mathbf{k},$$
$$\gamma(t) = t^2, \qquad s(t) = \sin t.$$

Nous allons calculer plusieurs dérivées, utilisons donc un peu de couleur pour rendre les calculs plus lisibles. Lorsque nous ferons appel à la règle de différentiation du produit, à savoir

$$\frac{d}{dt}\big[f(t)\,g(t)\big] = f'(t)\,g(t) + f(t)\,g'(t),$$

nous utiliserons la couleur bleue pour mettre en évidence les facteurs $f'(t)$ et $g'(t)$.

$$\gamma(t)\,\mathbf{b}(t) = t^2e^{-t}\,\mathbf{i} + t^2e^{-3t}\,\mathbf{j} + t^2e^{-5t}\,\mathbf{k}$$

donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big[\gamma(t)\mathbf{b}(t)\big] &= \big[2te^{-t} - t^2e^{-t}\big]\mathbf{i} + \big[2te^{-3t} - 3t^2e^{-3t}\big]\mathbf{j} + \big[2te^{-5t} - 5t^2e^{-5t}\big]\mathbf{k}\\ &= 2t\big\{e^{-t}\,\mathbf{i} + e^{-3t}\,\mathbf{j} + e^{-5t}\,\mathbf{k}\big\} + t^2\big\{-e^{-t}\,\mathbf{i} - 3e^{-3t}\,\mathbf{j} - 5e^{-5t}\,\mathbf{k}\big\}\\ &= \gamma'(t)\mathbf{b}(t) + \gamma(t)\mathbf{b}'(t),\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t) = t^2e^{-t} + t^4e^{-3t} + t^6e^{-5t}$$

donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big[\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)\big] &= \big[2te^{-t} - t^2e^{-t}\big] + \big[4t^3e^{-3t} - 3t^4e^{-3t}\big] + \big[6t^5e^{-5t} - 5t^6e^{-5t}\big]\\ &= \big[2te^{-t} + 4t^3e^{-3t} + 6t^5e^{-5t}\big] + \big[-t^2e^{-t} - 3t^4e^{-3t} - 5t^6e^{-5t}\big]\\ &= \big\{2t\,\mathbf{i} + 4t^3\,\mathbf{j} + 6t^5\,\mathbf{k}\big\}\cdot\big\{e^{-t}\,\mathbf{i} + e^{-3t}\,\mathbf{j} + e^{-5t}\,\mathbf{k}\big\}\\ &\qquad + \big\{t^2\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + t^6\,\mathbf{k}\big\}\cdot\big\{-e^{-t}\,\mathbf{i} - 3e^{-3t}\,\mathbf{j} - 5e^{-5t}\,\mathbf{k}\big\}\\ &= \mathbf{a}'(t)\cdot\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}'(t),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t) &= \det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & t^2 & e^{-t}\\ \mathbf{j} & t^4 & e^{-3t}\\ \mathbf{k} & t^6 & e^{-5t}\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{i}\left(t^4e^{-5t} - t^6e^{-3t}\right) - \mathbf{j}(t^2e^{-5t} - t^6e^{-t}) + \mathbf{k}(t^2e^{-3t} - t^4e^{-t})\end{aligned}$$

donne

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big[\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)\big]\\ &= \mathbf{i}\left(\,4t^3e^{-5t} \;-\; 6t^5e^{-3t}\right) \;-\; \mathbf{j}(\,2te^{-5t} \;-\; 6t^5e^{-t}) + \mathbf{k}(\,2te^{-3t} \;-\; 4t^3e^{-t})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbf{i}\left(-5t^4e^{-5t}+3t^6e^{-3t}\right)-\mathbf{j}(-5t^2e^{-5t}+t^6e^{-t})+\mathbf{k}(-3t^2e^{-3t}+t^4e^{-t})\\
&=\left\{2t\,\mathbf{i}+4t^3\,\mathbf{j}+6t^5\,\mathbf{k}\right\}\times\left\{e^{-t}\,\mathbf{i}+e^{-3t}\,\mathbf{j}+e^{-5t}\,\mathbf{k}\right\}\\
&\qquad+\left\{t^2\,\mathbf{i}+t^4\,\mathbf{j}+t^6\,\mathbf{k}\right\}\times\left\{-e^{-t}\,\mathbf{i}-3e^{-3t}\,\mathbf{j}-5e^{-5t}\,\mathbf{k}\right\}\\
&=\mathbf{a}'(t)\times\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}'(t)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\left(s(t)\right)&=(\sin t)^2\,\mathbf{i}+(\sin t)^4\,\mathbf{j}+(\sin t)^6\,\mathbf{k}\\
\Longrightarrow\ \frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}\left(s(t)\right)\right]&=2(\sin t)\cos t\,\mathbf{i}+4(\sin t)^3\cos t\,\mathbf{j}+6(\sin t)^5\cos t\,\mathbf{k}\\
&=\left\{2(\sin t)\,\mathbf{i}+4(\sin t)^3\mathbf{j}+6(\sin t)^5\mathbf{k}\right\}\cos t\\
&=\mathbf{a}'\left(s(t)\right)\,s'(t).
\end{aligned}
$$

Bien entendu, ces exemples sont des cas particuliers de règles générales. Le même type de calculs que précédemment fournit la preuve (de la plupart) du théorème ci-bas.

Théorème 1.5.19 Propriétés de la dérivation.

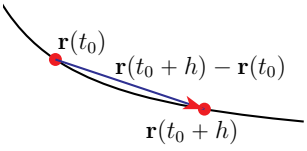
Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle,

- $\mathbf{a},\ \mathbf{b}:I\to\mathbb{R}^n$ *des fonctions dérivables,*
- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *des constantes,*
- $\gamma:I\to\mathbb{R}$ *et* $s:J\to I$ *(avec $J\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle)*[a] *dérivables.*

Alors,

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad \frac{d}{dt}\left[\alpha\,\mathbf{a}(t)+\beta\,\mathbf{b}(t)\right]=\alpha\,\mathbf{a}'(t)+\beta\,\mathbf{b}'(t); && \textit{(linéarité)}\\
&(b)\quad \frac{d}{dt}\left[\gamma(t)\mathbf{b}(t)\right]=\gamma'(t)\mathbf{b}(t)+\gamma(t)\mathbf{b}'(t); && \textit{(mult. par scalaire)}\\
&(c)\quad \frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)\right]=\mathbf{a}'(t)\cdot\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}'(t); && \textit{(produit scalaire)}\\
&(d)\quad \frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)\right]=\mathbf{a}'(t)\times\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}'(t); && \textit{(produit vectoriel)}\\
&(e)\quad \frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}\left(s(t)\right)\right]=\mathbf{a}'\left(s(t)\right)\,s'(t). && \textit{(composition)}
\end{aligned}
$$

L'interprétation géométrique est claire. La dérivée $\mathbf{r}'(t_0)$ est la limite de $\frac{\mathbf{r}(t_0+h)-\mathbf{r}(t_0)}{h}$ lorsque $h\to 0$. Le numérateur, $\mathbf{r}(t_0+h)-\mathbf{r}(t_0)$, est représenté par le vecteur ayant $\mathbf{r}(t_0+h)$ pour but et $\mathbf{r}(t_0)$ comme origine.



Lorsque h est très petit, ce vecteur a la direction du vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ au point $\mathbf{r}(t_0)$. À la limite, ce vecteur donne la direction de cette tangente, pourvu qu'il ne soit pas nul. Comme, de plus, la tangente passe par le point $\mathbf{r}(t_0)$, on en déduit aisément un paramétrage de celle-ci.

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{r}(t_0)+t\,\mathbf{r}'(t_0) \qquad (*)$$

Il faut noter ici que $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont évaluées au point $t=t_0$, ce sont donc des vecteurs constants.

[a] De sorte que la composition $\mathbf{a}(s(t))$ a un sens.

Si l'on pense encore à un mobile, le chemin $\mathbf{x}$ a cependant son propre chronomètre : il passe par le point $\mathbf{r}(t_0)$ au temps $t = 0$, alors que le mobile décrit par $\mathbf{r}$ y passe au temps $t = t_0$. Par ailleurs, la droite tangente admet bien d'autres paramétrages, par exemple $\mathbf{r}(t_0) - t\,\mathbf{r}'(t_0)$ ou $\mathbf{r}(t_0) + 2t\,\mathbf{r}'(t_0)$. Lequel choisir ? Il est naturel de retenir celui qui « accompagne » $\mathbf{r}$ au voisinage de t_0, c'est-à-dire qui passe par $\mathbf{r}(t_0)$ au même instant t_0, avec la même vitesse $\mathbf{r}'(t_0)$. C'est ce que fait la définition suivante.

Définition 1.5.20

Soit $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ un chemin et t_0 un point intérieur de I où $\mathbf{r}$ est dérivable.

(a) L'**approximation linéaire** de $\mathbf{r}$ en t_0 est le chemin

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t_0) + (t - t_0)\,\mathbf{r}'(t_0).$$

(b) On dit que $\mathbf{r}$ est **régulier** en t_0 si $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Dans ce cas, l'image de $\mathbf{L}$ est une droite, appelée **droite tangente** à la courbe $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ au point $\mathbf{r}(t_0)$.

(c) On dit que $\mathbf{r}$ est **lisse** si sa dérivée $\mathbf{r}'$ est continue et que $\mathbf{r}$ est régulier en tout point intérieur de I.

Exemple 1.5.21

Soit le chemin $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}$ et $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ la courbe correspondante. Trouver une équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ au point correspondant $(1, 1, 1)$.

Solution. Le point $(1, 1, 1)$ correspond à $t = 0$. Par ailleurs,

$$\mathbf{r}'(t) = -e^{-t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} - \sin t\,\mathbf{k}.$$

de sorte que $\mathbf{r}'(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. L'approximation linéaire de $\mathbf{r}$ en $t_0 = 0$ est donc

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(0) + t\,\mathbf{r}'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et son image est la droite tangente cherchée.



À vous de jouer 1.5.22

Soit le chemin

$$\mathbf{r}(t) = \big(t^3 - 1\big)\,\mathbf{i} + \big(t^5 + 1\big)\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}.$$

Trouver l'approximation linéaire $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t_0) + (t - t_0)\,\mathbf{r}'(t_0)$ de $\mathbf{r}$ au point $(26, 244, 81)$, c'est-à-dire en $t_0 = 3$. Son image est la droite tangente à la courbe en ce point. Entrer les composantes de $\mathbf{L}(t)$ en fonction de t.

$L_1(t) =$_____,
$L_2(t) =$_____,
$L_3(t) =$_____

Définition 1.5.23

Soit $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ un chemin régulier en un point intérieur t_0 de I. Le vecteur **tangent unitaire** en $\mathbf{r}(t_0)$ est $\mathbf{T}(t_0) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t_0)\|}\mathbf{r}'(t_0)$.

Exemple 1.5.24 L'astroïde (en détail).

Nous avons vu, à l'exemple 1.5.6, un paramétrage de l'astroïde d'équation[a] $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Nous avons un paramétrage

$$\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\sin^3 t\,\mathbf{j}.$$

Afin d'utiliser le théorème 1.6.1, calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\sin^3 t\,\mathbf{j},\\
\mathbf{r}'(t) &= -3a\sin t\cos^2 t\,\mathbf{i} + 3a\sin^2 t\cos t\,\mathbf{j},\\
\frac{ds}{dt}(t) &= \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^4 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\\
&= 3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\\
&= 3a\big|\sin t\cos t\big|,\\
\mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\sin t\cos t}{|\sin t\cos t|}\ (-\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j})\\
&= \operatorname{sgn}(\sin t\cos t)\ (-\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}).
\end{aligned}$$

Ici, $\operatorname{sgn}(\sin t\cos t)$ dénote « le signe de $\sin t\cos t$ », c'est-à-dire $+1$ lorsque $\sin t\cos t > 0$ et -1 lorsque $\sin t\cos t < 0$. Ainsi,

$$\mathbf{T}(t) = \begin{cases} -\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} & \text{si } 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < t < \frac{3\pi}{2} \\ \cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} & \text{si } \frac{\pi}{2} < t < \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi \end{cases}.$$

Avant de faire une esquisse, faisons quelques remarques qui vont nous simplifier la tâche. Pour commencer, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$, de sorte qu'il s'agit d'une courbe fermée. Puis,

- Les signes des composantes de $\mathbf{r}(t)$ sont les signes des composantes de $\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, ce qui nous donne une idée du quadrant dans lequel $\mathbf{r}(t)$ se trouve, et les signes des composantes de $\mathbf{r}'(t)$ sont les signes des composantes de $-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$, ce qui nous donne une idée de comment les composantes varient. Ainsi, l'astroïde est une courbe fermée et, en plus,
  - lorsque $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{r}(t)$ se trouve dans le premier quadrant et se déplace vers le haut et la gauche lorsque t croît ;
  - lorsque $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$, $\mathbf{r}(t)$ se trouve dans le deuxième quadrant et se déplace vers le bas et la gauche lorsque t croît ;
  - lorsque $\pi \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $\mathbf{r}(t)$ se trouve au troisième quadrant et se déplace vers le bas et la droite lorsque t croît ; et
  - lorsque $\frac{3\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi$, $\mathbf{r}(t)$ se trouve dans le quatrième quadrant et se déplace vers le haut et la droite lorsque t croît.
  - Ainsi, la courbe fait le tour de l'origine exactement une fois lorsque t varie de 0 à 2π.
- Quelque chose de particulier arrive lorsque $\sin t\cos t$ s'annule en changeant de signe, c'est-à-dire lorsque $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, etc. En effet, $\mathbf{T}(t)$ change de direction abruptement. Plus précisément,

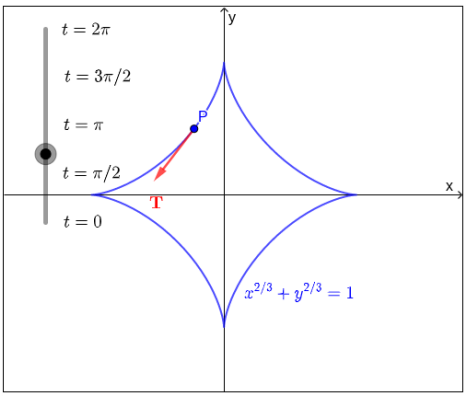
$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0-} \mathbf{T}(t) &= \lim_{t\to 0-} \operatorname{sgn}(\sin t\cos t)\\
&= \lim_{t\to 0-} (-\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) = \mathbf{i},
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0+} \mathbf{T}(t) = \lim_{t\to 0+} \operatorname{sgn}(\sin t \cos t)$$
$$= \lim_{t\to 0+} (-\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) = -\mathbf{i}$$

et

$$\lim_{t\to \pi/2-} \mathbf{T}(t) = \lim_{t\to \pi/2-} \operatorname{sgn}(\sin t \cos t)$$
$$= \lim_{t\to \pi/2-} (-\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) = \mathbf{j},$$
$$\lim_{t\to \pi/2+} \mathbf{T}(t) = \lim_{t\to \pi/2+} \operatorname{sgn}(\sin t \cos t)$$
$$= \lim_{t\to \pi/2+} (-\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) = -\mathbf{j},$$

et ainsi de suite. Ceci trahit la présence de *points de rebroussement* dans la courbe pour $t = 0$, c'est-à-dire à $\mathbf{r}(0) = a\mathbf{i}$ et à $t = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = a\mathbf{j}$, et ainsi de suite. En somme, s'il est vrai que l'astroïde ressemble à un cercle, elle possède des points de rebroussement à $\pm a\mathbf{i}$ et à $\pm a\mathbf{j}$. Voici une figure.



[standalone]
Contexte
[embed]

Figure 1.5.25 L'astroïde

Observation 1.5.26

- Nous allons souvent écrire $\mathbf{r}'$ ou $\mathbf{T}$ afin d'alléger les notations. Nous devrons avoir à l'esprit qu'il s'agit de fonctions vectorielles, donc qu'il y a un point d'évaluation qui devra être déduit du contexte.
- L'approximation linéaire $\mathbf{L}$ coïncide avec **r jusqu'au premier ordre**, c'est-à-dire $\mathbf{L}(t_0) = \mathbf{r}(t_0)$ et $\mathbf{L}'(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)$. On remarquera la ressemblance de la définition de $\mathbf{L}$ avec la formule donnant l'approximation linéaire d'une fonction f en un point t_0, à savoir
$$f(t) \approx L(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0).$$

Exemple 1.5.27 $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$.

Nous avons vu dans l'exemple précédent que l'astroïde a des points de rebroussement lorsque $\mathbf{r}'(t)$ s'annule. Cet exemple montre qu'il peut pratiquement tout arriver lorsque $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$.

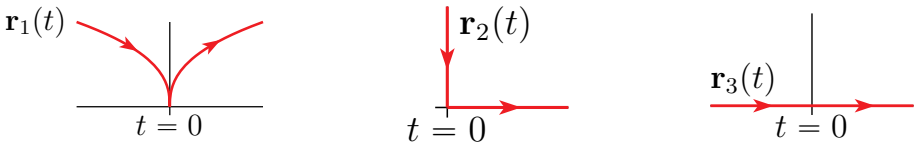
[a] Ne pas confondre *astroïde* et *astéroïde*, bien que les deux mots aient comme origine commune le mot grec pour *étoile*.

Supposons que nous nous promenons, et la position au temps t est donnée par $\mathbf{r}(t)$. Si, à un instant donné, la vitesse est non nulle, il est difficile de changer de direction de déplacement de façon discontinue[a]. D'autre part, lorsque $\mathbf{r}'(t) = 0$, on ne bouge pas, et il est facile d'effectuer un changement de direction. On peut par exemple *rebrousser chemin*, faire un virage brusque ou ne pas changer de direction du tout. Voici quelques exemples. Dans tous les cas, on a $\mathbf{r}'(0) = 0$.

$$\mathbf{r}_1(t) = t^5\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{r}_1'(t) = 5t^4\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{cases} t^2\,\mathbf{i} & \text{si } t \geqslant 0 \\ t^2\,\mathbf{j} & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases} \qquad \mathbf{r}_2'(t) = \begin{cases} 2t\,\mathbf{i} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 2t\mathbf{j} & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{r}_3(t) = t^3\,\mathbf{i} \qquad \mathbf{r}_3'(t) = 3t^2\,\mathbf{i}$$



Exemple 1.5.28

(a) Soit $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. La courbe associée a pour équation cartésienne $x^2 = y^3$.

On a $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$. En particulier, le point $(0, 0)$ correspond à $t = 0$, et $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$. La courbe admet un **point de rebroussement** en ce point, c'est-à-dire que le vecteur tangent unitaire change subitement de direction.

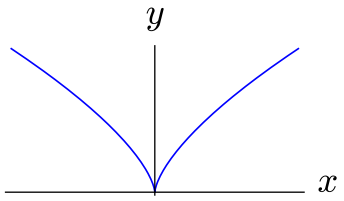


Figure 1.5.29 La courbe $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

(b) Soit $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\,\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$. Trouvons la droite tangente à la courbe de $\mathbf{r}$ au point $P_0(1, 0, 1)$.

Le point P_0 correspond à la valeur $t = 0$. Par ailleurs,

$$\mathbf{r}'(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -1 \end{bmatrix}.$$

de sorte que $\mathbf{r}'(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. L'approximation linéaire de $\mathbf{r}$ en $t_0 = 0$,

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{r}'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

fournit donc un paramétrage de la droite tangente.

[a] Pour que la vitesse change de façon discontinue, l'accélération doit être infinie.

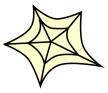
Exemple 1.5.30

Montrer que si $\mathbf{r}$ est un chemin de norme constante, alors $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont toujours orthogonaux.

Solution. Soit $\mathbf{r}$ un chemin tel que $\|\mathbf{r}\| = c$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 = c^2 &\iff \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = c^2 \\ &\implies (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})' = 0 \\ &\iff 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = 0, \end{aligned}$$

et la conclusion suit.



À vous de jouer 1.5.31

Dans cette question les composantes des vecteurs sont indiquées avec les symboles $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$.

Trouver la dérivée de la fonction donnée :

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\mathbf{c})$, avec

$\mathbf{a} = \langle -1, 1, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 3, -2\rangle$, et $\mathbf{c} = \langle 3, 4, -5\rangle$.

$\mathbf{r}'(t) = \langle$ _____, _____, _____ $\rangle$

Exemple 1.5.32 L'angle formé par deux courbes.

En quels points les courbes données par $\mathbf{r}_1(t) = t\,\mathbf{i} + (1-t)\,\mathbf{j} + (3+t^2)\,\mathbf{k}$ et par $\mathbf{r}_2(t) = (3-t)\,\mathbf{i} + (2-t)\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$ se coupent-elles ? Quel angle forment-elles au point d'intersection ?

Solution. S'il est vrai que le paramètre t est utilisé dans la définition des deux courbes, afin de trouver le point commun, on doit résoudre l'équation $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(s)$. En effet, la valeur du paramètre au point commun n'a aucune raison d'être la même pour les deux courbes[a]. Le système d'équations résultant est

$$\begin{aligned} t &= 3 - s, \\ 1 - t &= 2 - s, \\ 3 + t^2 &= s^2. \end{aligned}$$

On remplace $t = 3-s$ de la première équation dans la deuxième pour obtenir $1-(3-s) = 2-s$, ce qui donne $s = 2$, et donc $t = 1$. Ces deux valeurs sont des solutions pour la troisième équation également. Ainsi, le point commun est celui qui correspond à

$$\mathbf{r}_1(1) = \mathbf{r}_2(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

L'angle formé par les courbes est l'angle formé par leurs tangentes respectives au point commun. Les vecteurs vitesse respectifs sont

$$\mathbf{r}_1'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2t \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r}_2'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2s \end{bmatrix}.$$

Au point commun, ces vecteurs sont

$$\mathbf{r}_1'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r}_2'(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

L'angle θ qu'ils forment se calcule au moyen du théorème 1.2.9. On a donc

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1'(1)\cdot\mathbf{r}_2'(2)}{\|\mathbf{r}_1'(1)\|\,\|\mathbf{r}_2'(2)\|} = \frac{8}{\sqrt{6}\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Exercices

Les Exercice 1 à Exercice 8 fournissent une pratique sur la paramétrisation des courbes. Être à l'aise avec l'algèbre et l'interprétation de ces descriptions sont des ingrédients essentiels afin de travailler efficacement avec les paramétrisations.

Pour se pratiquer.

1. Considérez la courbe paramétrée par le temps $\mathbf{r}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\mathbf{i} + (t-5)^2\mathbf{j}$.
Faire une liste des trois points $(-1/\sqrt{2}, 0)$, $(1, 25)$, et $(0, 25)$ en ordre chronologique.

2. Trouvez la vitesse (scalaire) d'une particule dont la position est donnée par $\mathbf{r}(t) = 5\sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^{5t}\,\mathbf{j} - e^{-5t}\,\mathbf{k}$. Sélectionnez la bonne réponse :

(a) $\|\mathbf{v}(t)\| = \left(e^{5t} + e^{-5t}\right)$.
(b) $\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{10 + 5e^{t} + 5e^{-t}}$.
(c) $\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{10 + e^{10t} + e^{-10t}}$.
(d) $\|\mathbf{v}(t)\| = 5\left(e^{5t} + e^{-5t}\right)$.
(e) $\|\mathbf{v}(t)\| = 5\left(e^{t} + e^{-t}\right)$.

3.

(a) Soit $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{k}$. Trouver le vecteur tangent unitaire (pointant dans la direction des t croissants) à $t = 1$.

(b) Trouver la longueur d'arc de la courbe en (a) entre les points $(0, 3, 0)$ et $(1, 3, -\frac{1}{3})$.

4. En utilisant le Théorème 1.6.1, trouver la longueur de la portion de la courbe donnée par $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sqrt{\frac{3}{2}}t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ entre $t = 0$ et $t = 1$.

5. La position d'une particule au temps t est donnée par $\mathbf{r}(t) = (t + \sin t)\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$ (la courbe tracée par cette particule est une cycloïde). Quelle est la norme de l'accélération au temps t ?

Pour mieux comprendre.

6.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le *folium* de Descartes est la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3axy$, voir la figure ci-contre. Soit $\mathcal{D}$ la droite $x = 1$. Les questions qui suivent serviront à obtenir un paramétrage du folium par pojection de cette courbe sur $\mathcal{D}$.

(a) Donnez une équation paramétrique de $\mathcal{D}$.

(b) Pour un point $(1, t) \in \mathcal{D}$, trouvez le point commun au folium et la droite qui passe par l'origine et $(1, t)$. Déduisez un paramétrage du folium.

(c) Utilisez ce qui précède pour trouver les points où le folium admet des tangentes horizontales ou verticales.

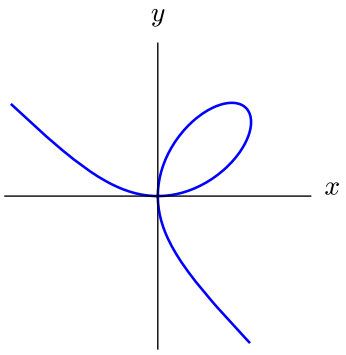


Figure 1.5.33 Le folium de Descartes : $x^3 + y^3 = 3axy$.

[a] De façon imagée, on pense aux deux courbes comme aux trajectoires décrites par deux particules. Le point commun aux deux trajectoires n'est pas nécessairement un point de collision : les deux particules passent par un même point, mais pas nécessairement au même moment. L'équation $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$ cherche à trouver un point de collision.

7. À quels points dans le plan xy est-ce que la courbe $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$ se croise elle-même ? Quelle est la différence en t entre la première fois que la courbe passe par un point, et la dernière ?

8. La courbe C est définie par l'intersection de l'ellipsoïde $x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 3z^2 = 1$ et du plan $x + y + z = 0$.

Lorsque y est très près de 0, et z est négatif, trouvez une expression donnant z en terme de y.

9. Une particule trace une courbe dans l'espace, de telle sorte que sa position dans le temps t est $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\,\mathbf{i} + \frac{1}{t}\,\mathbf{j} + (t-1)^2(t-3)^2\,\mathbf{k}$ pour $t > 0$.

Posons que l'axe des z positif pointe verticalement vers le haut, comme à l'habitude. Quand est-ce que la particule se déplace vers le haut, et quand est-ce qu'elle se déplace vers le bas ? Est-ce qu'elle se déplace plus rapidement au temps $t = 1$ ou au temps $t = 3$?

10. Quelle est la relation entre le vecteur vitesse et la vitesse scalaire d'une fonction vectorielle du temps ?

11. Soit $\mathbf{r}(t)$ un chemin dans $\mathbb{R}^3$. Soient $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, et $\mathbf{r}'''$ dénotant $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ et $\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3}$, respectivement. Exprimez

$$\frac{d}{dt}\big[(\mathbf{r}\times\mathbf{r}')\cdot\mathbf{r}''\big]$$

en termes de $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, et $\mathbf{r}'''$. Selectionnez la bonne réponse.

(a) $(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\cdot\mathbf{r}'''$,

(b) $(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\cdot\mathbf{r} + (\mathbf{r}\times\mathbf{r}')\cdot\mathbf{r}'''$,

(c) $(\mathbf{r}\times\mathbf{r}')\cdot\mathbf{r}'''$,

(d) 0.

(e) Aucune de ces réponses.

12. Trouvez la vitesse, la vitesse scalaire et l'accélération au temps t pour une la particule dont la position est $\mathbf{r}(t)$. Décrire le chemin de la particule.

(a) $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$,

(b) $\mathbf{r}(t) = a\cos t\sin t\,\mathbf{i} + a\sin^2 t\,\mathbf{j} + a\cos t\,\mathbf{k}$.

13. Au temps $t = 0$, une particule a $\mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour position et vitesse, respetivement. Au temps t, l'accélération est $\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} \cos t, \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Trouver la position de la particule au temps t.

(b) Montrer que les vecteurs vitesse et accélération sont toujours mutuellement orthogonaux.

(c) Trouver une équation de la tangente à la courbe décrite par la particule au point correspondant à $t = -\pi/2$.

(d) Vrai ou Faux : Aucune tangente à la courbe décrite par la particule ne passe par $(0, 0, 0)$. Justifiez.

14. La position d'une particule au temps t (mesuré en secondes) est donnée par

$$\mathbf{r}(t) = t\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathbf{i} + t\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

(a) Montrez que la courbe décrite par la particule se trouve sur le cône $z^2 = x^2 + y^2$.

(b) Trouvez le vecteur vitesse, ainsi que sa norme, au temps t.

(c) Supposez qu'au temps $t = 1$s la particule quitte sa trajectoire et poursuit en ligne droite, avec la vitesse qu'elle avait à cet instant. Sa position est alors donnée par l'approximation linéaire $\mathbf{L}(t)$ de la trajectoire en $t = 1$. Trouvez $\mathbf{L}(t)$.

(d) Combien de temps ça prend à la particule pour traverser le plan $x = -1$ à compter du moment où elle commence à bouger le long de la droite tangente ?

15. Une particule de masse $m = 1$ est située à $\mathbf{r}_0 = \frac{1}{2}\,\mathbf{k}$ et admet pour vecteur vitesse $\mathbf{v}_0 = \frac{\pi^2}{2}\,\mathbf{i}$ au temps $t = 0$. La particule se déplace soumise à la force $\mathbf{F}(t) = -3t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + 2e^{2t}\,\mathbf{k}$.

(a) Trouvez la position $\mathbf{r}(t)$ de la particule au temps t.

(b) À quel moment (après $t = 0$) la particule croise-t-elle le plan $x = 0$ pour la première fois ?

(c) Quel est le vecteur vitesse de la particule à l'instant trouvé en (b)?

16. Au temps $t = 0$ une particule se trouve à la position $\mathbf{r}(0) = (-1, 0, 0)$ et se déplace avec vitesse $\mathbf{v}(0) = (0, -1, 1)$. À l'instant t, la particule a pour vecteur accélération $\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Trouver la position de la particule au temps t (en secondes).

(b) Montrer qu'en tout temps les vecteurs vitesse et accélération sont orthogonaux.

(c) Trouver une équation de la tangente à la trajectoire de la particule au point correspondant à $t = -\pi/2$.

(d) Vrai ou Faux : Aucune des tangentes à la trajectoire de la particule ne passe par l'origine. Justifiez.

17. On considère la courbe Γ paramétrée par $\mathbf{r}(t) = t\sin(\pi t)\,\mathbf{i} + t\cos(\pi t)\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t < \infty$. La courbe démarre a l'origine, et éventuellement croise l'ellipsoïde E d'équation $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 24$.

(a) Trouver les coordonnées du point P auquel Γ croise E.

(b) Trouver un vecteur tangent à Γ en P.

18. Si une particule a une masse constante m, position $\mathbf{r}$, et vecteur vitesse $\mathbf{v}$, alors son moment angulaire est $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$.

Étant donnée une particule masse $m = 1$ et dont la position est donnée par $\mathbf{r} = (\sin t, \cos t, t)$, trouver $\left\| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right\|$.

19. Supposons qu'une particule voyage dans l'espace avec position donnée par $\mathbf{r}(t)$, telle que $\mathbf{r}''(t) = -\mathbf{r}(t)$. Montrer que « l'energie » $\|\mathbf{r}(t)\|^2 + \|\mathbf{r}'(t)\|^2$ est constante (comme fonction de t).

Pour aller plus loin.

20. Une caméra montée sur un poteau peut pivoter sur un cercle complet. Elle suit un objet dont la position à l'instant t (en secondes) est $x(t)$ mètres à l'est du poteau et $y(t)$ mètres au nord.

Pour que la caméra soit toujours dirigée directement vers l'objet, à quelle vitesse doit-elle être programmée pour tourner à chaque instant t ? (Donnez votre réponse en termes de $x(t)$ et $y(t)$ et de leurs dérivées, dans les unités rad/sec).

1.6 Longueur d'arc et courbure

Dans cette section, on s'intéresse à mesurer des courbes, dans un sens large. On va s'intéresser à la longueur d'une courbe, mais aussi à sa courbure.

Longueur d'arc

Supposons pour commencer que nous avons un chemin $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ donné par $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, et tel que $t_1 \neq t_2 \implies \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$. Cette condition assure que la trajectoire ne passe pas par le même point à deux instants différents. Nous voulons mesurer la longueur de la courbe décrite par $\mathbf{r}$. Procédons avec l'idée usuelle du calcul intégral, c'est-à-dire couper, approcher, additionner puis passer à la limite pour obtenir une intégrale. Nous allons supposer que la fonction $\mathbf{r}$ est telle que ses composantes et leurs dérivées sont continues.

On commence par diviser l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles de même longueur $\Delta t = \frac{1}{N}(b - a)$ en posant

$$\begin{aligned} &a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b, \\ &t_{i+1} - t_i = \Delta t \text{ pour } i \in \{1, 2 \ldots N - 1\}. \end{aligned}$$

On considère l'approximation de la courbe $\mathcal{C}$ donnée par la ligne polygonale (brisée) reliant deux points successifs $\mathbf{r}(t_i)$ et $\mathbf{r}(t_{i+1})$, pour i allant de 1 à $N-1$. La longueur de cette ligne polygonale est

$$L_N = \sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| .$$

La formule pour le calcul de la norme nous donne

$$\|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2}.$$

Si l'on suppose que les composantes de la fonction $\mathbf{r}$, c'est-à-dire les fonctions x et y, sont dérivables, le théorème de la moyenne donne l'existence de $t_i^*, t_i^{**} \in [t_1, t_{i+1}]$ tels que

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i), \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

de sorte que la longueur devient

$$\begin{aligned} L_N = \sum_{i=1}^{N-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| &= \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^{**})^2}\,\Delta t. \end{aligned}$$

Lorsque N tend vers l'infini, la ligne polygonale approche de mieux en mieux la courbe. Ainsi, on définit la longueur du chemin comme étant la limite, si elle existe de la somme ci-haut.

Nous avons fait l'hypothèse de continuité pour les fonctions x' et y', ce qui permet de montrer[1] que la limite existe et qu'elle vaut en fait

$$\lim_{N\to\infty} L_N = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Il faut remarquer que l'expression

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^{**})^2}\Delta t$$

n'est pas une somme de Riemann pour une intégrale, puisque les points d'évaluation sont différents.

Par ailleurs, on a $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j}$, de sorte qu'on peut écrire $\|\mathbf{r}'(t)\|$ à la place de la racine carrée dans l'intégrale ci-haut. Finalement, le même argument que celui qui vient d'être exposé est valable si l'on considère un chemin à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1.6.1

Soit $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin dont les composantes sont des fonctions ayant des dérivées continues sur $]a, b[$ et tel que la courbe $\mathcal{C}$ est parcourue une seule fois lorsque t parcourt $[a, b]$. Alors, la longueur de la courbe est

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

Par ailleurs, pour t entre a et b, l'abscisse curviligne, mesurée à partir de a, est la quantité

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\, du.$$

Elle mesure la longueur de la portion de la courbe lorsque le paramètre varie de a à t. De plus, on a

$$\frac{d}{dt}s(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\,.$$

Exemple 1.6.2 Périmètre d'un cercle.

En général, il peut être difficile de calculer une longueur. En guise d'exemple facile, calculons le périmètre du cercle $x^2 + y^2 = a^2$. Nous allons aussi trouver le vecteur tangent unitaire en tout point. Nous avons un paramétrage

$$\mathbf{r}(\theta) = a\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\theta\,\mathbf{j}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

de l'exemple 1.5.4. En vertu du théorème 1.6.1, avec le paramètre θ au lieu de t,

$$\mathbf{r}'(\theta) = -a\sin\theta\,\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{j},\ \text{d'où}\ \|\mathbf{r}'(\theta)\| = a.$$

Ainsi, la longueur totale est

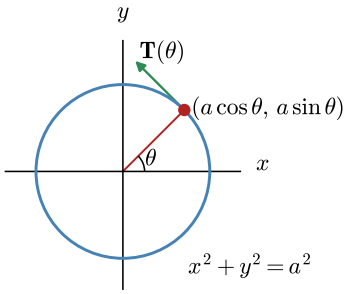
$$L = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\pi a,$$

ce qui est cohérent avec la formule bien connue[a].

[1] Mais nous ne le ferons pas dans ce texte.

Par ailleurs,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}.$$



Ainsi,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{r} = \begin{bmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = 0,$$

ce qui montre que, en tout point, la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon en ce point. Ceci est une réalisation en deux dimensions de l'exemple 1.5.30, un autre fait connu d'Euclide[b]. Dans ce cas, $s(\theta) = \int_0^\theta a\,du = a\theta$ est la longueur de la portion du cercle parcourue lorsque l'angle varie de 0 à θ.

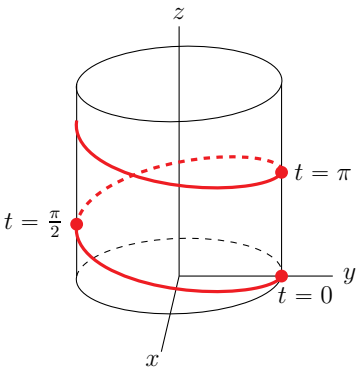
Exemple 1.6.3 Longueur d'une hélice.

Considérons le chemin

$$\mathbf{r}(t) = 6\sin(2t)\mathbf{i} + 6\cos(2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}.$$

Commençons par esquisser la courbe correspondante.

- $x(t) = 6\sin(2t)$ et $y(t) = 6\cos(2t)$ satisfont $x(t)^2 + y(t)^2 = 36\sin^2(2t) + 36\cos^2(2t) = 36$. Ainsi, tous les points de la courbe se trouvent sur le cylindre $x^2 + y^2 = 36$, et
- lorsque t croît, $x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ décrit un cercle $x^2 + y^2 = 36$, et simultanément $z(t) = 5t$ croît linéairement.



La courbe est représentée ci-contre.

Nous avons marqué trois points sur la figure. Le premier correspond à $t = 0$, il s'agit de $0\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Le deuxième correspond à $t = \frac{\pi}{2}$, c'est $0\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \frac{5\pi}{2}\mathbf{k}$. Le troisième correspond à $t = \pi$, il s'agit de $0\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\pi\mathbf{k}$.

Utilisons maintenant le théorème 1.6.1 pour calculer la longueur de la courbe entre $t = 0$ et $t = \pi$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= 6\sin(2t)\mathbf{i} + 6\cos(2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k} \\ \mathbf{r}'(t) &= 12\cos(2t)\mathbf{i} - 12\sin(2t)\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \\ &= \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{12^2\cos^2(2t) + 12^2\sin^2(2t) + 5^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \end{aligned}$$

$$s(\pi) = \int_0^\pi \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = 13\pi$$

[a] Les premières écritures connues d'une approximation de π, en Égypte et à Babylone, sont datées entre 1900 et 1600 av. J.-C. Le premier algorithme permettant de calculer rigoureusement π a été développé par Archimède vers 250 av, J.-C. Le premier usage du symbole π pour désigner le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle remonte à William Jones, en 1706.

[b] C'est la proposition 18 du livre III des *Éléments* d'Euclide, vers 300 av. J.-C.

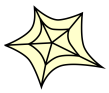
Exemple 1.6.4 Le périmètre de l'astroïde.

Calculer le périmètre de l'astroïde d'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Solution. Nous avons vu à l'exemple 1.5.6 que l'astroïde d'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ peut être paramétrée par $\mathbf{r}(t) = (a\cos^3 t)\mathbf{i}+(a\sin^3 t)\mathbf{j}$ avec $t \in [0, 2\pi]$. De plus, à l'exemple 1.5.24 nous avons calculé que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 3a|\sin t\cos t|$. Par ailleurs, l'astroïde est invariante sous les réflexions par rapport aux axes de coordonnées, c'est-à-dire que $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ est invariante par les transformations $x \mapsto -x$ et aussi $y \mapsto -y$. Ainsi, pour trouver le périmètre, il suffit de trouver la longueur de la portion de la courbe dans le premier quadrant et de multiplier par 4.

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{dt}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\, dt \\ &= 6a\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\, dt = 6a\Big[-\frac{\cos(2t)}{2}\Big]_0^{\pi/2} \\ &= 6a \end{aligned}$$

À vous de jouer 1.6.5



Soit le chemin $\mathbf{r}(t) = (12t, 6t^2, 6\ln t)$ défini pour $t > 0$.

Trouver la longueur de la courbe correspondante entre les points $(12, 6, 0)$ et $(24, 24, 6\ln(2))$.

L'abscisse curviligne

Jusqu'à présent, nous avons utilisé les chemins (objets algébriques, ce sont des fonctions) pour étudier des courbes (objets géométriques). Qui plus est, nous avons déjà mentionné le fait qu'une courbe donnée peut être paramétrée de plusieurs façons différentes. Deux questions, au moins, se posent naturellement :

- Est-ce que la longueur d'une courbe est indépendante du paramétrage utilisé ? La formule du théorème 1.6.1 fait intervenir de façon essentielle le paramétrage de la courbe, mais, logiquement, la longueur devrait être indépendante.
- Existe-t-il une façon « canonique » ou « naturelle » de paramétrer une courbe ?

Nous verrons qu'avec certaines hypothèses pas trop restrictives, les réponses à ces deux questions sont positives. La première est traitée à l'exercice 10, et, pour la seconde, nous avons besoin de revenir sur la fonction de longueur d'arc.

Proposition 1.6.6

Soit $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin tel que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ pour $t \in]a, b[$ et L la longueur totale de la courbe. Alors, $s : [a, b] \to [0, L]$, la fonction de la longueur d'arc mesurée à partir de $t = a$, est une fonction inversible.

Démonstration. Nous savons que $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$, et notre hypothèse nous dit que $\mathbf{r}'$ ne s'annule pas sur $]a, b[$, de sorte que s est une fonction strictement croissante. Pour chaque $y \in [0, L]$, il existe donc un unique $x \in [a, b]$ tel que $y = s(x)$. Il suffit alors de poser $x = t(y)$. ■

La façon de comprendre l'énoncé ci-haut est qu'il est possible de voir le temps t comme une fonction de la distance parcourue sur la courbe $t = t(s)$. Ceci permet d'effectuer un changement de paramètre, on obtiendra alors un « **paramétrage par rapport à l'abscisse curviligne** »,

ou « **paramétrage naturel** » de la courbe. En effet, quiconque a déjà effectué un trajet le long d'une autoroute aura remarqué que les points de repère sur la trajectoire sont donnés par la distance parcourue le long de la route, et pas par le temps de trajet : chaque personne qui voyage a son propre temps de trajet, chacune a son *chemin*, avec sa propre vitesse, mais la distance parcourue sur la route est une quantité intrinsèque à la courbe, elle ne dépend pas du paramétrage (ni de la personne qui voyage !).

Exemple 1.6.7 Reparamétrage naturel : segment.

Soit $P(2,-2)$ et $Q(6,1)$. Le segment de droite joignant P et Q peut être paramétré par $\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ pour $t \in [0,1]$. Nous avons alors $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{q}-\mathbf{p} = 3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$, de sorte que $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'\| = 5$, et donc

$$s(t) = \int_0^t 5\,du = 5t,$$

ce qui permet d'obtenir $t(s) = s/5$. Nous pouvons obtenir le reparamétrage par rapport à l'abscisse curviligne :

$$\mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s/5) = \mathbf{p} + \frac{1}{5}(\mathbf{q}-\mathbf{p}).$$

Notons que $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{5}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ est de norme 1.

Dans cet exemple, le changement de paramètre, $t = s/5$, a une signification évidente. On considère le paramétrage initial comme une position en fonction du temps. Le vecteur $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ est le vecteur vitesse, de norme 5. Le reparamétrage est donc un « changement de chronomètre » qui fait en sorte que la vitesse est 1.



À vous de jouer 1.6.8

Avec point de départ $(2,4,-5)$ donnez un paramétrage par rapport à l'abscisse curviligne de la courbe donnée par

$$\mathbf{r}\,(t) = (2-3t)\,\mathbf{i} + (4+1t)\,\mathbf{j} + (-5-1t)\,\mathbf{k}.$$

$\mathbf{r}\,(t\,(s)) =$ _____ **i**+ _____ **j**+ _____ **k**

Exemple 1.6.9 Reparamétrage naturel : la chaînette.

Considérons la chaînette[a]. $y = \cosh x$, elle peut être paramétrée par $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cosh t\,\mathbf{j}$. Dans la figure de gauche ci-bas, on montre les positions correspondant à certaines valeurs également espacées du paramètre t. Remarquons que la distance séparant deux tels points a tendance à s'accroître.

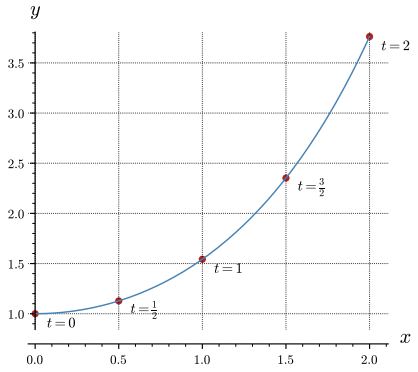


Figure 1.6.10 $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \cosh t \end{bmatrix}$

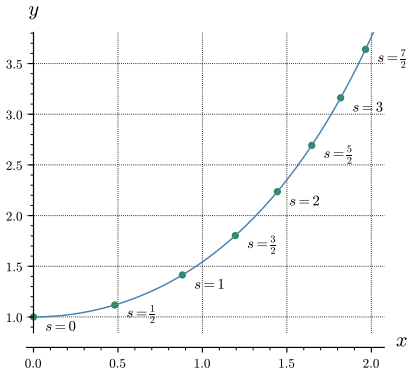


Figure 1.6.11 $\mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{arcsinh} s \\ \sqrt{1+s^2} \end{bmatrix}$

Le vecteur vitesse est $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \sinh t\,\mathbf{j}$, et la norme de celui-ci est

$$\sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t.$$

Ainsi, l'abscisse curviligne mesurée à partir de $t = 0$ (ce qui correspond au point $(0, 1)$) est

$$s(t) = \int_0^t \cosh u\, du = \sinh t.$$

Ainsi, $t = \operatorname{arcsinh} s = \ln(s + \sqrt{1 + s^2})$. Comme $\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{1 + s^2}$, en substituant cette relation dans le paramétrage $\mathbf{r}$, on obtient le paramétrage par rapport à l'abscisse curviligne :

$$\mathbf{r}(t(s)) = t(s)\,\mathbf{i} + \cosh t(s)\,\mathbf{j} = \operatorname{arcsinh} s\,\mathbf{i} + \sqrt{1 + s^2}\,\mathbf{j}.$$

Dans la figure de droite, on observe quelques points correspondant à des valeurs également espacées de l'abscisse curviligne.

Courbure (optionnel)

Si l'on s'intéresse à la courbure d'une courbe, on veut mesurer à quel point le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}$ change (de direction, puisqu'il est de norme constante) par rapport à la distance parcourue sur la courbe, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à la quantité $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$.

Si d'une part cette quantité traduit très bien le concept voulu, il est d'autre part généralement difficile de trouver le paramétrage naturel d'une courbe donnée, et les calculs peuvent être fastidieux, voire impossibles. Afin de contourner cette difficulté technique, on suppose qu'on a un paramétrage par rapport au paramètre t et l'on invoque la dérivation des fonctions composées pour obtenir

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{1}{dt/ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Définition 1.6.12

Soit $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin de classe C^2 avec $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ pour $t \in [a, b]$. Son vecteur de

[a] Il s'agit de la courbe décrite par un fil lorsqu'il est suspendu par ses extrémités.

courbure est, par définition,

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt},$$

et sa fonction de courbure est

$$\kappa(t) = \|\mathbf{K}(t)\|.$$

Remarquons que le vecteur $\mathbf{T}(t)$ est de norme constante, donc, en vertu de l'exemple 1.5.30, il est orthogonal à son vecteur dérivé $\frac{d\mathbf{T}}{dt}$. Comme le vecteur courbure est proportionnel à ce dernier, on obtient

$$\mathbf{K}(t) \perp \mathbf{T}(t). \qquad (*)$$

Par ailleurs, le ***vecteur normal principal*** est un vecteur unitaire dans la direction de $\mathbf{T}'$, c'est-à-dire

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|}.$$

Exemple 1.6.13 Courbure d'un cercle.

Soit $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$ avec $t \in [0, 2\pi]$ un paramétrage du cercle centré à l'origine et de rayon a. Nous avons alors $\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$, dont la norme vaut $\|\mathbf{r}'(t)\| = a$. Ainsi, le vecteur tangent unitaire est

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{a}\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j},$$

de sorte que $\mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$. Ainsi,

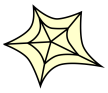
$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{a}\left(-\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}\right)$$

et $\kappa(t) = 1/a$.

On remarque notamment que le vecteur de courbure $\mathbf{K}$ pointe vers le centre du cercle et que la courbure du cercle est l'inverse de son rayon : plus un cercle est petit, plus il est courbé.

Exemple 1.6.14 Courbure d'une droite.

Soit $\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{d}$ un paramétrage d'une droite. On a alors $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{d}$ qui est constant. Le vecteur tangent unitaire est alors $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{d}\|}\mathbf{d}$, de sorte que $\mathbf{T}'(t) = \mathbf{0}$. Ainsi, le vecteur de courbure de la droite est $\mathbf{K} = \mathbf{0}$, et sa fonction de courbure est nulle. En somme, les droites ne sont pas courbées, ce qui est plutôt rassurant.



À vous de jouer 1.6.15

Soit le chemin donné par $\mathbf{r}(t) = (5t, -1t, 1 + 1t^2)$,

Trouvez le vecteur vitesse

$\mathbf{r}'(t) = (\,$ _____, _____, _____ $)$

Trouvez le vecteur accélération

$\mathbf{r}''(t) = (\,$ _____, _____, _____ $)$

Trouvez la courbure à $t = 1$

$\kappa(1) =$ _____

Nous l'avons vu, la courbure est le changement de direction ; or, un changement de direction

requiert une accélération. Afin de préciser ce lien, convenons d'écrire $\mathbf{v} = \mathbf{r}', \mathbf{a} = \mathbf{v}', v = \|\mathbf{v}\|$. Ainsi, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{a}$ sont les vecteurs vitesse et accélération, tandis que v est la vitesse scalaire.

Proposition 1.6.16

Soit $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin lisse. Alors, son vecteur accélération vérifie

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \ \mathbf{K}(t) = v'\mathbf{T}(t) + v^2\mathbf{K}(t).$$

Démonstration. Afin d'alléger l'écriture, nous omettons la variable t, et écrivons par exemple $\mathbf{r}$ au lieu de $\mathbf{r}(t)$ et ainsi de suite.

Nous avons $\mathbf{r}' = \|\mathbf{r}'\|\,\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$, donc, dérivant par rapport à t, avec la règle du produit, nous obtenons

$$\mathbf{r}'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\mathbf{T}\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{ds}{dt}\right)\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{K},$$

où la dernière égalité suit de ce que $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{K}$, d'après la définition 1.6.12. ■

Remarque 1.6.17

Nous avons $\mathbf{K} = \kappa\mathbf{N}$, de sorte que la formule précédente devient

$$\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}.$$

Ceci donne une décomposition de l'accélération en deux composantes orthogonales. D'une part, l'accélération tangentielle, $\mathbf{a_T} = v'\mathbf{T}$, est liée au changement de la vitesse scalaire. D'autre part, l'accélération normale, $\mathbf{a_N} = \kappa v^2\mathbf{N} = v^2\mathbf{K}$, est liée au changement de direction, ce qui fait que la courbe (nom féminin) courbe (du verbe *courber*, c'est-à-dire change de direction).

Soit $\mathbf{r}$ un chemin et $\mathbf{r}(t_0)$ un point sur la courbe associée. Un cercle de rayon $1/\kappa(t_0)$ passant par ce même point aura, en plus du point commun, la même courbure. Pour cette raison, et par analogie avec l'exemple 1.6.13, on dit que $1/\kappa(t_0)$ est le rayon de courbure de la courbe au point $\mathbf{r}(t_0)$. On sait que le vecteur de courbure d'un cercle pointe toujours vers son centre. Ainsi, afin de déterminer le centre du meilleur tel cercle, on utilise la direction du vecteur de courbure $\mathbf{K}(t_0)$, on obtient alors le **cercle osculateur**[2].

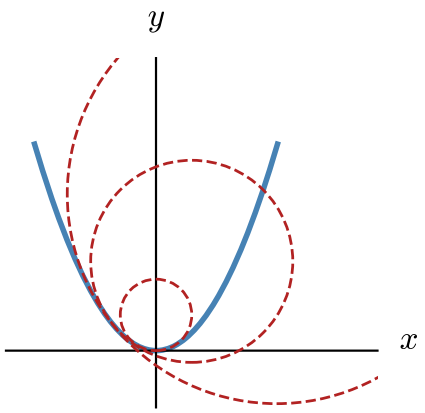


Figure 1.6.18 La parabole $y = x^2$ et quelques cercles osculateurs

[2]Le terme *osculateur* vient du latin et signifie *embrasser* ; ainsi, le cercle osculateur est celui qui embrasse le mieux la courbe en un point donné.

Définition 1.6.19

Soit $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin régulier en t_0. Le cercle osculateur à la courbe associée à $\mathbf{r}$ au point $\mathbf{r}(t_0)$ est le cercle de rayon $1/\kappa(t_0)$ et de centre

$$\mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \frac{\mathbf{K}(t_0)}{\|\mathbf{K}(t_0)\|} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)^2}\mathbf{K}(t_0).$$

Avant de voir des exemples, nous avons besoin d'un outil qui permet de faire efficacement les calculs nécessaires. Nous l'avons déjà mentionné, calculer le paramétrage naturel peut être ardu. Si, en plus, on doit dériver, les choses risquent de devenir compliquées.

Pour la suite, supposons que nous avons affaire à des chemins dans $\mathbb{R}^3$, quitte à ajouter une troisième coordonnée nulle si le chemin original est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Aussi, écrivons $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$, $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = \mathbf{r}''$ pour le vecteur vitesse et le vecteur accélération, et $v = \|\mathbf{v}\|$ pour la norme de la vitesse.

Proposition 1.6.20

Soit $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un chemin lisse, $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ et $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$. Alors,

(a) $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = v^3(\mathbf{T} \times \mathbf{K})$;

(b) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$;

(c) $\mathbf{K} = \dfrac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v}}{v^4}$.

Démonstration.

(a) En effet, puisque $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ et que, en vertu de la proposition 1.6.16, $\mathbf{a} = v'\,\mathbf{T} + v^2\,\mathbf{K}$, il vient que

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = (v\mathbf{T}) \times \left(v'\,\mathbf{T} + v^2\,\mathbf{K}\right) = v^3\,(\mathbf{T} \times \mathbf{K}),$$

où la dernière égalité suit de ce que $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$.

(b) En effet, il suit de la première partie que

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| = v^3\,\|\mathbf{T} \times \mathbf{K}\| = v^3\,\|\mathbf{T}\|\,\|\mathbf{K}\| = v^3\kappa,$$

où la troisième égalité suit de $(*)$ et du fait que $\mathbf{T}$ est unitaire. Puisque $v = \|\mathbf{v}\|$ et que le chemin est supposé lisse, ceci fournit le résultat voulu.

(c) Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v} &= v^2\ (\mathbf{T} \times \mathbf{K}) \times (v\mathbf{T}) \\ &= v^4(\mathbf{T} \times \mathbf{K}) \times \mathbf{T} \\ &= v^4\,[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T})\,\mathbf{K} - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{K})\,\mathbf{T}] \\ &= v^4\,\mathbf{K},\end{aligned}$$

où la troisième égalité est donnée par la propriété (b) du produit vectoriel que nous avons vu auparavant, et la dernière, de ce que $\mathbf{T}$ est unitaire et de $(*)$.

■

Exemple 1.6.21 Ellipse : courbure et cercle osculateur.

Considérer l'ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

(a) Trouver la fonction de courbure κ. À quels points sur la courbe trouve-t-on la plus grande et la plus petite courbures ?

(b) Trouver $\mathbf{K}$ ainsi que le centre du cercle osculateur à l'ellipse en un point quelconque.

Solution.

(a) Nous avons un paramétrage de l'ellipse $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j}$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Ainsi, $\mathbf{v} = -a\sin t\,\mathbf{i} + b\cos t\,\mathbf{j}$ et $\mathbf{a} = -a\cos t\,\mathbf{i} - b\sin t\,\mathbf{j}$. On calcule alors

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & -a\sin t & -a\cos t \\ \mathbf{j} & b\cos t & -b\sin t \\ \mathbf{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = ab\mathbf{k}.$$

Ceci donne directement la fonction de courbure :

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{ab}{v^3} = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}.$$

Comme a et b sont constantes, cette expression atteint son maximum (respectivement son minimum) lorsque le dénominateur atteint son minimum (respectivement son maximum). De plus, comme $v \geqslant 0$, les intervalles de monotonie de v^3 sont les mêmes que ceux de v^2. Ainsi, il suffit d'étudier les variations de la fonction $c(t) = v(t)^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$. Nous avons

$$\begin{aligned} c'(t) &= -2a^2\sin t\,\cos t + 2b^2\sin t\,\cos t \\ &= (b^2 - a^2)2\sin t\,\cos t \\ &= (b^2 - a^2)\sin 2t. \end{aligned}$$

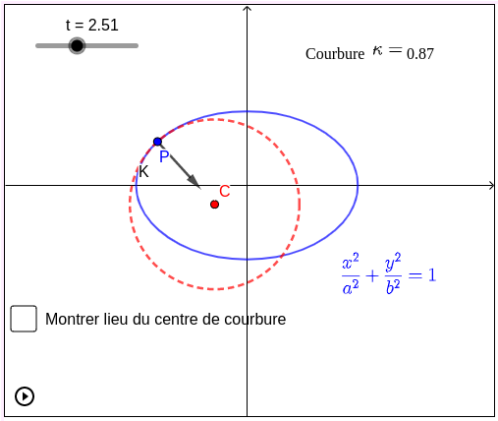
Cette expression s'annule lorsque $t = 0, \pi/2, \pi$ ou π. Si l'on suppose que $a > b$, on aura des minimums pour $c(t)$, donc des maximums pour $\kappa(t)$ à $t = 0, \pi$, et des maximums pour $c(t)$, donc des minimums à $t = \pi/2, 3\pi/2$. La signification géométrique est claire : l'ellipse est le plus courbée lorsqu'elle coupe l'axe des abscisses, et le moins courbée lorsqu'elle coupe l'axe des ordonnées[a].

(b) Nous avons

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 0 & -a\sin t \\ \mathbf{j} & 0 & b\cos t \\ \mathbf{k} & ab & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -ab\cos t \\ -a^2 b\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = -ab\begin{bmatrix} b\cos t \\ a\sin t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il vient alors que $\mathbf{K} = \frac{-ab}{v^4}\left(b\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}\right)$. Ainsi, le centre du cercle osculateur se trouve à

$$\mathbf{r} + \frac{1}{\kappa^2}\mathbf{K} = \mathbf{r} + \frac{v^6}{a^2b^2}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{v^2}{ab}\begin{bmatrix} b\cos t \\ a\sin t \\ 0 \end{bmatrix}.$$



[standalone]
Contexte
[embed]

Figure 1.6.22 L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ainsi que son vecteur courbure $\mathbf{K}$, sa courbure et son cercle osculateur de centre C. On peut aussi voir le lieu décrit par le centre du cercle osculateur, ceci ressemble à l'astroïde.

On apprend en calcul différentiel que le sens de concavité d'une courbe d'équation $y = f(x)$ est donné par le signe de $f''(x)$. Plus précisément, la courbe est courbée vers le haut lorsque $f''(x) > 0$ et vers le bas lorsque $f''(x) < 0$. Voyons ceci à l'aide du vecteur courbure.

Exemple 1.6.23 Courbes $y = f(x)$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$. Calculer et interpréter le vecteur courbure.

Solution. On utilise la variable indépendante x comme paramètre, de sorte qu'on a un paramétrage de la courbe $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}$. Ainsi, on a $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}$ et $\mathbf{a}(t) = f''(t)\mathbf{j}$. On calcule alors

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 1 & 0 \\ \mathbf{j} & f'(t) & 0 \\ \mathbf{k} & f''(t) & 0 \end{vmatrix} = f''(t)\,\mathbf{k},$$

puis

$$(\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)) \times \mathbf{v}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 0 & 1 \\ \mathbf{j} & 0 & f''(t) \\ \mathbf{k} & f'(t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -f''(t)f'(t) \\ f''(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De plus, $v(t) = \sqrt{1 + f'(t)^2}$, ce qui donne

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{(1 + f'(t)^2)^2} \begin{bmatrix} -f''(t)f'(t) \\ f''(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

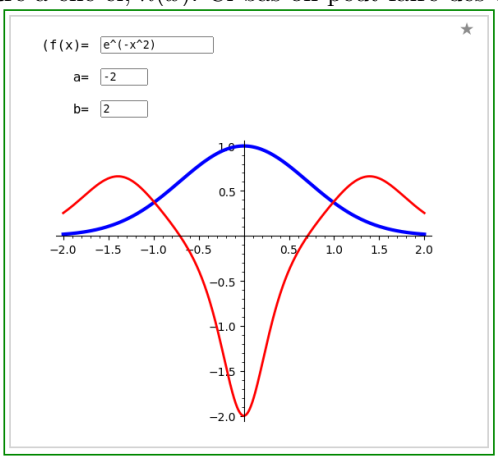
$$\implies \kappa(t) = \|\mathbf{K}(t)\| = \frac{|f''(t)|}{[1 + f'(t)^2]^{3/2}}.$$

On retrouve notamment le fait que la composante y du vecteur de courbure a le même signe que la dérivée seconde, f''. Ceci fournit une autre preuve, s'il en faut, du fait que lorsqu'une fonction admet une dérivée seconde positive, sa courbe est courbée vers le haut, et inversement.

[a] Noter que cette situation changera si $b > a$.

Exemple 1.6.24 Fonction de courbure.

Étant donnée une fonction f, on peut considérer sa courbe, et associer une fonction de courbure à elle-ci, $\kappa(x)$. Ci-bas on peut faire des calculs pour illustrer ceci.



[standalone]
Contexte
[embed]

Figure 1.6.25 On peut tracer la fonction de courbure (en rouge) associée à une fonction $f(x)$ (en bleu). Dans la figure, $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Une courbe en $\mathbb{R}^3$ est donnée paramétrée par $\mathbf{r}(t) = 2t\cos t\,\mathbf{i} + 2t\sin t\,\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\,\mathbf{k}$

(a) Trouver la longueur de la portion de la courbe entre $t = 0$ et $t = 2$.

(b) Trouver un paramétrage de la tangente à la courbe au point correspondant à $t = \pi$.

2. Soit $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}$ la position d'une particule à l'instant $t \geqslant 0$.

(a) Trouver le vecteur vitesse de la particule à l'instant t.

(b) Trouver la longueur de la portion de la courbe associée comprise entre $t = 1$ et $t = 2$.

3. Considérer la courbe paramétrée par $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}\cos^3 t\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}\sin^3 t\,\mathbf{j} + \sin^3 t\,\mathbf{k}$

(a) Calculer la longueur de la portion de la courbe comprise entre les points correspondant à $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calculer la longueur de la portion de la courbe entre $t = 0$ et $t = \pi$.

4. Soit $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\,\mathbf{k}$, $t \geqslant 0$. Calculer $s(t)$, la fonction longueur d'arc pour le chemin donné.

Pour mieux comprendre.

5. Trouvez la paramétrisation spécifiée de la partie du premier quadrant du cercle $x^2+y^2 = a^2$.

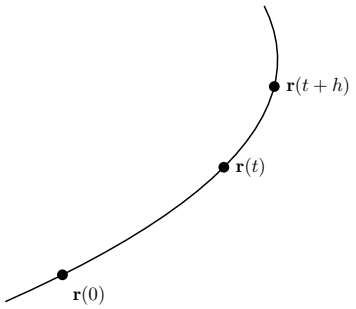
(a) En terme de la coordonnée y.

(b) En terme de l'angle entre la droite tangente et l'axe des x positif.

(c) En terme de la longueur d'arc à partir de $(0, a)$.

6.

Ci-contre, se trouve le graphe de la fonction paramétrée $\mathbf{r}(t)$. Soit $s(t)$ la longueur d'arc le long de la courbe de $\mathbf{r}(0)$ à $\mathbf{r}(t)$. Indiquez sur le graphe $s(t+h)-s(t)$ et $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$. Est-ce que ces quantités sont des scalaires ou des vecteurs ?



7. Trouver la longueur d'arc du chemin $\mathbf{r}(t) = t^m\,\mathbf{i} + t^m\,\mathbf{j} + t^{3m/2}\,\mathbf{k}$ pour $0 \leqslant a \leqslant t \leqslant b$, avec $m > 0$. Exprimez le résultat en termes de m, a, et b.

8. Une particule se déplace le long de la courbe $\mathcal{C}$, intersection des surfaces $z^2 = 12y$ et $18x = yz$, vers le haut. Lorsque la particule se trouve à $(1, 3, 6)$ son vecteur vitesse $\mathbf{v}$ et son vecteur accélération $\mathbf{a}$ sont

$$\mathbf{v} = 6\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{a} = 27\,\mathbf{i} + 30\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$$

(a) Donner un paramétrage de $\mathcal{C}$ avec paramètre $u = \frac{z}{6}$.

(b) Trouver la longueur de la portion de $\mathcal{C}$ entre $(0, 0, 0)$ et $(1, 3, 6)$.

(c) Si $u = u(t)$ est la valeur du paramètre pour la position de la particule au temps t, trouver $\frac{du}{dt}$ lorsque la particule se trouve à $(1, 3, 6)$.

(d) Trouver $\frac{d^2u}{dt^2}$ lorsque la particule se trouve à $(1, 3, 6)$.

9. Soit $\mathcal{C}$ la courbe intersection des surfaces $y = x^2$ et $z = \frac{2}{3}x^3$. Une particule voyage le long de $\mathcal{C}$ avec vitesse (scalaire) constante, telle que $\frac{dx}{dt} > 0$. La particule se trouve à $(0, 0, 0)$ au temps $t = 0$ et au point $(3, 9, 18)$ au temps $t = \frac{7}{2}$.

(a) Trouver la longueur de la portion de $\mathcal{C}$ entre $(0, 0, 0)$ et $(3, 9, 18)$.

(b) Trouver la vitesse (scalaire) de la particule.

(c) Trouver le vecteur vitesse de la particule lorsqu'elle se trouve à $\big(1, 1, \frac{2}{3}\big)$.

(d) Trouver l'accélération de la particule lorsqu'elle se trouve à $\big(1, 1, \frac{2}{3}\big)$.

Pour aller plus loin.

10. Reparamétrage. Soit $\mathbf{r} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ un chemin simple et lisse, et $h : [a, b] \to [c, d]$ une bijection de classe C^1. Posons $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ h$. Si $h'(t) > 0$ pour tout t, on dit que $\boldsymbol{\gamma}$ est un **reparamétrage** de $\mathbf{r}$; si $h'(t) < 0$ pour tout t, on dit que $\boldsymbol{\gamma}$ est un **anti-reparamétrage** de $\mathbf{r}$.

(a) Montrer que $\boldsymbol{\gamma}$ et $\mathbf{r}$ ont la même image.

(b) Montrer que $\boldsymbol{\gamma}'(t) = h'(t)\,\mathbf{r}'\big(h(t)\big)$. Que peut-on dire des directions de $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ et de $\mathbf{r}'\big(h(t)\big)$, selon le signe de h' ?

(c) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = h(t)$, que les longueurs calculées avec $\boldsymbol{\gamma}$ et avec $\mathbf{r}$ sont égales, qu'il s'agisse d'un reparamétrage ou d'un anti-reparamétrage.

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Nous commençons par nous intéresser à la continuité pour définir les dérivées. Comme dans le cas des fonctions d'une variable, nous étudierons les approximations linéaires, et il sera également question d'objets tangents. Le vecteur gradient jouera un rôle important. Finalement, nous verrons l'optimisation de ces fonctions, avec ou sans contraintes.

2.1 Fonctions de plusieurs variables

Dans le parcours mathématique usuel, on étudie les fonctions d'une variable. Une telle fonction est une règle qui associe exactement une quantité (un nombre ou un vecteur par exemple) à une valeur donnée. On étudie les fonctions réelles d'une variable réelle et leurs applications à l'aide de graphiques, des limites, de leurs dérivées ou de leurs intégrales notamment. Nous verrons que la plupart des idées du calcul à une variable trouvent leur place avec plusieurs variables. Bien entendu, certains ajustements seront nécessaires.

Domaine, graphe et ensembles de niveau

Définition 2.1.1

Une *fonction de plusieurs variables à valeurs réelles*, disons f, est la donnée d'une région $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et d'une règle qui, à chaque point $\mathbf{r} \in \mathcal{D}$, fait correspondre un nombre réel $f(\mathbf{r})$. Le domaine de f est l'ensemble $\mathcal{D}$, tandis que son image est l'ensemble des valeurs prises par f, c'est-à-dire $\{f(\mathbf{r}) | \mathbf{r} \in \mathcal{D}\}$; il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{r} &\longmapsto f(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

et on lit « f va de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ et applique (ou envoie) $\mathbf{r}$ sur $f(\mathbf{r})$ ».

- Dans le cas $n = 2$, on aura que $\mathcal{D}$ est une région du plan $\mathbb{R}^2$ et l'on écrira $f(x, y)$ au lieu de $f(\mathbf{r})$, ou $f(x_1, x_2)$ au lieu de $f(\mathbf{x})$.
- Dans le cas $n = 3$, on aura que $\mathcal{D}$ est une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ et l'on écrira $f(x, y, z)$ au lieu de $f(\mathbf{r})$, ou $f(x_1, x_2, x_3)$ au lieu de $f(\mathbf{x})$.

Si seule la règle est donnée sans préciser le domaine, on conviendra que le domaine est le plus grand ensemble de points $\mathbf{r}$ tel que l'expression donnée est un nombre réel.

Exemple 2.1.2

Supposons que nous lancions un projectile du niveau du sol (avec un bâton de golf, un canon...). Supposons que notre projectile ne tourne pas et qu'il est soumis seulement à la force gravitationnelle g. Dans ces conditions, la distance horizontale que le projectile voyagera, disons z, dépend de la vitesse initiale, disons x (en mètres par seconde), et de l'angle de tir, disons y (en radians). On aura alors $z = f(x, y) = \frac{1}{g} x^2 \sin 2y$.

Exemple 2.1.3

Soit $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{y} + \ln(4 - x^2 - 4y^2)$.

(a) Trouver le domaine de f et le représenter graphiquement.

(b) Calculer $f(1/4, 1/4)$.

Solution.

(a) La présence des termes $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ impose d'avoir $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, de sorte que le domaine se trouve dans le premier quadrant. Par ailleurs, il faut aussi avoir $4 - x^2 - 4y^2 > 0$. L'équation $x^2 + 4y^2 = 4$ définit une ellipse, la région qui nous intéresse est donc la partie du premier quadrant contenant l'origine, limitée par l'ellipse $(x/2)^2 + y^2 = 1$. Les segments de droite correspondant aux axes font partie du domaine, mais pas la portion de l'ellipse.

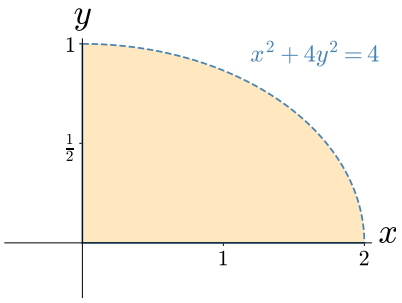


Figure 2.1.4 Le domaine de la fonction f.

(b) Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} f(1/4, 1/4) &= \sqrt{1/4} + \sqrt{1/4} + \ln(4 - 1/16 - 4/16) \\ &= 1 + \ln(59/16). \end{aligned}$$

Lorsqu'on étudie une fonction d'une variable, on la représente à l'aide de sa courbe associée, ou son graphe. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est donnée, la courbe est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x), x \in [a, b]\}$. Cette définition se généralise aux fonctions de plusieurs variables.

Définition 2.1.5

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Le **graphe de** f est l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}\}.$$

Notons qu'il s'agit d'une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Remarquons qu'il est habituel d'identifier le domaine $\mathcal{D}$, qui est une partie de $\mathbb{R}^2$, à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, à savoir

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \mathcal{D}\}.$$

De façon plus générale, on peut définir le graphe d'une fonction f définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des points $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qu'on identifie naturellement à $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lorsqu'on étudie une fonction à plusieurs variables, on s'intéresse au rôle isolé de chacune des variables. Si, par exemple, on s'intéresse à $f(x, y)$ et que l'on fixe la valeur de la variable x à $x = x_0$, on obtient une fonction de la seconde variable : $g(y) = f(x_0, y)$. De la même façon, nous avons une fonction $h(x) = f(x, y_0)$ lorsque y_0 est fixée. La courbe de la fonction $z = h(x)$, tracée sur le plan vertical (parallèle à l'axe des x) d'équation $y = y_0$, fait partie de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = f(x, y)$. Cette courbe est en fait l'intersection du plan $y = y_0$ avec la surface $\mathcal{S}$. Avant d'illustrer ces concepts à l'exemple 2.1.7 , donnons une définition plus précise.

Définition 2.1.6

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables définie sur une région $\mathcal{D}$ et $(x_0,y_0)\in\mathcal{D}$. Alors,

- la trace de f dans la direction des x, à la valeur $y=y_0$, est la courbe d'équation $z=f(x,y_0)$ dans le plan $y=y_0$;
- la trace de f dans la direction des y, à la valeur $x=x_0$, est la courbe d'équation $z=f(x_0,y)$ dans le plan $x=x_0$.

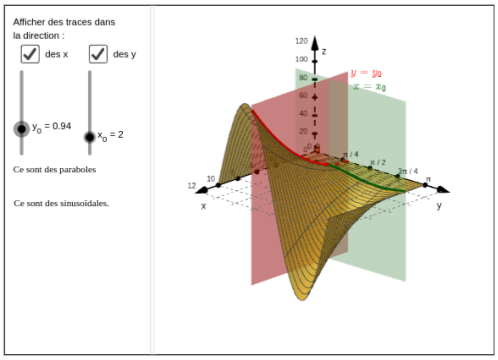
Exemple 2.1.7

Considérons la fonction $f(x,y)=x^2\sin 2y$. Nous avons alors quelques traces :

- Dans la direction des x, elles sont données par les courbes d'équation
  - $z=f(x,0)=0$ à la valeur $y=0$;
  - $z=f(x,\pi/6)=x^2\sin\pi/3=x^2\sqrt{3}/2$ à la valeur $y=\pi/6$;
  - $z=f(x,3\pi/4)=x^2\sin 2\pi/2=-x^2$ à la valeur $y=3\pi/4$.

  On voit tout de suite qu'il s'agit de paraboles, à l'exception des traces à $y=0, y=\pi/2, y=\pi$. Dans ces cas, on a des droites horizontales.
- Dans la direction des y, les traces sont données par les courbes d'équation
  - $z=f(0,y)=0$ à la valeur $x=0$;
  - $z=f(5,y)=25\sin 2y$ à la valeur $x=5$;
  - $z=f(10,y)=100\sin 2y$ à la valeur $x=10$.

  Dans ce cas, il s'agit de courbes sinusoïdales.



[standalone]
Contexte
[embed]

Figure 2.1.8 La surface d'équation $z=x^2\sin 2y$ ainsi que quelques traces

La méthode des traces permet de visualiser et d'esquisser une surface d'équation $z=f(x,y)$. En effet, on conçoit la surface comme un amoncellement de courbes (les traces). Ceci a été fait en considérant les coupes de la surface par des plans d'équation $x=x_0$ ou $y=y_0$.

On voit maintenant une autre méthode, apparentée à ce qui est souvent fait en cartographie, où l'on considère les lignes de niveau constant du terrain, ou en météorologie, où l'on considère les courbes isothermes. Ceci correspond à faire les coupes selon des plans horizontaux d'équation $z = z_0$ et à faire la projection sur le plan $z = 0$ (voir la figure ci-contre).

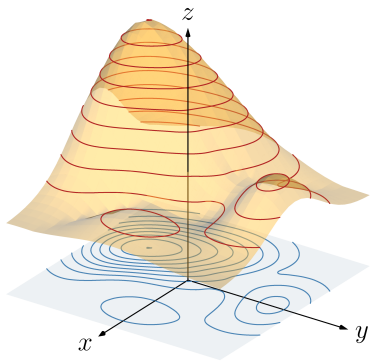


Figure 2.1.9 Une surface $z = f(x, y)$ ainsi que quelques courbes de niveau et quelques traces horizontales

Définition 2.1.10

Soit f une fonction de deux variables définie sur une région $\mathcal{D}$. Pour un réel k donné, la **courbe de niveau k de f** est l'ensemble

$$f^{-1}(k) = \{(x, y) \in \mathcal{D} | \, f(x, y) = k\}.$$

On doit noter que la trace au niveau k est l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ avec le plan $z = k$. La courbe de niveau k, pour sa part, est la projection de la trace sur le plan $z = 0$. Il est commun d'utiliser des couleurs sur une surface pour représenter ses variations.

Les figures ci-bas montrent la surface $z = f(x, y)$ de la fonction considérée, ainsi que le diagramme de ses courbes de niveau.

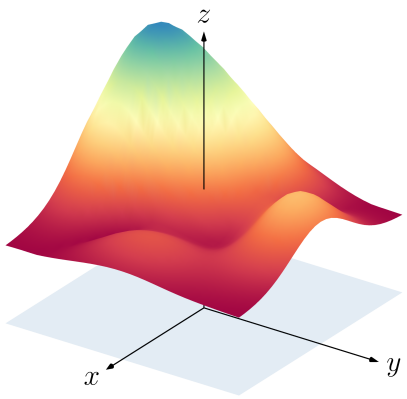


Figure 2.1.11 La surface $z = f(x, y)$

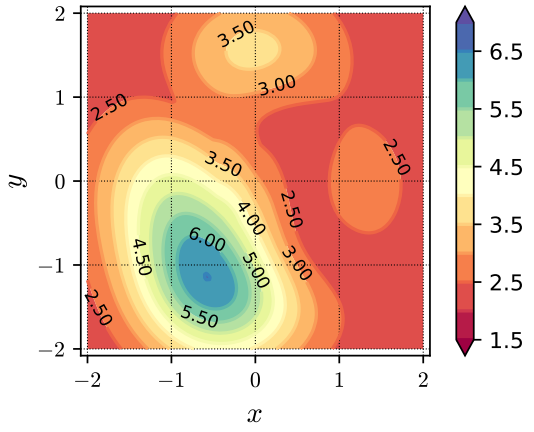


Figure 2.1.12 Un diagramme de courbes de niveau.

Exemple 2.1.13

Étudier les courbes de niveau des fonctions $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ et $f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Pour f_1, on doit étudier les courbes d'équation $x^2 + y^2 = k$. On voit tout de suite que l'ensemble solution de cette équation est vide pour $k < 0$, réduit à l'origine si $k = 0$ et représente le cercle de rayon $\sqrt{k}$ centré à l'origine si $k > 0$. Par ailleurs, les traces dans la direction des x ou des y sont des paraboles des formes $z = x^2 + y_0^2$ ou $z = x_0^2 + y^2$. La surface d'équation $z = f_1(x, y)$ est un paraboloïde.

- Pour f_2, on étudie les courbes d'équation $\sqrt{x^2+y^2}=k$. À nouveau, aucune solution pour $k<0$, l'origine lorsque $k=0$ et un cercle centré à l'origine pour $k>0$, mais de rayon k cette fois. Les traces dans la direction des x et des y sont données par $z=\sqrt{x^2}=|x|$ et $z=|y|$. La surface obtenue cette fois est la moitié supérieure d'un cône.

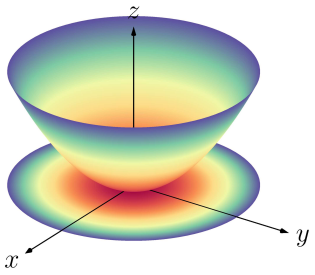


Figure 2.1.14 Le graphe et les courbes de niveau de $z=x^2+y^2$

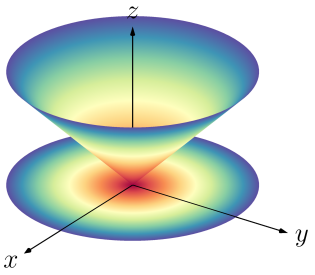


Figure 2.1.15 Le graphe et les courbes de niveau de $z=\sqrt{x^2+y^2}$

À vous de jouer 2.1.16



Soit $f(x,y)=2x^2y+14x+10$.

Déterminer une équation de la courbe de niveau de $f(x,y)$ passant par le point $(5,1)$.

Fonctions de trois variables

Les notions vues pour les fonctions à deux variables s'appliquent *mutatis mutandis* aux fonctions de trois variables.

La représentation d'une fonction de 3 variables par son graphe n'est pas pratique. En effet, si $f(x,y,z)$ est donnée, son graphe défini par $w=f(x,y,z)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$.

Cependant, la notion d'ensemble de niveau a une interprétation très concrète. Pour les fonctions à deux variables, les ensembles de niveau sont les solutions d'équation de la forme $f(x,y)=k$, ce sont donc des courbes. Notons qu'il n'est pas toujours possible d'isoler une des variables en fonction de l'autre, c'est-à-dire de donner une équation de la forme $y=\phi(x)$ pour une telle courbe. Pour une fonction à trois variables, on s'intéresse aux solutions d'équation de la forme $f(x,y,z)=k$.

Définition 2.1.17

Soit f une fonction de trois variables définie sur une région $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^3$. Pour un réel k donné, l'**ensemble de niveau k de f** est l'ensemble

$$f^{-1}(k)=\{(x,y,z)\in\mathcal{D}|\, f(x,y,z)=k\}.$$

L'ensemble de niveau k est donc une surface de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Remarquons que si une surface $\mathcal{S}$ est donnée explicitement par une équation de la forme $z=f(x,y)$, alors on peut poser $F(x,y,z)=z-f(x,y)$, et la même surface $\mathcal{S}$ peut être considérée comme la surface de niveau 0 pour la fonction F. Les ensembles de niveau de la fonction f sont, quant à eux, des courbes d'équation $f(x,y)=k$.

Exemple 2.1.18

Déterminer les surfaces de niveau de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

On s'intéresse aux solutions de

$$x^2 + y^2 - z^2 = k \qquad (*)$$

pour différentes valeurs de k.

- Si $k = 0$, alors l'équation $(*)$ devient $x^2 + y^2 = z^2$. La surface correspondante est le cône circulaire dont l'axe est l'axe Oz.
- Supposons $k < 0$, disons $k = -c^2$ pour un certain $c > 0$. L'équation $(*)$ devient $x^2 + y^2 - z^2 = -c^2$. Les sections de la surface correspondante par les plans $x = 0$ ou $y = 0$ sont les hyperboles $y^2 - z^2 = -c^2$ et $x^2 - z^2 = -c^2$ des plans $x = 0$ ou $y = 0$. Ces hyperboles coupent l'axe Oz. Les sections par le plan $z = z_0$ sont vides lorsque $z_0^2 < c^2$ et sont des cercles de rayon $\sqrt{z_0^2 - c^2}$ sinon. Les surfaces de niveau sont donc des hyperboloïdes à deux nappes.
- Supposons maintenant $k > 0$, disons $k = c^2$ pour un certain $c > 0$. L'équation $(*)$ devient $x^2 + y^2 - z^2 = c^2$. Les sections par les plans $x = 0$ ou $y = 0$ sont encore des hyperboles dans les plans Oxz et Oyz, mais, cette fois, leurs équations sont $x^2 - z^2 = c^2$ ou $y^2 - z^2 = c^2$ respectivement. Elles ne coupent pas l'axe Oz, mais les axes Ox ou Oy. Les sections par le plan $z = z_0$ sont des cercles, et ce, peu importe la valeur de z_0. Dans ce cas, les surfaces de niveau sont des hyperboloïdes à une nappe.

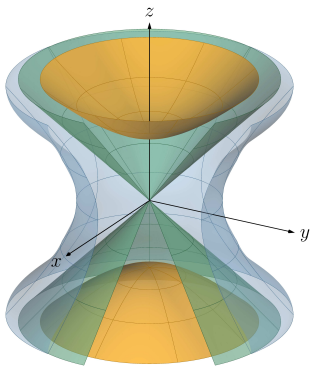


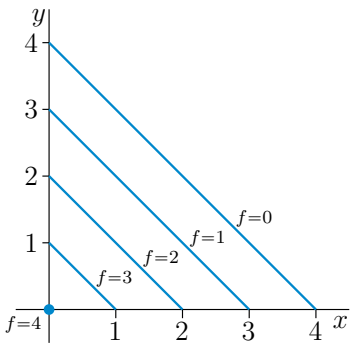
Figure 2.1.19 Quelques surfaces de niveau de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

Exercices

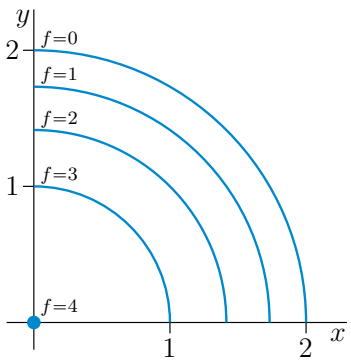
Pour se pratiquer.

1. Dans chacun des points (a) et (b) ci-dessous, on vous fournit un croquis des parties du premier quadrant de quelques courbes de niveau d'une certaine fonction $f(x, y)$. Esquissez le premier octant du graphe correspondant $z = f(x, y)$.

(a)

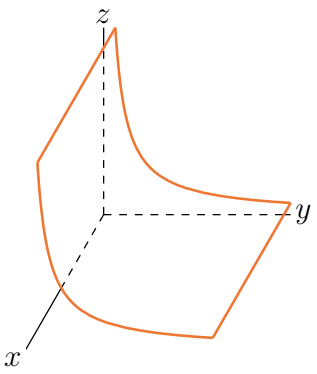


(b)



2.

Esquissez quelques courbes de niveau de la fonction $f(x,y)$ dont le graphe $z = f(x,y)$ est esquissé ci-contre.



3. Esquissez quelques courbes de niveau de

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$. (b) $f(x,y) = xy$. (c) $f(x,y) = xe^{-y}$.

4. Esquissez les courbes de niveau de $f(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$.

Pour mieux comprendre.

5. Dessinez un diagramme de courbes de niveau de $f(x,y) = e^{-x^2+4y^2}$, montrant tous les types de courbes de niveau qui se produisent.

6. Une surface est donnée implicitement par $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 0$

(a) Esquissez plusieurs courbes de niveau z =constante.

(b) Dessinez un esquisse sommaire de la surface.

7. Esquissez l'hyperboloïde $z^2 = 4x^2 + y^2 - 1$.

8. Décrivez les surfaces de niveau de

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

(b) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$.

9. Esquissez les graphes de

(a) $f(x,y) = \sin x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(c) $f(x,y) = |x| + |y|$.

10. Esquissez et décrivez les surfaces suivantes.

(a) $4x^2 + y^2 = 16$.

(b) $x + y + 2z = 4$.

(c) $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{x^2}{16}$.

(d) $y^2 = x^2 + z^2$.

(e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1$.

(f) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - by + 9z - b = 0$, où b est une constante.

(g) $\frac{x}{4} = \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$.

(h) $z = x^2$.

11. (Tiré de [10].) Associer chacune des fonctions suivantes à son diagramme de courbes de niveau (repéré par I–VI), puis utiliser l'applet ci-dessous — des boutons A à F permettent d'afficher, une à la fois, la surface correspondant à chacune des fonctions (a)–(f) — pour vérifier ses réponses.

(a) $f(x,y) = \sin(xy)$

(b) $f(x,y) = e^x \cos y$

(c) $f(x,y) = \sin(x-y)$

(d) $f(x,y) = \sin x - \sin y$

(e) $f(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$

(f) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$

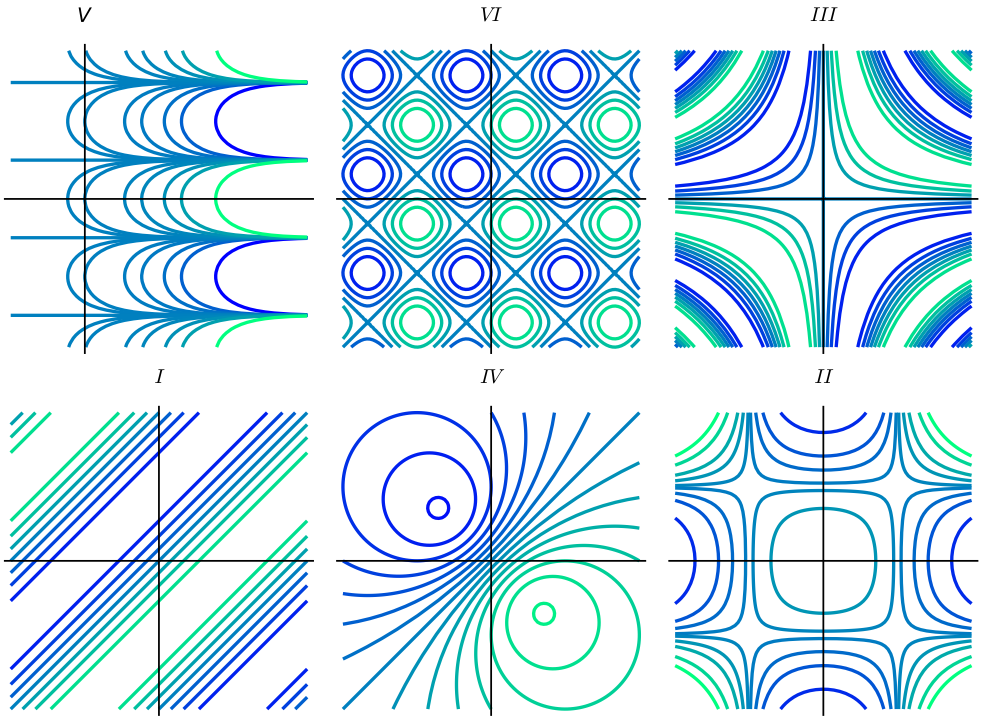
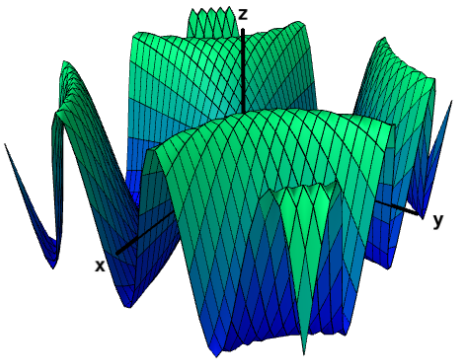


Figure 2.1.20 Les courbes de niveau, dans l'ordre I–VI des fonctions (a)–(f) ci-dessus.



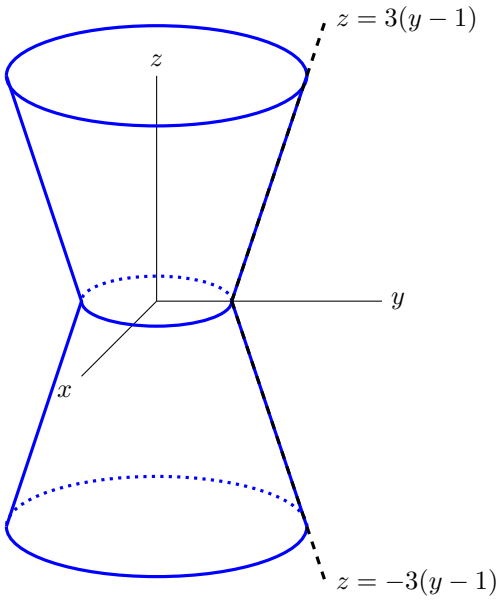
[standalone]
Contexte
[embed]

Figure 2.1.21 Applet interactif : choisir une lettre pour afficher la surface correspondante.

Note. Cet applet a besoin d'une connexion internet (il s'exécute sur un serveur Sage public).

Pour aller plus loin.

12. La surface inférieure présente des courbes de niveau circulaires, centrées le long de l'axe z. Les lignes données sont l'intersection de la surface avec la moitié droite du plan yz. Donnez une équation de la surface.



2.2 Limites et continuité

Rappelons ce que nous entendons par « limite d'une fonction d'une variable » avant de considérer le cas de plusieurs variables.

Si f est une fonction d'une variable dont le domaine contient des points arbitrairement près de la valeur a (peut-être que a fait partie de ce domaine aussi, mais peut-être pas), ce qui veut dire que a est un « *point limite du domaine* », on écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

lorsque les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi près que l'on veut de L, pourvu que l'on puisse choisir x suffisamment près de a, mais sans être égal à a. En d'autres termes, peu importe la marge ϵ que l'on se donne, on doit avoir $|L - f(x)| < \epsilon$ aussitôt que l'écart $|x - a|$, sans être nul, est inférieur à un certain seuil $\delta > 0$ qui est à déterminer.

Limites

Si on lit attentivement ce qui précède, on remarque que toutes les notions impliquées ont du sens dans $\mathbb{R}^n$: les valeurs absolues mesurent des écarts. Il suffit donc de les remplacer par des normes.

Définition 2.2.1

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{D}$ contient des points arbitrairement près de $\mathbf{a}$. On dit que *la limite de f lorsque* $\mathbf{x}$ *tend vers* $\mathbf{a}$ *est* L, ce qu'on écrit

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$$

si la valeur de $f(\mathbf{x})$ peut être aussi près de L que l'on veut, pourvu que l'écart entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{a}$ soit suffisamment près de 0, mais sans être nul. Ceci revient à dire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, et $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ entraîne $|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$.

- Dans le cas où $n = 2$, si l'on veut écrire explicitement les variables, on écrira naturellement

$$\lim_{(x,y)\to(x_a,y_a)} f(x,y).$$

- On écrit souvent aussi

$$f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}{\longrightarrow} L \qquad \text{ou} \qquad f(\mathbf{x}) \longrightarrow L \text{ lorsque } \mathbf{x} \to \mathbf{a}.$$

S'il est vrai que la définition pour les fonctions de plusieurs variables est en tout point semblable à celle pour les fonctions à une variable, il y a une différence substantielle entre les deux contextes. Avec une seule variable, x peut se rapprocher de a par la gauche ou par la droite, il n'y a que deux directions de rapprochement. Pour que la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, on demande que les deux limites latérales coïncident, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Dans ce cas, la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ est la valeur commune des deux limites latérales.

Dans le cas des fonctions à plusieurs variables, il y a beaucoup plus de « place » pour que $\mathbf{x}$ s'approche de $\mathbf{a}$. Il existe une infinité de directions ou de façons de s'approcher d'un point $\mathbf{a}$ donné.

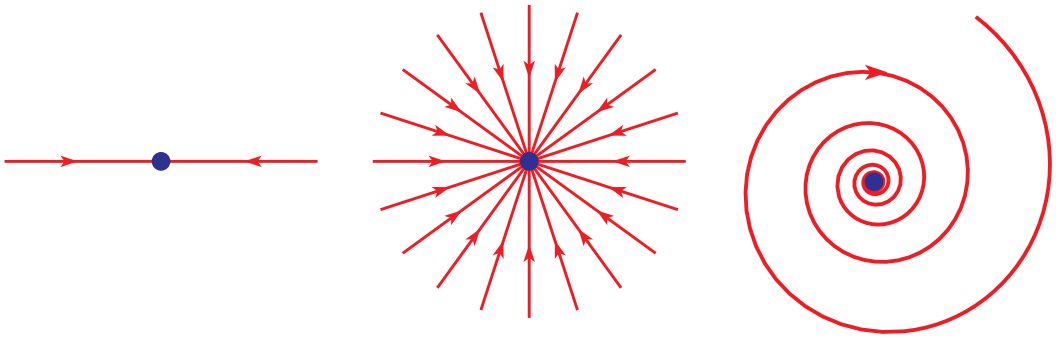


Figure 2.2.2 Dans la figure de gauche, le cas d'une variable : on peut s'approcher par la gauche ou par la droite d'un point donné. La situation est différente en deux variables, comme la figure du centre et celle de droite l'illustrent.

Exemple 2.2.3

Soit $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Ci-bas, on trouve les courbes de niveau ainsi que le graphe de la fonction f.

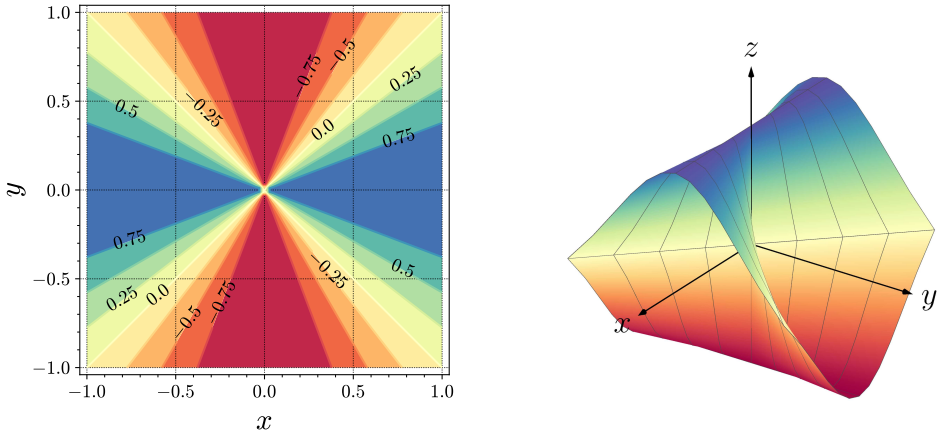


Figure 2.2.4 Les courbes de niveau et le graphe de $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

On observe dans le graphe que, autour de $(0,0)$, la surface semble ne pas être lisse. Du côté des courbes de niveau, on voit que, près du point $(0,0)$, il existe des points appartenant à des courbes de niveau très différents. Ceci suggère que la limite de f lorsque $(x,y) \to (0,0)$ n'existe pas.

Si, au contraire, nous avions une limite, disons L, les valeurs de $f(x,y)$ devraient s'approcher de L à mesure que (x,y) s'approche de $(0,0)$. En particulier, si (x,y) s'approche de $(0,0)$ le long de n'importe quelle trajectoire, alors $f(x,y)$ doit s'approcher de L.

- Si (x,y) tend vers $(0,0)$ le long de l'axe des x, c'est-à-dire le long de la droite $y = 0$, on aura
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1,$$
et donc $f(x,y) \longrightarrow 1$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ avec $y = 0$. Ceci forcerait $L = 1$.
- Si, en revanche, on fait tendre (x,y) vers $(0,0)$ le long de l'axe des y, c'est-à-dire le long de la droite $x = 0$, on aura
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1,$$

et donc $f(x,y) \longrightarrow -1$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ avec $x = 0$. Ceci forcerait $L = -1$, ce qui est une contradiction.

Ainsi, la limite de f lorsque $(x,y) \to (0,0)$ n'existe pas.

Le phénomène observé dans l'exemple précédent fournit un critère permettant de décider qu'une limite n'existe pas.

Remarque 2.2.5 Critère des deux trajectoires.

Si $f(x,y) \longrightarrow L_1$ lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0) le long d'un chemin $\mathcal{C}_1$ et que $f(x,y) \longrightarrow L_2$ lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0) le long d'un autre chemin $\mathcal{C}_2$ avec $L_1 \neq L_2$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

n'existe pas.

Une mise en garde s'impose cependant : si deux trajectoires donnent la même limite, il n'est pas possible de conclure que la limite existe. L'exemple suivant montre cette situation.

Exemple 2.2.6

Considérer $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ et étudier la limite de f lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

À l'instar de l'exemple 2.2.3, essayons plusieurs droites non verticales, d'équation $y = kx$. Nous avons, sur une telle droite,

$$f(x,y) = f(x,kx) = \frac{x(kx)^2}{x^2+(kx)^4} = \frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = \frac{k^2x}{1+k^4x^2},$$

ce qui donne que $f(x,y) \longrightarrow 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ le long de la droite $y = kx$. Nous avons donc une infinité de trajectoires le long desquelles la limite est nulle. Ceci ne suffit pourtant pas pour établir que la limite existe et est zéro.

Analysons le graphique des courbes de niveau ainsi que le graphe de f.

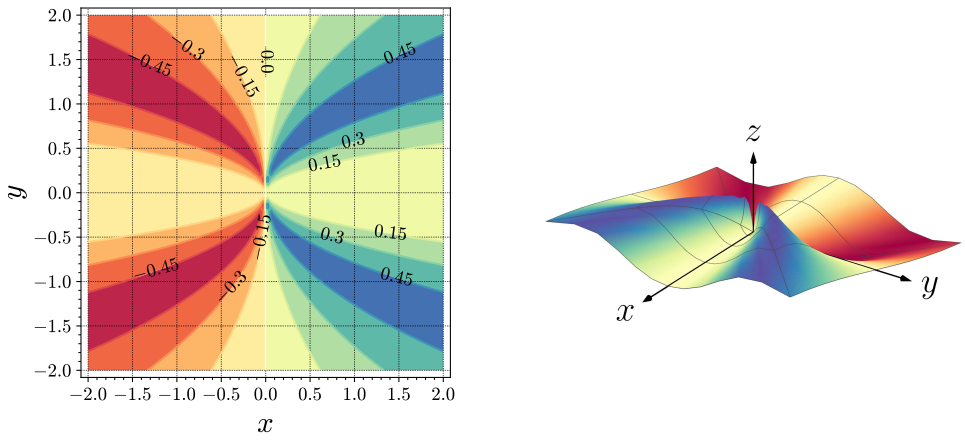


Figure 2.2.7 Les courbes de niveau et le graphe de $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

À nouveau, on voit un problème à l'origine. Les courbes de niveau indiquent que, près de l'origine, on a des points sur des courbes de niveau de niveaux très différents. Ces courbes

ont l'aspect de paraboles. Le long de la parabole $x = y^2$, on a

$$f(x,y) = f(y^2,y) = \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2},$$

de sorte que $f(x,y) \longrightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ le long de $y^2 = x$. Ceci suffit donc pour conclure que la limite de $f(x,y)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ n'existe pas.

Notons que le diagramme des courbes de niveau suggère à lui seul de considérer des paraboles de la forme $x = ky^2$ avec différentes valeurs de k comme trajectoires donnant des limites différentes.

Voyons maintenant un exemple d'une limite qui existe.

Exemple 2.2.8

Soit $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. À nouveau, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 lorsque (z,y) tend vers $(0,0)$. Cependant, dans ce cas, le numérateur est de degré total 3, tandis que le dénominateur est de degré total 2. On peut donc s'attendre à ce que *« le numérateur l'emporte »* et que la limite soit 0. Par ailleurs, le diagramme des courbes de niveau et le graphe de f appuient ceci. Montrons que c'est effectivement le cas.

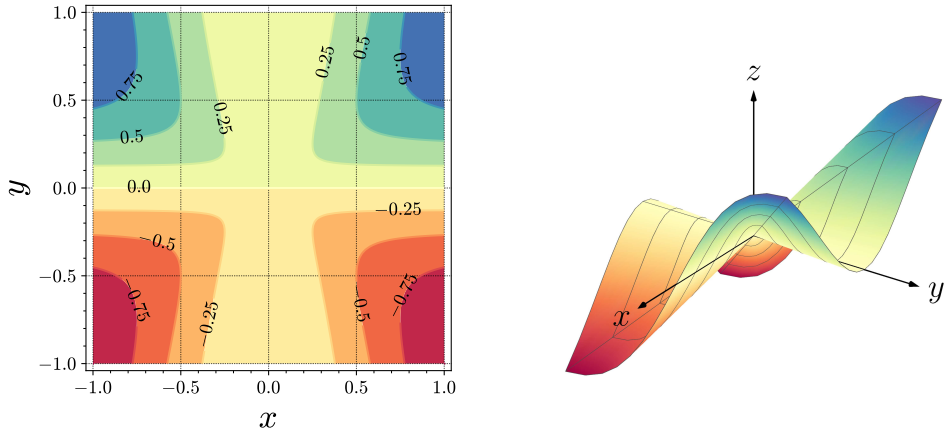


Figure 2.2.9 Les courbes de niveau et le graphe de $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$

Soit donc $\epsilon > 0$. On soupçonne que la limite est $L = 0$, on s'intéresse donc à la quantité

$$|f(x,y) - L| = |f(x,y)| = \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2}.$$

Nous devons montrer qu'il est possible de choisir $\delta > 0$ tel que la condition $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entraîne $\frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} < \epsilon$.

Or, $y^2 \geqslant 0$, de sorte que $x^2 \leqslant x^2 + y^2$, et donc $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$. Ainsi, $|f(x,y) - L| \leqslant 2|y|$.

Il suffit alors de poser $\delta = \epsilon/2$. En effet, dans ce cas, si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, nous aurons $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon/2$, et donc

$$|f(x,y) - L| \leqslant 2|y| < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$



À vous de jouer 2.2.10

Trouver les limies, si elles existent ou écrivez *NE* si une d'elles n'existe pas.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2}{5x^2+2y^2}$$

1) Le long de l'axe des x : _____
2) Le long de l'axe des y : _____
3) Le long de la droite $y = mx$: _____
4) La limite donnéé en début du problème : _____

Dans la pratique, il est fastidieux d'étudier les limites en utilisant la définition. C'est pour ça qu'on s'intéresse à des propriétés générales : il s'agit d'adaptations au contexte des fonctions de plusieurs variables de résultats connus pour les fonctions d'une variable. Étant donné que celles-ci sont valables en toute généralité, nous les énonçons avec le langage vectoriel. Par ailleurs, rappelons que si f, g sont deux fonctions et que $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on peut construire les fonctions αf, $f+g$, fg et $\frac{f}{g}$ par les formules $(\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$, $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ et $\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$, pourvu que $g(\mathbf{x}) \neq 0$.

Théorème 2.2.11 Propriétés des limites.

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L_1$ et $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = L_2$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons

(a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha L_1$;

(b) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f+g)(\mathbf{x}) = L_1 + L_2$;

(c) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) = L_1 L_2$;

(d) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{L_1}{L_2}$ *si* $L_2 \neq 0$.

En somme, ce théorème nous dit que lorsque les limites existent, elles se comportent comme nous nous y attendons.

Par ailleurs, le résultat suivant est souvent utile, car il permet de se ramener à des fonctions dont les limites sont connues.

Théorème 2.2.12 Théorème du sandwich.

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ et $f(\mathbf{x}) \leqslant h(\mathbf{x}) \leqslant g(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$. Alors, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = L$.

Exemple 2.2.13

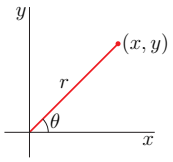
Considérer la limite de l'exemple 2.2.8 à nouveau. Nous avons

$$|f(x,y) - 0| = \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} \leqslant 2|y|.$$

Comme $|y| \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$, le théorème du sandwich donne $f(x,y) \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

Une technique utile pour l'étude de certaines limites est le passage aux coordonnées polaires. Rappelons qu'à un point P de coordonnées (x,y) du plan, on associe ses coordonnées polaires (r,θ), où $r = \|\overrightarrow{OP}\|$ et où θ est l'angle orienté formé par l'axe des abscisses et la demi-droite OP.

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



En particulier, les points qui sont près de l'origine sont ceux pour lesquels r est petit, sans égard à la valeur de θ.

Voyons quelques exemples.

Exemple 2.2.14

Considérer à nouveau la fonction $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et étudier la limite lorsque $(x,y) \to (0,0)$. En coordonnées polaires, nous avons

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\cos^2\theta\cdot\sin\theta.$$

Comme $|r\cos^2\theta\sin\theta| \leqslant r$ et que $r \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$, nous retrouvons le fait que $f(x,y) \longrightarrow 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

Exemple 2.2.15

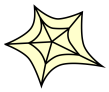
Considérer à nouveau la limite de l'exemple 2.2.3. En coordonnées polaires, nous avons

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta.$$

Cette fois, la valeur de f est indépendante de r, mais est constante sur toute droite dont l'équation polaire est de la forme $\theta = \theta_0$. Ceci explique l'allure des courbes de niveau.

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos 2\theta = \cos 2\theta$ n'existe pas (chaque choix de θ donne une limite différente), il en va de même pour $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

À vous de jouer 2.2.16



Étudier le comportement de $f(x,y) = \dfrac{6x^{2.1}}{x^2+y^2}$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

(a) En passant en coordonnées polaires, on trouve

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{6x^{2.1}}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r\to 0^+,\ \theta \text{ quelconque}} \Big(\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \Big) = \underline{\qquad\qquad}.$$

Utiliser « theta » pour θ. Use « infinity » for « ∞ » and « -infinity » for « $-\infty$ ». Use « DNE » for « Does not exist ».

(b) Puisque $f(0,0)$ n'est pas définie, f a une discontinuité en $(x,y) = (0,0)$. Est-il possible de définir une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $g(x,y) = f(x,y)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ et que g soit continue partout ? Si oui, quelle serait la valeur de $g(0,0)$? S'il n'existe pas de telle fonction continue g, écrire DNE.

$g(0,0) =$ _____

Continuité

Rappelons qu'une fonction f d'une variable est dite être continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Cela présuppose notamment que la fonction est définie en $x = a$. Le calcul d'une limite d'une fonction continue se fait donc par simple évaluation. Pour les fonctions de plusieurs variables, on procède de la même façon.

Définition 2.2.17

Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to R$. On dit que f *est continue en* $\mathbf{a}$ si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. Si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$, on dit qu'elle est *continue sur* $\mathcal{D}$.

Principe 2.2.18

De façon intuitive, une fonction f est continue en un point $\mathbf{a}$ si une petite variation de $\mathbf{x}$ près de $\mathbf{a}$ entraîne une petite variation de $f(\mathbf{x})$. En d'autres termes, si $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire quelconque et que h est un « petit » nombre réel, on aura

$$f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) \approx f(\mathbf{a}).$$

Les propriétés des limites vues au théorème 2.2.11 permettent d'obtenir les propriétés correspondantes pour la continuité.

Théorème 2.2.19 Propriétés des fonctions continues.

Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $\mathbf{a}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, il en va de même pour les fonctions αf, $f + g$, fg. Si, en plus, $g(\mathbf{a}) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi continue en $\mathbf{a}$.

Exemple 2.2.20

Toute fonction de la forme $f(x, y) = cx^n y^m$ avec n, m des entiers positifs est continue : elle est obtenue avec des produits de fonctions continues. De la même façon, toute fonction polynomiale, c'est-à-dire toute somme de termes de la forme $cx^n y^m$, est une fonction continue. Ceci s'étend naturellement aux fonctions de trois variables ou plus.

Exemple 2.2.21

En vertu du théorème 2.2.19, toute fonction rationnelle, c'est-à-dire toute fonction de la forme

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

où p et q sont des polynômes, est une fonction continue sur l'ensemble de points tels que $q(x, y) \neq 0$.

Au-delà de la multiplication par les constantes et des additions, produits et quotients de fonctions, il est très pratique de considérer leur composition. Sans surprise, la composition de fonctions continues est une fonction continue.

Théorème 2.2.22

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Si l'image de f est contenue dans une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$ et que $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est continue,

alors $\phi \circ f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue également.

(b) Si $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ est un chemin dont les composantes sont des fonctions continues et que la courbe est contenue dans $\mathcal{D}$, alors le chemin $f \circ \mathbf{r} : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Exemple 2.2.23

Soit $g(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$. La fonction $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ est une fonction rationnelle. Elle est continue sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la droite $x - y = 0$. La fonction $\phi(t) = \arctan(t)$ est continue partout. Il en résulte que la fonction $g = \phi \circ f$ est continue sur le plan privé de la droite $x - y = 0$.

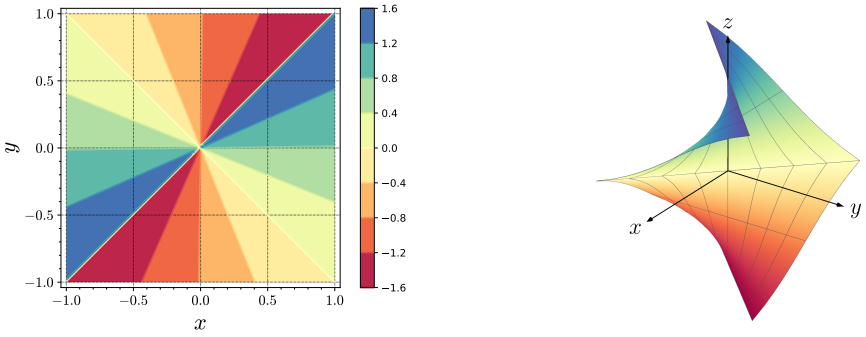


Figure 2.2.24 Les courbes de niveau et le graphe de $g(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$. On observe un changement brusque de niveau le long de la droite $x - y = 0$. Ceci correspond à la discontinuité de cette fonction. La surface, de son côté, présente une déchirure le long de la droite $x - y = 0$.

Exemple 2.2.25

Soit $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ avec $t \in [0, 2\pi]$ un paramétrage du cercle. Il s'agit d'une fonction continue puisque chacune de ses composantes l'est. Soit de nouveau $g(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$. Afin de calculer la composition $f \circ \mathbf{r}$, on doit exclure les valeurs de t dans $[0, 2\pi]$ qui font que $x(t) - y(t) = 0$. Ceci arrive seulement si $t \in \{\pi/4, 5\pi/4\}$. Ainsi, la composition $f \circ \mathbf{r}$ est définie et continue sur $[0, 2\pi] \backslash \{\pi/4, 5\pi/4\}$. Pour un tel t, nous avons

$$f \circ \mathbf{r}(t) = \arctan\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}\right).$$

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Supposons que $f(x,y)$ est une fonction telle que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 10$.

Vrai ou faux : $|f(0.1, 0.1) - 10| < |f(0.2, 0.2) - 10|$

2. Une meule martèle le blé pour en faire de la farine. Le blé est placé dans un bassin, et la meule le martèle de haut en bas.

Des échantillons de blé sont prélevés à différents endroits le long du bassin. Leurs diamètres sont mesurés et leur position sur le bassin est enregistrée.

Considérez cette affirmation : « Au fur et à mesure que les particules s'approchent de la meule, leurs diamètres approchent les 50 μm. ». Dans ce contexte, décrivez les variables ci-dessous à partir de la Définition 2.2.1.

(a) **x**. (b) **a**. (c) **L**.

3. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

(a) Trouvez un rayon approchant l'origine le long duquel $f(x,y) = 1$.

(b) Trouvez un rayon approchant l'origine le long duquel $f(x,y) = 0$.

(c) Qu'est-ce que le travail ci-dessus montre sur une limite de $f(x,y)$?

Pour mieux comprendre.

4. Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$

(a) Exprimez la fonction en termes des coordonnées polaires r et θ, et simplifiez.

(b) Supposons que (x,y) est à une distance de 1 de l'origine. Quelles sont les valeurs les plus grandes et les plus petites de $f(x,y)$?

(c) Soit $r > 0$. Supposons que (x,y) est à une distance de r de l'origine. Quelles sont les valeurs les plus grandes et les plus petites de $f(x,y)$?

(d) Soit $\epsilon > 0$. Trouvez la valeur positive de r garantissant que $|f(x,y)| < \epsilon$ lorsque (x,y) est au plus à r unités de l'origine.

(e) Qu'est-ce que vous venez de montrer ?

5. Supposons que $f(x,y)$ est un polynôme. Évaluez $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

6. Évaluez, si possible,

(a) $\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \left(xy + x^2\right)$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$.

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sin x)(e^y-1)}{xy}$.

7.

(a) Trouvez la limite : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8+y^8}{x^4+y^4}$.

(b) Prouvez que la limite suivante n'existe pas : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^5}{x^8+y^{10}}$.

8. Évaluez chacune des limites suivantes ou montrez qu'elles n'existent pas.

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^4}{x^2+y^4}$.

9. Évaluez chacune des limites suivantes ou montrez qu'elles n'existent pas.

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+x^2y-y^2x+2y^2}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2y^2-2x^2y+x^2}{(x^2+y^2-2y+1)^2}$.

10. Définissons, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

(a) Soit $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Calculez $\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(b) Calculez $\lim_{x\to 0} f(x,x^2)$.

(c) Est-ce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe ?

11. Calculez les limites suivantes ou expliquez pourquoi elles n'existent pas.

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+2xy^2+y^4}{1+y^4}$.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|^x$.

2.3 Dérivées partielles

Motivation

Nous sommes maintenant en mesure de définir les dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables. Avant de le faire, rappelons comment la dérivée $f'(a)$ d'une fonction d'une variable a été définie. On imagine que l'on se déplace le long de l'axe des abscisses dans la direction positive et que l'on mesure, par exemple, la température que l'on note $f(x)$. Le taux de variation instantané de température lorsque l'on passe par $x = a$ est

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Définition des dérivées partielles

On suppose maintenant que l'on se déplace sur le plan Oxy et que la température au point (x, y) est $f(x, y)$. On peut passer à travers le point $(x, y) = (a, b)$ en se déplaçant de plusieurs façons. Il semble irréaliste de penser que le taux de variation de la température perçue si l'on se déplace parallèlement à l'axe des x doit être égal au taux mesuré pour un déplacement parallèle à l'axe des y. Nous considérerons d'autres directions de déplacement plus tard.

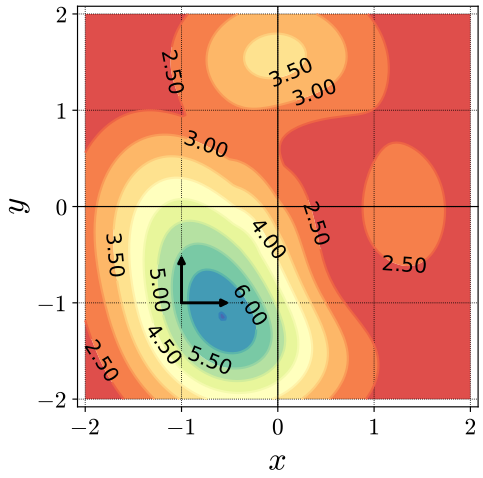


Figure 2.3.1 Les courbes isothermes sur une région du plan.

Par exemple, si l'on se situe au point $(x, y) = (-1, -1)$ dans la figure ci-dessus, la température ressentie est d'autour de 5.75. Si l'on se déplace dans la direction des x croissants, la température a tendance à augmenter. Si, à partir de ce même point, on se déplace plutôt dans la direction des y croissants, la variation est beaucoup plus faible, la température reste autour de 5.75.

Plus généralement, supposons que nous passons par le point $(x, y) = (a, b)$ et que nous nous déplaçons parallèlement à l'axe des x (dans la direction positive). Notre ordonnée, y, reste constante : elle prend toujours la valeur $y = b$. Ainsi, on peut penser à la température comme à une fonction d'une seule variable $B(x) = f(x, b)$ et l'on mesure le taux de variation de cette température :

$$\frac{dB}{dx}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{B(a+h) - B(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

On appelle ceci la « dérivée partielle de f par rapport à x au point (a, b) » et l'on écrit $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$. Ici,

- le symbole ∂, qu'on lit « partielle », signifie que l'on s'intéresse à une fonction de plus d'une variable ;
- le x dans $\frac{\partial f}{\partial x}$ indique qu'on dérive ou différentie par rapport à x, pendant que y est fixe, c'est-à-dire traitée comme une constante ;
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ se lit « partielle de f par rapport à x ».

On prendra soin de ne pas écrire $\frac{d}{dx}$ lorsque $\frac{\partial}{\partial x}$ est requis. Nous verrons plus tard des situations dans lesquelles $\frac{d}{dx} f$ et $\frac{\partial}{\partial x} f$ sont définies, mais ont des significations différentes.

Si, d'autre part, on passe par le point $(x, y) = (a, b)$, mais en se déplaçant parallèlement à l'axe des y (dans la direction positive), alors notre abscisse, x, sera constante, prenant toujours la valeur $x = a$. Ainsi, on peut penser à la température comme à une fonction d'une seule variable $A(y) = f(a, y)$ et l'on observe le taux de variation de température :

$$\frac{dA}{dy}(b) = \lim_{h\to 0} \frac{A(b+h) - A(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

On appelle ceci la « dérivée partielle de f par rapport à y au point (a, b) » et l'on écrit $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Tout comme dans le cas des dérivées ordinaires $\frac{df}{dx}(x)$, il est usuel de traiter les dérivées partielles de $f(x,y)$ comme des fonctions de (x,y) simplement en évaluant la dérivée partielle au point (x,y) plutôt qu'en (a,b).

Définition 2.3.2 Dérivées partielles.

Les dérivées partielles par rapport à x et à y d'une fonction $f(x,y)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

respectivement, lorsque les limites existent. Les dérivées partielles de fonctions de plus de deux variables sont définies de façon analogue.

Les dérivées partielles sont très utilisées, et il existe plusieurs notations qui peuvent être mieux ou moins bien adaptées à un contexte donné.

Définition 2.3.3

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ d'une fonction $f(x,y)$ est aussi notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x(x,y), \quad f_x, \quad D_x f(x,y), \quad D_x f, \quad D_1 f(x,y), \quad D_1 f.$$

L'indice 1 dans $D_1 f$ signifie que f est différentiée par rapport à sa première variable. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ est aussi notée $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(a,b)}$, où la barre verticale et l'indice (a,b) servent à indiquer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est évaluée au point $(x,y)=(a,b)$.

La notation $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ est utilisée pour rendre explicite le fait que la variable y est maintenue constante[a].

Interprétation géométrique des dérivées partielles

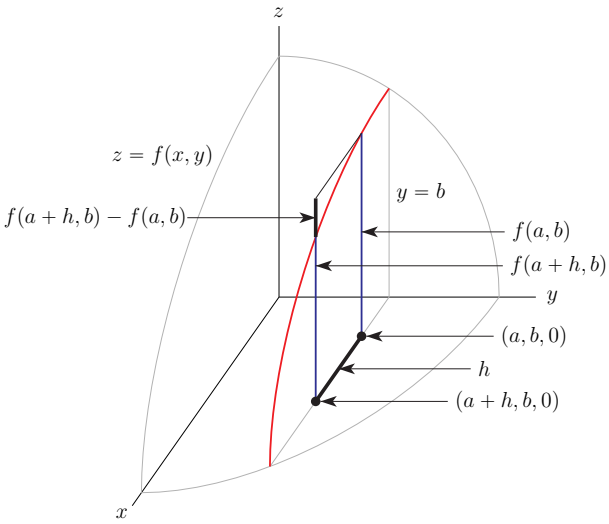
Nous allons maintenant voir l'interprétation géométrique de la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

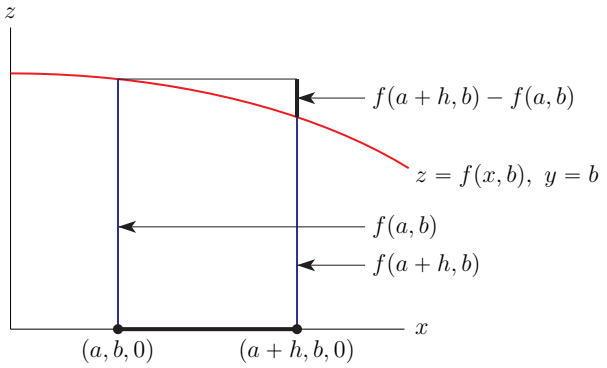
en termes du graphe $z=f(x,y)$ de la fonction $f(x,y)$. Ce graphe est illustré dans la figure ci-bas. Il ressemble à une partie d'une sphère un peu déformée dans le premier octant.

[a] Il existe des applications dans lesquelles il y a plusieurs variables qui ne peuvent pas varier de façon indépendante. Par exemple, la pression, le volume et la température d'un gaz idéal sont liés par l'équation $PV = (\text{constante})T$. Dans ces applications, savoir quelles sont les variables qui sont maintenues fixes peut être ambigu.

La définition de $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ fait intervenir seulement des points sur le graphe qui satisfont $y=b$, c'est-à-dire des points sur la courbe intersection de la surface $z=f(x,y)$ avec le plan $y=b$. Il s'agit de la courbe rouge dans la figure. Les deux segments verticaux bleus ont des hauteurs $f(a,b)$ et $f(a+h,b)$, qui sont les deux termes dans le numérateur de $\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$.



Une vue de côté (en regardant du côté gauche de l'axe des y) est esquissée dans la figure ci-contre. De nouveau, les deux segments verticaux bleus ont des longueurs $f(a,b)$ et $f(a+h,b)$, qui sont les deux termes du numérateur de $\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$.



Ainsi, le numérateur $f(a+h,b)-f(a,b)$ et le dénominateur h sont respectivement la variation verticale et la variation horizontale de la courbe $z=f(x,b)$ de $x=a$ à $x=a+h$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ est précisément la *pente de (la tangente à) la courbe intersection de la surface $z=f(x,y)$ avec le plan $y=b$ au point $(a,b,f(a,b))$*.

De la même façon, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ est la *pente de (la tangente à) la courbe intersection de la surface $z=f(x,y)$ avec le plan $x=a$ au point $(a,b,f(a,b))$*.



À vous de jouer 2.3.4

L'intersection du plan d'équation $y=1$ et de la surface de la fonction $z=x^3+5xy-y^3$ est une courbe de l'espace.

Déterminer la pente m de la tangente à cette courbe au point $P(1,1,5)$.

$m=$ _____

Évaluation des dérivées partielles

Il suit de la discussion ci-haut que l'on peut calculer les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}$ en tirant profit de ce que l'on connaît au sujet des dérivées usuelles $\frac{d}{dx}$. Plus précisément :

- Pour évaluer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, on traite y dans $f(x,y)$ comme une constante et l'on dérive la fonction de x qui en résulte selon les règles usuelles.
- Pour évaluer $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on traite x dans $f(x,y)$ comme une constante et l'on dérive la fonction de y qui en résulte selon les règles usuelles.
- Pour évaluer $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, on traite y dans $f(x,y)$ comme une constante et l'on dérive par rapport à x selon les règles usuelles, puis on évalue en $x=a$, $y=b$.
- Pour évaluer $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, on traite x dans $f(x,y)$ comme une constante et l'on dérive par rapport à y selon les règles usuelles, puis on évalue en $x=a$, $y=b$.

Voyons quelques exemples.

Exemple 2.3.5

Soit $f(x,y)=x^3+y^2+4xy^2$. Alors, puisque $\frac{\partial}{\partial x}$ traite y comme une constante,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3)+\frac{\partial}{\partial x}(y^2)+\frac{\partial}{\partial x}(4xy^2)\\ &= 3x^2+0+4y^2\frac{\partial}{\partial x}(x)=3x^2+4y^2,\end{aligned}$$

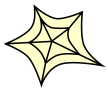
et puisque $\frac{\partial}{\partial y}$ traite x comme une constante,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(4xy^2)\\ &= 0+2y+4x\frac{\partial}{\partial y}(y^2)=2y+8xy.\end{aligned}$$

En particulier, à $(x,y)=(1,0)$, ces dérivées partielles prennent les valeurs

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=3(1)^2+4(0)^2=3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=2(0)+8(1)(0)=0.$$

À vous de jouer 2.3.6



Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f(x,y)=\ln\left(\frac{2x-4y}{2x+4y}\right)$ au point $(x,y)=(3,2)$.

(a) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,2)} =$ _____

(b) $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3,2)} =$ _____

Exemple 2.3.7

Soit $f(x,y)=y\cos x+xe^{xy}$. Alors, puisque $\frac{\partial}{\partial x}$ traite y comme une constante, $\frac{\partial}{\partial x}e^{yx}=ye^{yx}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{\partial}{\partial x}(\cos x)+e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(x)+x\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right) \qquad \text{(règle du produit)}$$

$$\begin{aligned} &= -y\sin x + e^{xy} + xye^{xy}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \cos x \frac{\partial}{\partial y}(y) + x\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) \\ &= \cos x + x^2 e^{xy}. \end{aligned}$$

Voyons maintenant une fonction de quatre variables.

Exemple 2.3.8

Soit $f(x,y,z,t) = x\sin(y+2z) + t^2 e^{3y}\ln z$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t) &= \sin(y+2z), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,t) &= x\cos(y+2z) + 3t^2 e^{3y}\ln z, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t) &= 2x\cos(y+2z) + t^2 e^{3y}/z, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t) &= 2te^{3y}\ln z. \end{aligned}$$

Voyons maintenant un exemple plus complexe : la fonction prend une valeur particulière à $(0,0)$. Afin de calculer les dérivées partielles, il faut utiliser la définition.

Exemple 2.3.9 Calcul par la définition.

Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Si $b \neq a$, alors pour tout (x,y) suffisamment près de (a,b), $f(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{x-y}$, et l'on peut calculer les dérivées partielles de f au point (a,b) avec les règles usuelles de calcul. Cependant, les choses sont différentes si $(a,b) = (0,0)$. Pour calculer $f_x(0,0)$, on doit faire $y = 0$ et trouver la dérivée de

$$f(x,0) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

par rapport à x au point $x = 0$. Comme on ne peut pas utiliser les règles usuelles, on doit utiliser la définition pour calculer la dérivée :

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos h - 1}{h} - 0}{h} && (h \neq 0 \text{ dans la limite}) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{2h} && (\text{l'Hôpital}) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos h}{2} && (\text{l'Hôpital}) \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On peut évaluer la limite de $\frac{\cos h - 1}{h^2}$ en substituant dans la série de Taylor

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!} - \cdots$$

On peut aussi utiliser la séries de Taylor pour comprendre le comportement de $f(x,y)$ lorsque (x,y) est près de $(0,0)$. Pour $x \neq y$,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - \cos y}{x-y} &= \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right] - \left[1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right]}{x-y} \\
&= \frac{-\frac{x^2-y^2}{2!} + \frac{x^4-y^4}{4!} - \cdots}{x-y} \\
&= -\frac{1}{2!}\frac{x^2-y^2}{x-y} + \frac{1}{4!}\frac{x^4-y^4}{x-y} - \cdots \\
&= -\frac{x+y}{2!} + \frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{4!} - \cdots
\end{aligned}$$

De sorte que (x,y) près de $(0,0)$,

$$f(x,y) \approx \begin{cases} -\frac{x+y}{2} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Ainsi, il semble (et c'est en fait le cas) que

- $f(x,y)$ est continue à $(0,0)$, et
- $f(x,y)$ n'est pas continue à (a,a) lorsque $a \neq 0$ et que a est petit, et
- $f_x(0,0) = f_y(0,0) = -\frac{1}{2}$.

Remarquons que cet exemple montre que l'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité, contrairement au cas des fonctions à une variable où la dérivabilité en un point entraîne la continuité. Nous pouvons examiner davantage cet exemple.

Exemple 2.3.10 L'exemple 2.3.9 revisité.

Soit à nouveau

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

On calcule $f_y(x,y)$ pour tout (x,y).

Le cas $y \neq x$: Lorsque $y \neq x$,

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\cos x - \cos y}{x-y} \\
&= \frac{(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(\cos x - \cos y) - (\cos x - \cos y)\frac{\partial}{\partial y}(x-y)}{(x-y)^2} \\
&\qquad\qquad \text{(quotient)} \\
&= \frac{(x-y)\sin y + \cos x - \cos y}{(x-y)^2}.
\end{aligned}$$

Le cas $y = x$: Lorsque $y = x$,

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,x+h)-f(x,x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos x-\cos(x+h)}{x-(x+h)}-0}{h} \qquad \text{(puisque } h\neq 0 \text{ dans la limite)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h^2}. \end{aligned}$$

On applique maintenant la règle de l'Hôpital, en gardant à l'esprit que, pour le calcul de cette limite, x est une constante et h est la variable : on doit donc dériver par rapport à h.

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(x+h)}{2h}$$

Notons, d'une part, que si x n'est pas un multiple entier de π, alors le numérateur $-\sin(x+h)$ *ne tend pas* vers zéro lorsque h tend vers zéro, et la limite définissant $f_y(x,y)$ n'existe pas. D'autre part, si x est un multiple entier de π, alors le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro lorsque h le fait, et l'on peut appliquer la règle de l'Hôpital de nouveau.

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos(x+h)}{2} \\ &= -\frac{\cos x}{2} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)\sin y+\cos x-\cos y}{(x-y)^2} & \text{si } x\neq y \\ -\frac{\cos x}{2} & \text{si } x=y=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x=y \text{ avec } x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Exemple 2.3.11 Les dérivées partielles sans la continuité.

Dans cet exemple, on verra que la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-y} & \text{si } x\neq y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$

n'est pas continue à $(0,0)$, mais que les deux dérivées partielles $f_x(0,0)$ et $f_y(0,0)$ existent. Calculons les dérivées partielles. Par définition,

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\frac{h^2}{h-0}}^{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} 1, \\ &= 1 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2}{0-h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que les dérivées partielles $f_x(0,0)$ et $f_y(0,0)$ existent.

Pour voir que, néanmoins, $f(x,y)$ n'est pas continue à $(0,0)$, on considère la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ le long de la courbe $y = x - x^3$. Cette limite est

$$\lim_{x\to 0} f\left(x, x-x^3\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-(x-x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x},$$

qui n'existe pas. En effet, lorsque x tend vers 0 par la droite, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, et lorsque x tend vers 0 par la gauche, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

Regardons de plus près comment ceci est possible. Il se trouve que $f_x(0,0)$ fait intervenir seulement des valeurs de $f(x,y)$ avec $y = 0$. D'une part, comme $f(x,0) = x$, pour toute valeur de x, on a que $f(x,0)$ est continue et différentiable. Quelque chose de semblable arrive pour $f_y(0,0)$. D'autre part, le mauvais comportement de $f(x,y)$ pour (x,y) près de $(0,0)$ se présente seulement lorsque x et y sont tous les deux non nuls.

Voyons maintenant un exemple de dérivée partielle déguisée en limite.

Exemple 2.3.12

Dans cet exemple, nous allons évaluer la limite

$$\lim_{z\to 0} \frac{(x+y+z)^3 - (x+y)^3}{(x+y)z}.$$

L'observation cruciale est que, lorsque l'on prend la limite pour $z \to 0$, x et y sont fixes. Ainsi, ils ne varient pas à mesure que z devient de plus en plus petit. De plus, cette limite est exactement de la forme de celles qui apparaissent dans la définition des dérivées partielles (voir définition 2.3.2).

Soit

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)^3}{(x+y)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \frac{(x+y+z)^3 - (x+y)^3}{(x+y)z} &= \lim_{z\to 0} \frac{f(x,y,z) - f(x,y,0)}{z} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y,0+h) - f(x,y,0)}{h} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{(x+y+z)^3}{x+y}\right]_{z=0}.
\end{aligned}$$

Rappelons que $\frac{\partial}{\partial z}$ traite x et y comme des constantes et donc que nous évaluons une fonction de la forme $\frac{(\text{const}+z)^3}{\text{const}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \frac{(x+y+z)^3 - (x+y)^3}{(x+y)z} &= 3\frac{(x+y+z)^2}{x+y}\Big|_{z=0} \\
&= 3(x+y).
\end{aligned}$$

Quoique les ressemblances avec le cas des fonctions à une variable soient grandes, nous avons déjà rencontré une différence significative : l'existence des dérivées partielles ne garantit pas la continuité.

Voyons maintenant une autre différence qui est souvent source d'erreur. Si $y = y(x)$ est

donnée et que l'on peut résoudre pour x en fonction de y et écrire $x = x(y)$, alors on aura

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Il est tentant de penser que ceci tient, car il suffit « d'inverser une fraction », mais il n'en est rien. La validité de la formule ci-haut repose sur la dérivation des fonctions composées. L'exemple suivant montre que la formule analogue pour les fonctions à plusieurs variables n'est pas valable, c'est-à-dire qu'on n'a généralement pas l'égalité

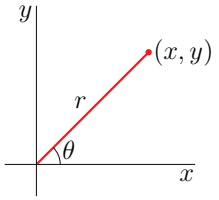
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Comme dans le cas des fonctions à une variable, la règle de dérivation des fonctions composées fournira un résultat semblable, mais nous devons patienter quelques sections avant de le présenter.

Exemple 2.3.13

Rappelons que les coordonnées rectangulaires et les coordonnées polaires (pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $r > 0$) sont liées par les formules :

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \frac{y}{x} &= \tan\theta. \end{aligned}$$



Nous allons utiliser les fonctions

$$x(r, \theta) = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Fixons un point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, et soit (r_0, θ_0), $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$ ses coordonnées polaires. On a alors

$$\frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Voyons sous quelles conditions nous avons $\frac{\partial x}{\partial r} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{-1}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \left(\frac{\partial r}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^{-1} &\iff \cos\theta_0 = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\right)^{-1} = (\cos\theta_0)^{-1} \\ &\iff \cos^2\theta_0 = 1 \\ &\iff \theta_0 = 0, \pi. \end{aligned}$$

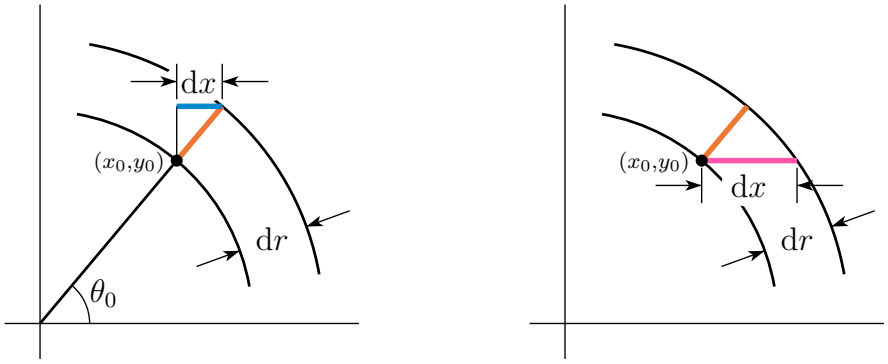
Ceci suffit à montrer que l'égalité ne tient pas toujours quand d'autres variables interviennent.

Cependant, on peut comprendre ce qu'il arrive à l'aide d'une figure. Par définition, les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r}(r_0, \theta_0) &= \lim_{dr \to 0} \frac{x(r_0 + dr, \theta_0) - x(r_0, \theta_0)}{dr}, \\ \frac{\partial r}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{dx \to 0} \frac{r(x_0 + dx, y_0) - r(x_0, y_0)}{dx}, \end{aligned}$$

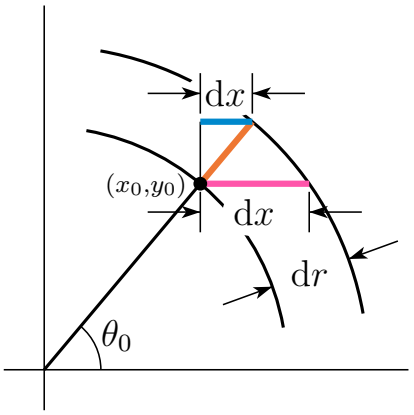
où nous avons écrit dr ou dx au lieu du h de la définition 2.3.2.

D'une part, lorsqu'on calcule $\frac{\partial x}{\partial r}(r_0, \theta_0)$, θ_0 est maintenu constant, r varie d'une petite quantité dr, et la variation résultante en x est calculée par $dx = x(r_0 + dr, \theta_0) - x(r_0, \theta_0)$. Dans la figure de gauche, dr est la longueur du segment orange, et dx est la longueur du segment bleu.



D'autre part, lorsqu'on calcule $\frac{\partial r}{\partial x}$, y est maintenu fixe, tandis que x change d'une petite quantité dx, et la variation résultante en r est donnée par $dr = r(x_0 + dx, y_0) - r(x_0, y_0)$. Dans la figure de droite ci-haut, dx est la longueur du segment rose tandis que dr est la longueur du segment orange.

Ci-bas, on présente les deux figures ensemble. Nous avons arrangé les choses pour avoir le même dr dans les calculs. Afin que les deux dr soient le même, les deux dx doivent être différents (sauf si $\theta_0 = 0, \pi$). Ainsi, en général, $\frac{\partial x}{\partial r}(r_0, \theta_0) \neq \left(\frac{\partial r}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^{-1}$.



Dérivées d'ordre supérieur

Nous avons déjà observé dans les cours de calcul précédents que si $f(x)$ est une fonction x, alors sa dérivée, $\frac{df}{dx}(x)$, en est une aussi et peut donc être dérivée pour obtenir la dérivée seconde $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$, qui peut à son tour être dérivée pour obtenir la dérivée tierce $f^{(3)}(x)$, et ainsi de suite.

On peut faire la même chose pour les fonctions de plus de deux variables. Si $f(x, y)$ est une fonction de x et y, alors ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont aussi des fonctions de x et y. Elles peuvent donc être dérivées par rapport à x et à y. Ainsi, il y a quatre possibles dérivées du deuxième ordre pour f, les voici avec les différentes notations qu'on utilise :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \quad = f_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{xy}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{yx}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y).$$

Notons que, dans $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$, la dérivée qui est le plus près de f, dans ce cas $\frac{\partial}{\partial x}$, est effectuée en premier.

Lorsqu'on écrit f_{xy}, la dérivée par rapport à la variable apparaissant le plus près de f, dans ce cas x, est appliquée en premier.

Exemple 2.3.14

Soit $f(x,y) = e^{my}\cos(nx)$. Alors,

$$f_x = -ne^{my}\sin(nx), \qquad f_y = me^{my}\cos(nx),$$
$$f_{xx} = -n^2 e^{my}\cos(nx), \qquad f_{yx} = -mne^{my}\sin(nx),$$
$$f_{xy} = -mne^{my}\sin(nx), \qquad f_{yy} = m^2 e^{my}\cos(nx).$$

Exemple 2.3.15

Soit $f(x,y) = e^{\alpha x+\beta y}$. Alors,

$$f_x = \alpha e^{\alpha x+\beta y}, \qquad f_y = \beta e^{\alpha x+\beta y},$$
$$f_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta y}, \qquad f_{yx} = \beta\alpha e^{\alpha x+\beta y},$$
$$f_{xy} = \alpha\beta e^{\alpha x+\beta y}, \qquad f_{yy} = \beta^2 e^{\alpha x+\beta y}.$$

Plus généralement, pour tout choix d'entiers $m, n \geqslant 0$,

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\, \partial y^n} = \alpha^m \beta^n e^{\alpha x+\beta y}.$$



À vous de jouer 2.3.16

Calculer toutes les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre da la fonction $f(x,y) = -1\sin(2x+y) - 1\cos(x-y)$.

A. $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x =$ _____

B. $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y =$ _____

C. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} =$ _____

D. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} =$ _____

E. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} =$ _____

F. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} =$ _____

Exemple 2.3.17

Si $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4\, x_2^3\, x_3^2\, x_4$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 f}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3\, \partial x_4} &= \frac{\partial^3}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\left(x_1^4\, x_2^3\, x_3^2\right)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2}\left(2\, x_1^4\, x_2^3\, x_3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(6\, x_1^4\, x_2^2\, x_3\right)\\ &= 24\, x_1^3\, x_2^2\, x_3\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 f}{\partial x_4\, \partial x_3\, \partial x_2\, \partial x_1} &= \frac{\partial^3}{\partial x_4\, \partial x_3\, \partial x_2}\left(4x_1^3\, x_2^3\, x_3^2\, x_4\right)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_4\, \partial x_3}\left(12\, x_1^3\, x_2^2\, x_3^2\, x_4\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_4}\left(24\, x_1^3\, x_2^2\, x_3\, x_4\right)\\ &= 24\, x_1^3\, x_2^2\, x_3.\end{aligned}$$

Remarque 2.3.18

Remarquons que

(a) dans l'exemple 2.3.14, $f_{xy} = f_{yx} = -mne^{my}\sin(nx)$;

(b) dans l'exemple 2.3.15, $f_{xy} = f_{yx} = \alpha\beta e^{\alpha x+\beta y}$;

(c) dans l'exemple 2.3.17,

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3\, \partial x_4} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_4\, \partial x_3\, \partial x_2\, \partial x_1} = 24\, x_1^3\, x_2^2\, x_3.$$

Dans tous ces exemples, l'ordre pour le calcul des dérivées partielles est sans importance. Le théorème ci-après[a] montre qu'il ne s'agit pas d'un accident.

Théorème 2.3.19 Théorème de Clairaut-Schwarz.

Soit f une fonction de deux variables telle que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues dans un voisinage de (x_0, y_0)[a]. Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Démonstration. Voici une des grandes lignes de la preuve du théorème 2.3.19. Les détails (numérotés) se trouvent dans le paragraphe ci-bas.

[a] L'histoire de ce théorème important est assez alambiquée. Voir « A Note on the History of Mixed Partial Derivatives », par Thomas James Higgins, publié dans *Scripta Mathematica* **7** (1940), 59-62. Le théorème est nommé en l'honneur du mathématicien, astronome et géophysicien français Alexis Clairaut (1713-1765) et de Hermann Schwarz (1843-1921), un mathématicien allemand.

Fixons deux réels x_0 et y_0, et définissons

$$F(h,k) = \frac{1}{hk}\big[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)\big].$$

On définit $F(h,k)$ de cette façon parce que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ sont limites de $F(h,k)$ lorsque $h, k \to 0$. Précisément, on montre dans l'élément (1) (voir les détails dans le paragraphe suivant) que

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} F(h,k),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} F(h,k).$$

Remarquez que les deux membres de droite sont identiques sauf pour l'ordre des passages aux limites.

En vertu du théorème des accroissements finis (4 fois),

$$\begin{aligned} F(h,k) &\overset{(2)}{=} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_1 k)\right] \\ &\overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k) \\ F(h,k) &\overset{(4)}{=} \frac{1}{k}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0)\right] \\ &\overset{(5)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k) \end{aligned}$$

pour certains réels $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 < 1$. Tous les réels $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ dépendent de x_0, y_0, h, k. Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)$$

pour tout h et k. En prenant la limite lorsque $(h,k) \to (0,0)$ et en vertu de la continuité des dérivées partielles au point (x_0, y_0), on obtient

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} F(h,k) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

comme on voulait. Afin de compléter la preuve, on doit justifier les détails (1), (2), (3), (4) et (5).

Les détails.

(1) Par définition,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}\right] \\ &= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk} \\ &= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} F(h,k). \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)}{k} - \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk}$$
$$= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} F(h,k).$$

(2) Le théorème des accroissements finis dit que, pour toute fonction dérivable $\varphi(x)$,

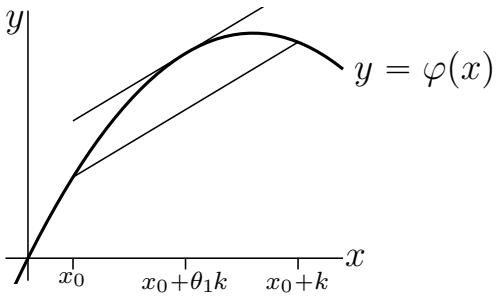
- la pente de la droite joignant les points $(x_0,\varphi(x_0))$ et $(x_0+k,\varphi(x_0+k))$ sur la courbe de φ

est la même que

- la pente de la tangente à la courbe en un point d'abscisse comprise entre x_0 et x_0+k,

c'est-à-dire qu'il existe un θ_1 vérifiant $0<\theta_1<1$ tel que

$$\frac{\varphi(x_0+k)-\varphi(x_0)}{k} = \frac{d\varphi}{dx}(x_0+\theta_1 k).$$



Utilisons le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $G(y) = f(x_0+h,y) - f(x_0,y)$ (donc avec y dans le rôle de x), ce qui donne

$$\frac{G(y_0+k)-G(y_0)}{k} = \frac{dG}{dy}(y_0+\theta_1 k) \qquad \text{(pour un certain } 0<\theta_1<1)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_1 k).$$

Ainsi, pour un certain $0<\theta_1<1$,

$$F(h,k) = \frac{1}{h}\left[\frac{G(y_0+k)-G(y_0)}{k}\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_1 k)\right].$$

(3) Définissons $H(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta_1 k)$. En vertu du théorème des accroissements finis,

$$F(h,k) = \frac{1}{h}\left[H(x_0+h)-H(x_0)\right]$$
$$= \frac{dH}{dx}(x_0+\theta_2 h) \qquad \text{(pour un certain } 0<\theta_2<1)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k).$$

(4) Définissons $A(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$. En vertu du théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} F(h,k) &= \frac{1}{k}\left[\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\right] \\ &= \frac{1}{k}\frac{dA}{dx}(x_0+\theta_3 h) \qquad \text{(pour un certain } 0<\theta_3<1\text{)} \\ &= \frac{1}{k}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0)\right]. \end{aligned}$$

(5) Définissons $B(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_3 h, y)$. En vertu du théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} F(h,k) &= \frac{1}{k}\left[B(y_0+k) - B(y_0)\right] \\ &= \frac{dB}{dy}(y_0+\theta_4 k) \qquad \text{(pour un certain } 0<\theta_4<1\text{)} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k). \end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration du théorème 2.3.19. ■

Exemple 2.3.20 Un exemple où $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.

Dans le théorème 2.3.19, nous avons montré que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$ ***si*** les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues en (x_0, y_0). Cet exemple montre que ces hypothèses ne peuvent pas être relâchées : si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont discontinues en (x_0, y_0), alors on peut avoir $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.

Considérons la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction est continue partout. Remarquons aussi que $f(x,0) = 0$ pour tout x et que $f(0,y) = 0$ pour tout y. Calculons les dérivées partielles du premier ordre. Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x}{x^2+y^2} - xy\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{2y}{x^2+y^2} - xy\frac{2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{4yx^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Pour $(x,y) = (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left[\frac{d}{dx}f(x,0)\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}0\right]_{x=0} = 0,$$

[a] C'est-à-dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que les dérivées secondes sont continues en tout point (x,y) vérifiant $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \epsilon$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left[\frac{d}{dy} f(0,y)\right]_{y=0} = \left[\frac{d}{dy} 0\right]_{y=0} = 0.$$

En somme, les dérivées partielles du premier ordre sont

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$f_y(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continues. Par ailleurs, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \left[\frac{d}{dx} f_y(x,0)\right]_{x=0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f_y(h,0) - f_y(0,0)\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\frac{h^2-0^2}{h^2+0^2} - 0\right] = 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \left[\frac{d}{dy} f_x(0,y)\right]_{y=0} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left[f_x(0,k) - f_x(0,0)\right] \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left[k\frac{0^2-k^2}{0^2+k^2} - 0\right] = -1. \end{aligned}$$

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Le diagramme ci-contre montre quelques courbes de niveau d'une fonction $f(x,y)$, ainsi que trois points A, B, C.

(a) Sans calculer f_x ni f_y, déterminer leur signe en chacun de ces points, uniquement à partir du diagramme.

(b) La fonction considérée est en fait $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y$. Calculez les dérivées partielles et comparez vos résultats avec ceux de la question précédente.

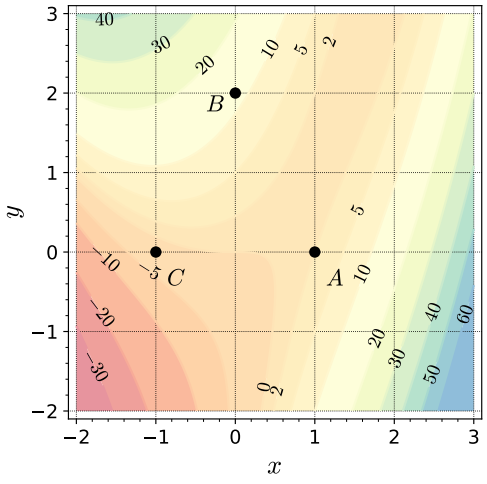


Figure 2.3.21 Courbes de niveau de $f(x,y)$.

2. Soit $f(x,y) = e^x \cos y$. Les tables suivantes donnent des valeurs de $f(x,y)$.

	$x=0$	$x=0.01$	$x=0.1$
$y=-0.1$	0.99500	1.00500	1.09965
$y=-0.01$	0.99995	1.01000	1.10512
$y=0$	1.0	1.01005	1.10517

(a) Trouvez deux valeurs approximatives différentes pour $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en utilisant les données du tableau ci-dessus.

(b) Trouvez deux valeurs approximatives différentes pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ en utilisant les données du tableau ci-dessus.

(c) Évaluez $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ exactement.

3. Soit

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calculez, directement d'après les définitions,

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. (c) $\frac{d}{dt}f(t,t)\Big|_{t=0}$.

4. Trouvez toutes les dérivées partielles premières des fonctions suivantes et évaluez-les au point donné.

(a) $f(x,y,z)=x^3y^4z^5$ en $(0,-1,-1)$.

(b) $w(x,y,z)=\ln(1+e^{xyz})$ en $(2,0,-1)$.

(c) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(-3,4)$.

5. Une surface $z(x,y)$ est définie par $zy-y+x=\ln(xyz)$.

(a) Calculez $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en termes de x, y et z.

(b) Évaluez $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ à $(x,y,z)=(-1,-2,1/2)$.

6. Trouvez $\frac{\partial U}{\partial T}$ et $\frac{\partial T}{\partial V}$ à $(1,1,2,4)$ si (T,U,V,W) vérifient la relation

$$(TU-V)^2\ln(W-UV)=\ln 2$$

7. Supposons que $u=x^2+yz$, $x=\rho r\cos(\theta)$, $y=\rho r\sin(\theta)$ et $z=\rho r$. Trouvez $\frac{\partial u}{\partial r}$ au point $(\rho_0,r_0,\theta_0)=(2,3,\pi/2)$.

8. Utilisez la définition de la dérivée pour évaluer $f_x(0,0)$ et $f_y(0,0)$ pour

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-2y^2}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ 0 & \text{si } x=y\end{cases}$$

9. Définissez la fonction

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+2y)^2}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0\\ 0 & \text{si } x+y=0\end{cases}$$

(a) Évaluez, si possible, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Est-ce que $f(x,y)$ est continue à $(0,0)$?

10.

Considérez le cylindre dont la base est le cercle de rayon 1 dans le plan xy centré à $(0,0)$, et dont la pente est parallèle à la droite dans le plan yz donnée par $z = y$.

Quand vous vous tenez au point $(0,-1,0)$, quelle est la pente de la surface si vous regardez dans la direction des y positifs ? Dans la direction des x positifs ?

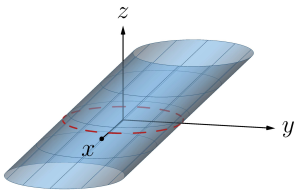


Figure 2.3.22 Le cylindre oblique, dont la base est le cercle unité du plan xy.

Pour mieux comprendre.

11. Vous traversez un paysage vallonné. Considérez que l'axe des z pointe vers le ciel, que l'axe des x positifs pointe vers le sud, et que l'axe des y positifs pointe vers l'est. Alors le paysage autour de vous est décrit par l'équation $z = f(x,y)$, avec vous au point $(0,0,f(0,0))$. La fonction $f(x,y)$ est différentiable.

Supposons que $f_y(0,0) < 0$. Est-t-il possible que vous soyez sur un sommet ? Expliquez.

12. Montrez que la fonction $z(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ vérifie

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0$$

13. Soit f une fonction différentiable quelconque d'une variable. Définissez $z(x,y) = f(x^2+y^2)$. Est-ce que l'équation

$$y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0$$

est nécessairement satisfaite ?

14. Trouvez, si possible, une fonction $f(x,y)$ pour laquelle $f_x(x,y) = e^y$ et $f_y(x,y) = e^x$.

15. Trouvez les dérivées partielles spécifiées.

(a) $f(x,y) = x^2y^3$; $f_{xx}(x,y)$, $f_{xyy}(x,y)$, $f_{yxy}(x,y)$.

(b) $f(x,y) = e^{xy^2}$; $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{xxy}(x,y)$, $f_{xyy}(x,y)$.

(c) $f(u,v,w) = \frac{1}{u+2v+3w}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v \partial w}(u,v,w)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v \partial w}(3,2,1)$.

16. Trouvez toutes les dérivées partielles de deuxième ordre de $f(x,y) = \sqrt{x^2+5y^2}$.

17. Trouvez toutes les dérivées partielles spécifiées.

(a) $f(x,y,z) = \arctan\left(e^{\sqrt{xy}}\right)$; $f_{xyz}(x,y,z)$.

(b) $f(x,y,z) = \arctan\left(e^{\sqrt{xy}}\right) + \arctan\left(e^{\sqrt{xz}}\right) + \arctan\left(e^{\sqrt{yz}}\right)$; $f_{xyz}(x,y,z)$.

(c) $f(x,y,z) = \arctan\left(e^{\sqrt{xyz}}\right)$; $f_{xx}(1,0,0)$.

Pour aller plus loin.

18. Supposons que toutes les dérivées partielles de troisième ordre de la fonction $f(x,y,z)$ existent et sont continues. Montrez que

$$\begin{aligned} f_{xyz}(x,y,z) = f_{xzy}(x,y,z) = f_{yxz}(x,y,z) = f_{yzx}(x,y,z) \\ = f_{zxy}(x,y,z) = f_{zyx}(x,y,z) \end{aligned}$$

19. Soit $f(r,\theta) = r^m \cos m\theta$ une fonction de r et de θ, où m est un entier positif.

(a) Trouvez les dérivées partielles de deuxième ordre f_{rr}, $f_{r\theta}$, $f_{\theta\theta}$ et évaluez leurs valeurs respectives à $(r,\theta) = (1,0)$.

(b) Déterminez la valeur du nombre réel λ tel que $f(r,\theta)$ satisfait l'équation différentielle

$$f_{rr} + \frac{\lambda}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} = 0.$$

20. Soit $\alpha > 0$ une constante. Montrez que $u(x,y,z,t) = \frac{1}{t^{3/2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4\alpha t)}$ satisfait l'équation de la chaleur

$$u_t = \alpha\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right)$$

pour tout $t > 0$

2.4 Différentiabilité et approximations linéaires

Motivation

Soit f une fonction d'une variable réelle et $\mathcal{C}$ son graphe, c'est-à-dire la courbe d'équation $y = f(x)$. Si f possède une dérivée en x_0, près du point $(x_0, f(x_0))$, la courbe $\mathcal{C}$ ressemble à une droite, la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point. L'équation de la tangente en question est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (*)$$

et la fonction $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est *l'approximation affine de f en x_0*.

Pour un accroissement dx de la variable, l'approximation affine de f prédit une variation

$$df = f'(x_0)\,dx = L(x_0 + dx) - f(x_0),$$

alors que la vraie variation est

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0).$$

Lorsque dx est petit, $df \approx \Delta f$, et l'approximation est d'autant meilleure que dx est petit : c'est l'approximation $f(x) \approx L(x)$. La quantité df est appelée la *différentielle* de f en x_0 ; nous reviendrons sur cette notion pour les fonctions de plusieurs variables.

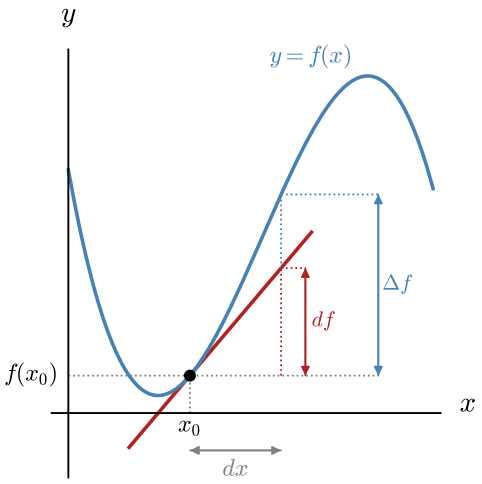


Figure 2.4.1 La variation df prédite par l'approximation affine, comparée à Δf, la vraie variation de f.

Par ailleurs, dans ce cas, le vecteur $\mathbf{i} + f'(x_0)\mathbf{j}$ est un vecteur directeur pour la droite tangente, et il en va de même pour tout vecteur colinéaire à celui-ci.

Si on pense à la courbe comme une courbe paramétrée par $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$, alors $\mathbf{i} + f'(x_0)\mathbf{j}$ est précisément $\mathbf{r}'(x_0)$. De plus tout autre paramétrage de la courbe donnera un vecteur vitesse colinéaire à $\mathbf{r}'(x_0)$. Qui plus est, l'approximation linéaire de $\mathbf{r}$ en x_0 (voir la définition 1.5.20) est

$$\mathbf{L}(x) = \mathbf{r}(x_0) + \mathbf{r}'(x_0)(x - x_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{bmatrix} + (x - x_0) \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{bmatrix},$$

et il s'agit d'un paramétrage de la droite tangente à $\mathcal{C}$ en $(x_0, f(x_0))$.

Approximation affine et plan tangent

Supposons maintenant que nous avons une surface $\mathcal{S}$ donnée par $z = f(x, y)$ qui est suffisamment lisse au point $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Plus on regarde $\mathcal{S}$ de près, plus elle aura l'air d'une portion de plan, qu'on conviendra d'appeler le *plan tangent* à $\mathcal{S}$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. À nouveau, convenons de dire que le plan tangent à $\mathcal{S}$ en P_0 est l'ensemble de tous les vecteurs vitesse en P_0 de toutes les trajectoires qui, se trouvant sur $\mathcal{S}$, passent par P_0.

Nous avons en particulier que les vecteurs $\mathbf{i} + f_x(x_0, y_0)\,\mathbf{k}$ et $\mathbf{j} + f_y(x_0, y_0)\,\mathbf{k}$ sont de tels vecteurs vitesse à $\mathcal{S}$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

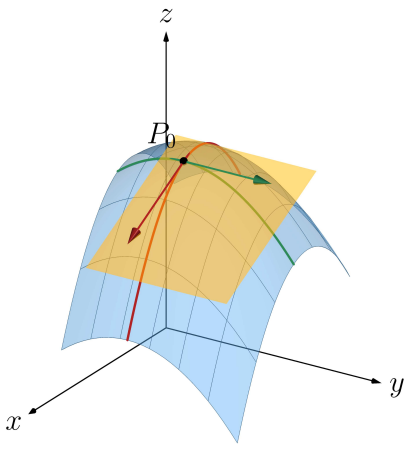


Figure 2.4.2 Le plan tangent en P_0 est engendré par les vecteurs vitesse de deux courbes tracées sur la surface et passant par P_0.

S'il existe, le plan tangent doit contenir ces deux vecteurs vitesse ; comme ils sont clairement

non colinéaires, leur produit vectoriel serait alors un vecteur normal pour ce plan tangent.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 1 \\ \mathbf{k} & f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$
$$= -f_x(x_0,y_0)\,\mathbf{i} - f_y(x_0,y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

S'il existe, le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(x_0\,,\,y_0\,,\,f(x_0,y_0))$ serait donc le plan passant par ce point et ayant pour vecteur normal $-f_x(x_0,y_0)\,\mathbf{i} - f_y(x_0,y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Son équation serait donc

$$-f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0) + (z - f(x_0,y_0)) = 0,$$

ou encore

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0).$$

Définition 2.4.3 Approximation linéaire.

Soit f une fonction ayant des dérivées partielles en un point (x_0,y_0). L'application définie par

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0) \qquad (\dagger)$$

est appelée **l'approximation linéaire de f en** (x_0,y_0).

On reconnaît, dans l'équation obtenue plus haut pour ce plan tangent candidat, exactement $L(x,y)$. C'est pourquoi on voudrait appeler le plan d'équation $z = L(x,y)$ le **plan tangent à la surface** $\mathcal{S} : z = f(x,y)$ **en** $x_0, y_0, f(x_0,y_0)$. Mais, comme on vient de le voir, ceci suppose que le plan tangent existe réellement, c'est-à-dire que *tous* les vecteurs vitesse des courbes passant par ce point sur $\mathcal{S}$ (et pas seulement les deux utilisés ci-dessus) se trouvent bel et bien dans ce plan. Si c'est le cas, le vecteur $-f_x(x_0,y_0)\,\mathbf{i} - f_y(x_0,y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ est orthogonal à ce plan (et donc à $\mathcal{S}$) en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$; la droite passant par $(x_0,y_0,f(x_0,z_0))$ et dirigée par ce vecteur serait alors la **droite normale à $\mathcal{S}$ en ce point**.

Remarquons aussi que si nous écrivons $\mathbf{D}f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ et $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$, cette équation devient simplement

$$z = f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

que nous comparerons à l'équation $(*)$ pour la droite tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$.

Exemple 2.4.4

Déterminer l'approximation linéaire de $f(x,y) = 2x^2y - 3y^2x$ en $(1,2)$.

Solution. Il s'agit simplement d'appliquer convenablement la formule $(\dagger)$. Nous avons que $f(x,y) = 2x^2y - 3y^2x$, avec $x_0 = 1, y_0 = 2$ et $f(x_0,y_0) = -8$. On calcule directement les dérivées partielles de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy - 3y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 6yx$$

et on les évalue en $(1,2)$ pour trouver $f_x(1,2) = 4\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 2^2 = -4$ et $f_y(1,2) = 2\cdot 1^2 - 6\cdot 2\cdot 1 = -10$. L'approximation linéaire est donc

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= -8 - 4(x-1) - 10(y-2) \\ &= 16 - 4x - 10y \end{aligned}$$

À vous de jouer 2.4.5

Trouver l'approximation linéaire de

$$z = e^y + x + x^4 + 2$$

en $(2, 0)$.

$z =$ _____

Finalement, notons que, pour la discussion qui précède, seule l'existence des dérivées partielles a été nécessaire. Or, on sait que ceci n'est même pas une garantie de la continuité des fonctions ! On ne peut donc pas espérer que l'approximation linéaire soit une bonne approximation, utile pour les applications.

Exemple 2.4.6

Soit $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$. Montrer que $f_x(0, 0)$ et $f_y(0, 0)$ existent, et calculer l'approximation linéaire de f en $(0, 0)$. Q n'est pas un véritable plan tangent à la surface $z = f(x, y)$, au sens où on le voudrait.

Solution. Par définition,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} \cdot 0^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

et de même $f_y(0, 0) = 0$. Ainsi, les deux dérivées partielles existent (et sont nulles), de sorte que l'approximation linéaire de f en $(0, 0)$ serait la fonction nulle, $L(x, y) = 0$.

Vérifions si ce plan mérite vraiment le nom de plan tangent. Considérons le chemin donné par $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + f(x(t), y(t))\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^{2/3}\mathbf{k}$. La courbe correspondante se trouve sur la surface $z = f(x, y)$ et passe par l'origine. Nous avons $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{-1/3}\mathbf{k}$, qui n'existe pas pour $t = 0$. Le plan $z = L(x, y) = 0$ n'a pas donc ce qu'il faut !

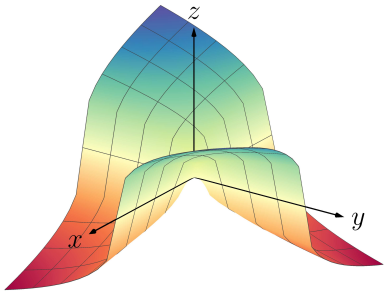


Figure 2.4.7 Le graphe de $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$, avec un point anguleux à l'origine.

La différentiabilité

Nous avons vu comment calculer l'approximation linéaire d'une fonction f autour d'un point $\mathbf{r}_0$. Dans les applications, il importe de savoir à quel point il s'agit d'une bonne approximation.

Regardons le cas des fonctions à une variable. Supposons donc que nous avons une fonction f dérivable en x_0. Son approximation linéaire en x_0 est

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La fonction et son approximation linéaire coïncident en x_0. Par ailleurs, on s'attend à ce que, pour x près de x_0, l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(x)$ par $L(x)$ soit petite. Plus formellement, nous devons comparer l'écart $|f(x) - L(x)|$ à $|x - x_0|$, c'est-à-dire que nous devons

considérer le rapport

$$\frac{|f(x)-L(x)|}{|x-x_0|} = \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|} = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right|.$$

Mais d'après la définition de $f'(x_0)$, cette quantité tend vers 0 lorsque $x \to x_0$. Ainsi, pour une fonction d'une variable, son approximation linéaire, aussitôt qu'elle existe, est une bonne approximation.

Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition 2.4.8

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction avec $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{r}_0$ un point intérieur de $\mathcal{D}$. La fonction f est *différentiable en* $\mathbf{r}_0$ s'il existe une matrice $T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (c'est-à-dire une matrice à une rangée et à n colonnes) telle que

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \frac{|f(\mathbf{r})-f(\mathbf{r}_0)-T(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)|}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|} = 0.$$

Cette définition ne nous dit pas quelle est la matrice T, qu'il faut comprendre comme une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}$. Plus précisément, c'est la partie linéaire de la transformation affine $\mathbf{r} \mapsto f(\mathbf{r}_0) + T(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$. Comme on s'y attend, on peut montrer que T est donnée par les dérivées partielles de f évaluées en $\mathbf{r}_0$.

Théorème 2.4.9

Soit f différentiable en $\mathbf{r}_0$ et $T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$ comme dans la définition 2.4.8. Alors, $t_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{r}_0)$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$, et la matrice T est donnée par

$$T = \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{r}_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix},$$

La matrice $\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)$ est la dérivée de f en $\mathbf{r}_0$, *et la fonction $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $L(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ est appelée l'approximation linéaire de f autour de $\mathbf{r}_0$.*

Démonstration. Soit f différentiable en $\mathbf{r}_0$ et T comme dans la définition. Avant de poursuivre, notons que $T\mathbf{e}_1 = t_1$.

Par ailleurs, posons $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + h\mathbf{e}_1$, nous aurons alors, en vertu de la différentiabilité de f, que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \frac{|f(\mathbf{r})-f(\mathbf{r}_0)-T(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)|}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|f(\mathbf{r}_0+h\mathbf{e}_1)-f(\mathbf{r}_0)-T(h\mathbf{e}_1)|}{\|h\mathbf{e}_1\|} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|f(\mathbf{r}_0+h\mathbf{e}_1)-f(\mathbf{r}_0)-ht_1|}{|h|} \\ &= \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(\mathbf{r})-f(\mathbf{r}_0)}{h} - t_1\right|. \end{aligned}$$

Ceci montre que $t_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}_0)$. Le reste de la preuve se fait de la même façon. ■

Remarque 2.4.10 Retour au plan tangent.

Revenons à la question laissée en suspens : le plan d'équation $z = L(x, y)$, construit uniquement à partir des dérivées partielles de f en (x_0, y_0), est-il vraiment le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$, au sens où *tous* les vecteurs vitesse des courbes tracées sur cette surface et passant par ce point s'y trouvent ?

La réponse est oui, pourvu que f soit différentiable en (x_0, y_0). Ce fait dépend de la règle de la chaîne (voir le théorème 2.5.1), que nous verrons plus loin.

Il est commun de poser $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, de sorte que l'expression pour l'approximation linéaire devient

$$L(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\Delta\mathbf{r}.$$

Voyons un autre exemple de calcul d'approximation linéaire.

Exemple 2.4.11

Soit $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ et $f(\mathbf{r}) = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, calculer l'approximation linéaire de f en (x_0, y_0). Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_x(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Ainsi, $\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \end{bmatrix}$, et l'approximation linéaire cherchée est

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(x - x_0) + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(y - y_0), \end{aligned}$$

ou encore

$$L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,\Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,\Delta y.$$

Avant de poursuivre, notons que la définition de différentiabilité est la même pour les fonctions à valeurs vectorielles, c'est-à-dire les fonctions de la forme $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dans ce cas, pour chaque $\mathbf{r}$ dans le domaine de f, nous avons que $f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire que f a elle-même plusieurs composantes

$$f(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{r}) \end{bmatrix}.$$

Nous nous contentons d'énoncer le résultat suivant, dont la preuve dépasse (de si peu !) le contenu de ce manuel.

Théorème 2.4.12

Soit $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable et $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice telle que

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \frac{\|f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0) - T(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\|}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|} = 0.$$

Alors, toutes les dérivées partielles de toutes les composantes de f existent en $\mathbf{r}_0$, et T est la matrice

$$\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array}\right]\Bigg|_{\mathbf{r}_0}.$$

Dans ce cas, l'approximation linéaire de f autour de $\mathbf{r}_0$ est $L(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$. Encore une fois, la matrice $\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)$ est la dérivée de f en $\mathbf{r}_0$.

Nous pouvons regarder la définition de l'approximation linéaire d'un chemin (voir la définition 1.5.20) d'un autre œil. En effet, si $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$ est un chemin, nous aurons

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, $\mathbf{Dr}(t_0)$ est la matrice de $\mathbb{R}^{m\times 1}$, c'est-à-dire le vecteur colonne à m composantes (puisque $\mathbf{r}$ est une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$)

$$\mathbf{Dr}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_m'(t_0) \end{bmatrix} = \mathbf{r}'(t_0).$$

Il s'agit précisément du vecteur vitesse associé au chemin $\mathbf{r}$. L'approximation linéaire de $\mathbf{r}$ est

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{Dr}(t_0)(t-t_0) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t-t_0),$$

ce qui est bien la formule de la définition 1.5.20.

Notons que, pour les fonctions d'une seule variable, l'existence de la dérivée en un point équivaut à la différentiabilité en ce point. Avec des fonctions de plusieurs variables, les choses changent. Nous verrons plus bas un exemple de fonction dont les dérivées partielles existent, mais qui n'est pourtant pas différentiable. Pire, nous avons vu à l' exemple 2.3.11 qu'il est possible d'avoir des dérivées partielles sans même avoir la continuité ! l'exemple 2.3.11

La notion de différentiabilité telle que définie ci-haut peut être difficile à vérifier. Heureusement, nous disposons du résultat suivant.

Théorème 2.4.13

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles du premier ordre sont continues. Alors, f est différentiable sur $\mathcal{D}$.

En particulier, si f est de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{D}$, alors l'approximation linéaire en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{D}$ donne bel et bien l'équation du plan tangent à la surface au point correspondant, à savoir $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

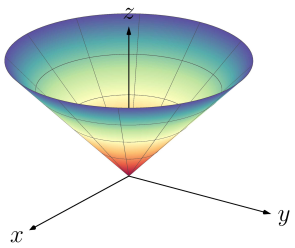
Voyons quelques exemples.

Exemple 2.4.14

Soit $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Voir qu'elle n'est pas différentiable à l'origine.

Solution.

Pour commencer, notons que le graphe de f est la moitié supérieure d'un cône. À l'origine, il n'y a pas de plan qui épouse bien la forme du cône : nous avons un coin prononcé, le graphe ne s'aplatit pas.



De façon plus analytique, calculons les dérivées partielles en $(0,0)$. Nous avons, d'après la définition,

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x},$$

et cette limite n'existe pas. De même, $f_y(0,0)$ n'existe pas. Ainsi, l'approximation linéaire n'existe pas à l'origine. La fonction ne peut pas être différentiable en ce point.

Par ailleurs, étudions les courbes de niveau de f. D'une part, les courbes de niveau autour de l'origine : on voit bien qu'il s'agit de cercles. D'autre part, dans les deux autres figures, on a les courbes de niveau autour du point $(1/2,1/2)$, avec deux facteurs d'agrandissement différents. En ce point, la fonction est différentiable. On observe que plus on regarde de près, plus ces courbes de niveau ressemblent à des droites, c'est-à-dire aux courbes de niveau des fonctions linéaires. C'est ce qu'on entend par « linéarité locale de f ».

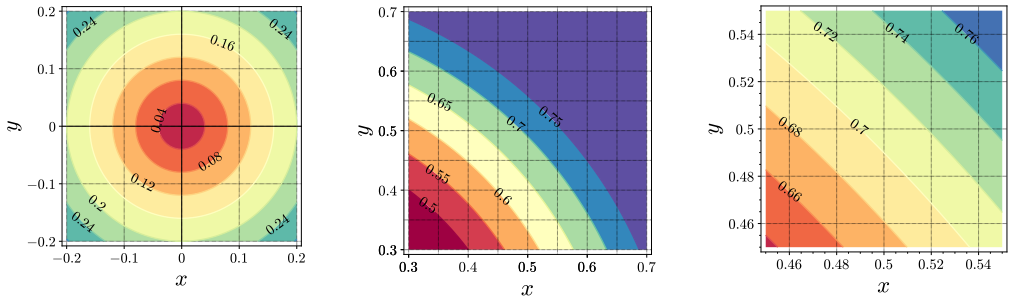


Figure 2.4.15 Les courbes de niveau de f. À gauche, autour de l'origine. Les courbes sont des cercles. Au centre et à droite, les courbes de niveau autour de $(1/2,1/2)$. À mesure qu'on regarde de plus près, ces courbes se voient de plus en plus comme des droites.

Exemple 2.4.16

Considérer la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ lorsque $(x,y) \neq (0,0)$ et que $f(0,0) = 0$. Montrer que les dérivées partielles existent à l'origine, mais que la fonction n'est pas différentiable en ce point.

Solution. Notons tout d'abord qu'il est aisé de montrer (par exemple en utilisant les coordonnées polaires) que la fonction f est continue à l'origine. On trouve ci-contre son graphe — on remarque notamment qu'elle est sévèrement froissée à l'origine — ainsi que ses courbes de niveau près de l'origine, qui ne ressemblent pas à celles d'une fonction linéaire.

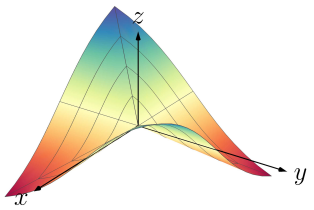


Figure 2.4.17 Le graphe de $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

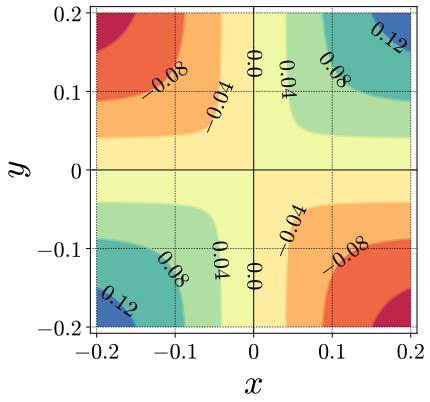


Figure 2.4.18 Les courbes de niveau de f près de l'origine.

Par ailleurs, on calcule les dérivées partielles aisément :

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$

On calcule de même $f_y(0,0) = 0$. Ainsi, $L(\mathbf{r})$, l'approximation linéaire de f autour de $(0,0)$, est la fonction constante égale à zéro. Ceci suggère que la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Voyons ceci de façon plus formelle.

En effet, nous avons

$$\frac{|f(\mathbf{r}) - L(\mathbf{r})|}{\|\mathbf{r} - \mathbf{0}\|} = \frac{|f(\mathbf{r})|}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

et cette quantité ne tend pas vers 0 lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

À la lumière du théorème 2.4.13, nous pouvons conclure qu'au moins une des dérivées partielles de la fonction f n'est pas continue à l'origine.

Si une fonction f est différentiable autour d'un point, c'est qu'elle peut être bien approchée par une fonction linéaire près de ce point. Ces dernières étant continues partout, on a, sans surprise :

Théorème 2.4.19

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point intérieur $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{D}$. Alors, f est continue en $\mathbf{r}_0$.

Notons encore une fois qu'il est possible d'avoir l'existence des dérivées partielles sans la continuité, comme à l' exemple 2.3.11, et l'existence des dérivées partielles sans la différentiabilité, comme à l' exemple 2.4.16. Par ailleurs, il est possible d'avoir des fonctions qui sont différentiables, sans être de classe C^1 (on voit un tel exemple plus bas, il s'agit d'une fonction d'une seule variable).

Exemple 2.4.20

Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Utiliser les définitions pour montrer que f est continue et différentiable en $x = 0$, mais que sa dérivée n'est pas continue en ce point.

Les règles usuelles pour le calcul des dérivées tiennent encore pour les fonctions à plusieurs variables.

Théorème 2.4.21

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ et $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ différentiables en un point $\mathbf{r}_0$ à l'intérieur de $\mathcal{D}$. Alors :

(a) Pour $c \in \mathbb{R}$, la fonction $cf : \mathbf{r} \mapsto cf(\mathbf{r})$ est différentiable en $\mathbf{r}_0$, et

$$\mathbf{D}(cf)(\mathbf{r}_0) = c\,\mathbf{D}(f)(\mathbf{r}_0)\,;$$

(b) La fonction $f + g : \mathbf{r} \mapsto f(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})$ est différentiable en $\mathbf{r}_0$, et

$$\mathbf{D}(f+g)(\mathbf{r}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{r}_0)\,;$$

(c) Si $m = 1$, on peut multiplier les résultats des fonctions f et g. La fonction $fg : \mathbf{r} \mapsto f(\mathbf{r})\,g(\mathbf{r})$ est différentiable en $\mathbf{r}_0$, et

$$\mathbf{D}(fg)(\mathbf{r}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\,g(\mathbf{r}_0) + f(\mathbf{r}_0)\,\mathbf{D}g(\mathbf{r}_0)\,;$$

(d) Si $m = 1$ et que $g(\mathbf{r}) \neq 0$ sur $\mathcal{D}$, alors la fonction $\frac{f}{g} : \mathbf{r} \mapsto \frac{f(\mathbf{r})}{g(\mathbf{r})}$ est différentiable en $\mathbf{r}_0$, et

$$\mathbf{D}\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\,g(\mathbf{r}_0) - f(\mathbf{r}_0)\,\mathbf{D}g(\mathbf{r}_0)}{g(\mathbf{r}_0)^2}.$$

La différentielle et l'estimation des erreurs

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ différentiable en $\mathbf{r}_0$, et posons $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Pour tout $\epsilon > 0$, nous avons que, lorsque $\Delta\mathbf{r}$ est suffisamment petit,

$$\frac{|f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\,\Delta\mathbf{r}|}{\|\Delta\mathbf{r}\|} < \epsilon,$$

c'est-à-dire

$$|f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\,\Delta\mathbf{r}| < \epsilon\,\|\Delta\mathbf{r}\|\,.$$

De là, on tire un version raffinée du principe 2.2.18.

Principe 2.4.22

Si f est différentiable en $\mathbf{r}_0$, on peut estimer les valeurs de f près de $\mathbf{r}_0$ au moyen de son approximation linéaire

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\Delta\mathbf{r}. \qquad (*)$$

Remarquons que si nous posons $\Delta f = f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0)$, alors (∗) s'écrit [1]

$$\Delta f \approx \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\Delta\mathbf{r}.$$

Pour les fonctions à deux variables, si l'on pose $z = f(x, y)$, il est usuel d'écrire

$$\Delta z \approx \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\Delta\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y,$$

et une adaptation évidente est faite si l'on a une fonction de trois variables et l'on pose $w = f(x, y, z)$.

Il faut bien noter que $\Delta f = f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0)$ est la variation réelle de f lorsque le point d'évaluation passe de $\mathbf{r}_0$ à $\mathbf{r}$. Par ailleurs, la quantité $\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ est la variation dans l'approximation linéaire de f. Cette quantité est souvent appelée la *différentielle de f en $\mathbf{r}_0$*, et l'on écrit

$$df = \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\Delta\mathbf{r}.$$

Comme l'écart $\Delta\mathbf{r}$ est arbitraire (et par analogie avec l'usage dans le contexte des fonctions à une variable), on écrit $d\mathbf{r}$ au lieu de $\Delta\mathbf{r}$, et la formule ci-haut devient

$$df = \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)d\mathbf{r}, \qquad (**)$$

qu'on comparera avec la formule $dg = g'(t_0)\,dt$ vue dans les cours de calcul différentiel des fonctions à une variable.

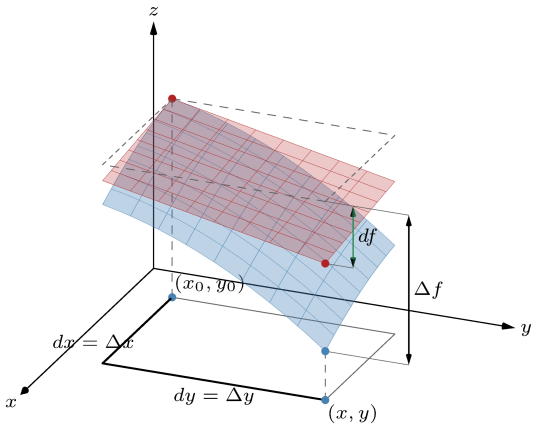


Figure 2.4.23 La différentielle df approche la variation Δf de $f(x, y)$.

De nouveau, et au risque de paraître redondants, spécialisons (∗∗) aux fonctions à deux ou trois variables.

- Pour les fonctions à deux variables,

$$\begin{aligned} df &= f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy, \end{aligned}$$

  ou encore

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

[1] Qu'on comparera à $\Delta g \approx g'(t_0)\Delta t$, expression commune dans les cours de calcul à une variable.

- Pour les fonctions à trois variables,

$$\begin{aligned} df &= f_x(x_0,y_0,z_0)dx + f_y(x_0,y_0,z_0)dy + f_z(x_0,y_0,z_0)dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz, \end{aligned}$$

ou encore

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$$

Voyons maintenant quelques exemples.

Exemple 2.4.24

Trouver une valeur approchée de $\frac{(0.998)^3}{1.003}$.

Solution. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y}$. Nous allons trouver une valeur approchée de $f(0.998,\, 1.003)$. On calcule aisément $f(1,1) = \frac{1^3}{1} = 1$ et, puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2},$$

on trouve aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3\frac{1^2}{1} = 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1^3}{1^2} = -1.$$

Ainsi, on pose $\Delta x = -0.002$ et $\Delta y = 0.003$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{0.998^3}{1.003} &= f(0.998,\, 1.003) = f(1+\Delta x,\, 1+\Delta y) \\ &\approx f\,(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}\,(1,1)\ \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,(1,1)\ \Delta y \\ &\approx 1 + 3(-0.002) - 1(0.003) = 0.991. \end{aligned}$$

On comparera cette valeur à la valeur exacte avec 7 décimales, à savoir 0.9910389.

Exemple 2.4.25

Trouver une valeur approchée de $(4.2)^{1/2} + (26.7)^{1/3} + (256.4)^{1/4}$.

Solution. Soit $f(x,y,z) = x^{1/2} + y^{1/3} + z^{1/4}$. Afin d'approcher $f(4.2\,,\, 26.7\,,\, 256.4)$, nous calculons

$$f(4,27,256) = (4)^{1/2} + (27)^{1/3} + (256)^{1/4} = 2 + 3 + 4 = 9,$$

et puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2x^{1/2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3y^{2/3}} \text{ et} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{4z^{3/4}},$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(4,27,256) &= \frac{1}{2(4)^{1/2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(4,27,256) &= \frac{1}{3(27)^{2/3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(4,27,256) &= \frac{1}{4(256)^{3/4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on pose $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.3$ et $\Delta z = 0.4$, on aura

$$\begin{aligned}(4.2)^{1/2} + (26.7)^{1/3} + (256.4)^{1/4} &= f(4.2,\, 26.7,\, 256.4)\\ &= f(4 + \Delta x,\, 27 + \Delta y,\, 256 + \Delta z)\\ &\approx f\,(4, 27, 256) + \frac{\partial f}{\partial x}\,(4, 27, 256)\ \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,(4, 27, 256)\ \Delta y\\ &\qquad + \frac{\partial f}{\partial z}\,(4, 27, 256)\ \Delta z\\ &\approx 9 + \frac{0.2}{2 \times 2} - \frac{0.3}{3 \times 9} + \frac{0.4}{4 \times 64} = 9 + \frac{1}{20} - \frac{1}{90} + \frac{1}{640}\\ &= 9.0405\end{aligned}$$

arrondi à 10^{-5}. On peut calculer avec une calculatrice ou un ordinateur que la valeur à 10^{-5} près est 9.03980.

Ceci fait une différence de

$$100\frac{9.0405 - 9.0398}{9}\% = 0.008\ \%.$$

Remarquons que nous aurions pu, dans ce cas, utiliser les techniques de calcul différentiel à une variable pour approcher $(4.2)^{1/2}$, $(26.7)^{1/3}$ et $(256.4)^{1/4}$, puis additionner les résultats. En fait, ce qu'on a fait est équivalent.



À vous de jouer 2.4.26

Trouver la fonction $L(x, y)$ représentant l'approximation linéaire de :
$f(x, y) = \sqrt{52 - 4x^2 - 5y^2}$ au point : $(3, 0)$.
$L(x, y) =$ _____
Utiliser ensuite cette approximation linéaire pour estimer la valeur de :
$f(2.9, 0.1) \approx$ _____

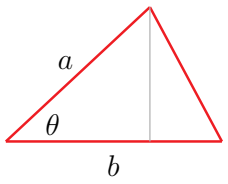
Définition 2.4.27 Erreurs.

Soit Q une quantité approchée par $Q + \Delta Q$. Alors :

- l'erreur absolue dans l'approximation est $|\Delta Q|$;
- l'erreur relative dans l'approximation est $\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right|$;
- le pourcentage d'erreur est $100\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right|$.

Exemple 2.4.28

Un triangle a des côtés de longueur $a = 10.1$ cm et $b = 19.8$ cm formant un angle de 35°. On veut calculer une valeur approchée de l'aire du triangle.



Solution. Le triangle a pour hauteur $h = a\sin\theta$, de sorte que l'aire est

$$A(a,b,\theta) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

Le facteur $\sin\theta$ dans cette formule cache un piège. Nous devons calculer la dérivée de $\sin\theta$, mais la formule usuelle $\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$ n'est vraie que si θ est mesuré en radians — pas en degrés.

Nous devons donc transformer 35° en

$$35^\circ = (30+5)\frac{\pi}{180} \text{ radians} = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{36}\right) \text{ radian}$$

Nous devons donc approcher la valeur de $A(10.1,\ 19.8,\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{36})$. Nous allons choisir naturellement

$$\begin{aligned} a_0 &= 10, & b_0 &= 20, & \theta_0 &= \frac{\pi}{6},\\ \Delta a &= 0.1, & \Delta b &= -0.2, & \Delta\theta &= \frac{\pi}{36}. \end{aligned}$$

On évalue donc

$$\begin{aligned} A\left(a_0,b_0,\theta_0\right) &= \frac{1}{2}a_0b_0\sin\theta_0 = \frac{1}{2}(10)(20)\frac{1}{2} = 50,\\ \frac{\partial A}{\partial a}\left(a_0,b_0,\theta_0\right) &= \frac{1}{2}b_0\sin\theta_0 = \frac{1}{2}(20)\frac{1}{2} = 5,\\ \frac{\partial A}{\partial b}\left(a_0,b_0,\theta_0\right) &= \frac{1}{2}a_0\sin\theta_0 = \frac{1}{2}(10)\frac{1}{2} = \frac{5}{2},\\ \frac{\partial A}{\partial \theta}\left(a_0,b_0,\theta_0\right) &= \frac{1}{2}a_0b_0\cos\theta_0 = \frac{1}{2}(10)(20)\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}, \end{aligned}$$

de sorte que l'approximation linéaire est

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= A(10.1,\ 19.8,\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{36}) = A(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b,\ \theta_0+\Delta\theta)\\ &\approx A\left(a_0,b_0,\theta_0\right) + \frac{\partial A}{\partial a}\left(a_0,b_0,\theta_0\right)\Delta a + \frac{\partial A}{\partial b}\left(a_0,b_0,\theta_0\right)\Delta b\\ &\qquad + \frac{\partial A}{\partial \theta}\left(a_0,b_0,\theta_0\right)\Delta\theta\\ &= 50 + 5\times 0.1 + \frac{5}{2}\times(-0.2) + 50\sqrt{3}\frac{\pi}{36}\\ &= 50 + \frac{5}{10} - \frac{5}{10} + 50\sqrt{3}\frac{\pi}{36}\\ &= 50\left(1+\sqrt{3}\frac{\pi}{36}\right)\\ &\approx 57.56 \end{aligned}$$

à deux décimales près. La valeur exacte, à deux décimales près, est 57.35. Notre approximation entraîne une erreur d'à peu près

$$100\ \frac{57.56-57.35}{57.35}\% = 0.37\ \%.$$

Une autre application des erreurs dues aux approximations linéaires est l'étude de comment les erreurs faites lors de mesures se propagent lors de calculs qui utilisent ces valeurs. Voyons un exemple.

Exemple 2.4.29 exemple 2.4.28, suite.

Supposons que, comme à l' exemple 2.4.28, nous voulons déterminer l'aire d'un triangle en mesurant les longueurs de deux côtés et l'angle qu'ils forment, avec la formule $A(a,b,\theta) = \frac{1}{2}ab\sin\theta$. Bien entendu, dans le monde réel [a], on ne peut pas mesurer les longueurs et les angles de façon exacte. Ainsi, si l'on a besoin de connaître l'aire avec une erreur relative d'au plus 1 %, le problème devient : « Avec quelle précision doit-on calculer les longueurs et l'angle si l'on veut que l'aire calculée n'ait pas une erreur supérieure à 1 % ? »

Soit a_0 et b_0 les longueurs exactes des côtés et θ_0 celle de l'angle, ainsi que $a_0+\Delta a$, $b_0+\Delta b$ et $\theta_0+\Delta\theta$ les valeurs mesurées, de sorte que Δa, Δb et $\Delta\theta$ représentent les erreurs de nos mesures. Alors, l'erreur dans l'aire calculée sera approximativement

$$\begin{aligned}\Delta A &\approx \frac{\partial A}{\partial a}(a_0,b_0,\theta_0)\ \Delta a + \frac{\partial A}{\partial b}(a_0,b_0,\theta_0)\ \Delta b + \frac{\partial A}{\partial \theta}(a_0,b_0,\theta_0)\ \Delta\theta \\ &= \frac{\Delta a}{2}b_0\sin\theta_0 + \frac{\Delta b}{2}a_0\sin\theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}a_0b_0\cos\theta_0,\end{aligned}$$

et le pourcentage d'erreur sera

$$100\frac{|\Delta A|}{A(a_0,b_0,\theta_0)} \approx \left|100\frac{\Delta a}{a_0} + 100\frac{\Delta b}{b_0} + 100\Delta\theta\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right|.$$

En vertu de l'inégalité du triangle, à savoir $|u+v| \leqslant |u|+|v|$, et du fait que $|uv| = |u|\ |v|$,

$$\begin{aligned}&\left|100\frac{\Delta a}{a_0} + 100\frac{\Delta b}{b_0} + 100\Delta\theta\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right| \\ &\qquad\qquad \leqslant 100\left|\frac{\Delta a}{a_0}\right| + 100\left|\frac{\Delta b}{b_0}\right| + 100|\Delta\theta|\ \left|\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right|.\end{aligned}$$

Nous voulons que cette quantité soit inférieure à 1.

Bien entendu, nous ne connaissons pas exactement a_0, b_0 ni θ_0. Mais supposons que nous avons confiance dans le fait que $a_0 \geqslant 10$, $b_0 \geqslant 10$ et $\frac{\pi}{6} \leqslant \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, de sorte que $\cot\theta_0 \leqslant \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \leqslant 2$. Alors,

$$\begin{aligned}100\left|\frac{\Delta a}{a_0}\right| &\leqslant 100\left|\frac{\Delta a}{10}\right| = 10\,|\Delta a|, \\ 100\left|\frac{\Delta b}{b_0}\right| &\leqslant 100\left|\frac{\Delta b}{10}\right| = 10\,|\Delta b|, \\ 100|\Delta\theta|\ \left|\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right| &\leqslant 100|\Delta\theta|\ 2 = 200\,|\Delta\theta|\end{aligned}$$

et

$$100\frac{|\Delta A|}{A(a_0,b_0,\theta_0)} \leqslant 10\,|\Delta a| + 10\,|\Delta b| + 200\,|\Delta\theta|,$$

de sorte qu'il suffira d'avoir des erreurs de mesure $|\Delta a|$, $|\Delta b|$ et $|\Delta\theta|$ vérifiant

$$10\,|\Delta a| + 10\,|\Delta b| + 200\,|\Delta\theta| < 1.$$

[a] Dans notre « monde réel », tout le monde utilise le calcul.

Exemple 2.4.30

Supposons que trois variables sont mesurées avec un pourcentage d'erreur ε_1, ε_2 et ε_3 respectivement. En d'autres termes, si la valeur exacte de la variable i est x_i et que l'erreur mesurée de cette même variable est $x_i + \Delta x_i$, alors

$$100 \left| \frac{\Delta x_i}{x_i} \right| = \varepsilon_i.$$

Supposons de plus qu'une quantité P se calcule comme le produit de trois variables. Ainsi, la valeur exacte de P est $P(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$, et la valeur calculée à partir des mesures est $P(x_1 + \Delta x_1,\, x_2 + \Delta x_2,\, x_3 + \Delta x_3)$. Quel est le pourcentage d'erreur dans cette valeur calculée de P ?

Solution. Le pourcentage d'erreur dans la valeur calculée $P(x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\, x_3+\Delta x_3)$ est

$$100 \left| \frac{P(x_1 + \Delta x_1,\, x_2 + \Delta x_2,\, x_3 + \Delta x_3) - P(x_1, x_2, x_3)}{P(x_1, x_2, x_3)} \right|.$$

On peut obtenir une valeur approchée beaucoup plus simple qui est souvent suffisante dans les applications. L'approximation linéaire donne

$$\begin{aligned} &P(x_1 + \Delta x_1,\, x_2 + \Delta x_2,\, x_3 + \Delta x_3) \\ &\qquad \approx P(x_1, x_2, x_3) + P_{x_1}(x_1, x_2, x_3)\, \Delta x_1 + P_{x_2}(x_1, x_2, x_3)\, \Delta x_2 \\ &\qquad\qquad + P_{x_3}(x_1, x_2, x_3)\, \Delta x_3. \end{aligned}$$

Les trois dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} P_{x_1}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\big[x_1 x_2 x_3\big] = x_2 x_3, \\ P_{x_2}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\big[x_1 x_2 x_3\big] = x_1 x_3, \\ P_{x_3}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_3}\big[x_1 x_2 x_3\big] = x_1 x_2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &P(x_1 + \Delta x_1,\, x_2 + \Delta x_2,\, x_3 + \Delta x_3) \\ &\qquad \approx P(x_1, x_2, x_3) + x_2 x_3\, \Delta x_1 + x_1 x_3\, \Delta x_2 + x_1 x_2\, \Delta x_3, \end{aligned}$$

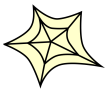
et le pourcentage d'erreur (approchée) pour P est

$$\begin{aligned} &100 \left| \frac{P(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - P(x_1, x_2, x_3)}{P(x_1, x_2, x_3)} \right| \\ &\qquad \approx 100 \left| \frac{x_2 x_3 \Delta x_1 + x_1 x_3 \Delta x_2 + x_1 x_2 \Delta x_3}{P(x_1, x_2, x_3)} \right| \\ &\qquad = 100 \left| \frac{x_2 x_3 \Delta x_1 + x_1 x_3 \Delta x_2 + x_1 x_2 \Delta x_3}{x_1 x_2 x_3} \right| \\ &\qquad = \left| 100 \frac{\Delta x_1}{x_1} + 100 \frac{\Delta x_2}{x_2} + 100 \frac{\Delta x_3}{x_3} \right| \\ &\qquad \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Plus généralement, si l'on prend n variables plutôt que 3, le pourcentage d'erreur dans le produit devient approximativement $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. C'est la base de la règle du pouce en sciences

expérimentales qui dit que quand on prend des produits, les pourcentages d'erreur s'additionnent.

Encore plus généralement, si l'on prend un produit $\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}$, alors le pourcentage d'erreur dans ce produit est approximativement $\sum_{i=1}^{n} |m_i|\varepsilon_i$.



À vous de jouer 2.4.31

Utiliser des différentielles pour estimer la quantité de métal que contient une boîte de conserve fermée ayant un diamètre de 10.8 cm et une hauteur de 12 cm. L'épaisseur du métal du dessus et du dessous de la boîte est 0.1 cm, tandis que l'épaisseur du matériau utilisé pour la surface latérale est de 0.05 cm.

Remarque : on demande d'approximer le volume de métal utilisé pour la fabrication de la boîte et non le volume que la boîte peut contenir. Par contre, ce volume de métal peut être considéré comme une petite variation du volume que peut contenir la boîte.

La différentielle du volume est :

$dV =$ _____ $dr +$ _____ dh *(Utiliser les symboles des variables impliquées.)*

On a également :

$dr =$ _____ cm et

$dh =$ _____ cm

Le volume approximatif de métal est donc _____ cm^3.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Trouvez une valeur approximative pour $f(x, y) = \sin(\pi xy + \ln y)$ en $(0.01, 1.05)$ sans utiliser une calculatrice ou un ordinateur.

2. Soit $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+2y^2}$. Trouvez une valeur approximative pour $f(-0.9\,,\, 1.1)$ sans utiliser une calculatrice ou un ordinateur.

3. Quatre nombres, chacun entre 0 et 50 (inclus), sont arrondis à la première décimale et ensuite multipliés ensemble. Estimez l'erreur maximale possible du produit calculé.

4. Soit $z = f(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Trouvez une valeur approximative pour $f(-0.8, 2.1)$.

5. Utilisez les différentielles pour trouver une approximation raisonnable pour la valeur de $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y^2}$ en $x = 3.02$, $y = 3.96$. Notez que $3.02 \approx 3$ et $3.96 \approx 4$.

6. Utilisez les différentielles pour estimer le volume de métal dans une canette de métal fermée dont le diamètre est de 8cm et la hauteur est de 12cm si le métal a une épaisseur de 0.04cm.

7. Considérez la fonction $f(x, y) = e^{-x^2+4y^2}$.

(a) Trouvez l'équation du plan tangent au graphe $z = f(x, y)$ au point $(x, y) = (2, 1)$.

(b) Trouvez l'approximation tangente de la valeur de $f(1.99, 1.01)$ en utilisant le plan tangent trouvé à la partie (a).

8. Soit $z = f(x, y) = \ln(4x^2 + y^2)$.

(a) Utilisez une approximation linéaire de la fonction $z = f(x, y)$ en $(0, 1)$ afin d'estimer $f(0.1, 1.2)$.

(b) Trouvez un point $P(a,b,c)$ sur le graphe de $z = f(x,y)$ tel que le plan tangent du graphe de $z = f(x,y)$ au point P est parallèle au plan $2x + 2y - z = 3$.

Pour mieux comprendre.

9. Soit x_0 et y_0 des constantes et soit m et n des entiers. Si $m < 0$ supposez que $x_0 \neq 0$, et si $n < 0$ supposez que $y_0 \neq 0$. Définissez $P(x,y) = x^m y^n$.

(a) Trouvez l'approximation linéaire en $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

(b) Dénotez par

$$P_{\%} = 100 \left| \frac{P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)} \right|$$
$$x_{\%} = 100 \left| \frac{\Delta x}{x_0} \right|$$
$$y_{\%} = 100 \left| \frac{\Delta y}{y_0} \right|$$

le pourcentage d'erreurs en P, x et y respectivement. Utilisez l'approximation linéaire pour trouver la (approximation) borne supérieure sur $P_{\%}$ en termes de m, n, $x_{\%}$ et $y_{\%}$.

10. Considérez le travail suivant.

Nous calculons, approximativement, la coordonnée y du point dont les coordonnées polaires sont $r = 0.9$ *et* $\theta = 2°$. *En général, la coordonnée y du point dont les coordonnées polaires sont* r *et* θ *est* $Y(r,\theta) = r\sin\theta$. *Les dérivées partielles*

$$Y_r(r,\theta) = \sin\theta \qquad Y_\theta(r,\theta) = r\cos\theta$$

Donc l'approximation linéaire à $Y(r_0 + \Delta r, \theta_0 + \Delta\theta)$ *avec* $r_0 = 1$ *et* $\theta_0 = 0$ *est*

$$\begin{aligned} Y(1 + \Delta r, 0 + \Delta\theta) &\approx Y(1,0) + Y_r(1,0)\,\Delta r + Y_\theta(1,0)\,\Delta\theta \\ &= 0 \ + \ (0)\,\Delta r \ + \ (1)\Delta\theta \end{aligned}$$

En appliquant ceci avec $\Delta r = -0.1$ *et* $\Delta\theta = 2$ *on a que la (approximation) coordonnée y*

$$Y(0.9, 2) = Y(1 - 0.1\,,\, 0 + 2) \approx 0 \ + \ (0)\,(-0.1) \ + \ (1)(2) = 2$$

Cette conclusion est ridicule. Nous disons que la coordonnée y est plus que deux fois la distance du point à l'origine. Quelle est l'erreur ?

11. Un côté d'un triangle rectangle mesure 3 unités, avec une erreur d'au plus 0.1 en valeur absolue (on dit : à 0.1 près), et l'autre côté mesure 4 unités à 0.2 près. Utilisez l'approximation linéaire pour estimer l'erreur maximale possible en calculant la longueur de l'hypoténuse de ce triangle.

12. La gravité spécifique S d'un objet est donnée par $S = \frac{A}{A-W}$, où A est le poids de l'objet lorsque dans les airs et W est le poids de l'objet dans l'eau. Si $A = 20$ à 0.01 près et $W = 12$ à 0.02 près, trouvez une approximation de l'erreur relative commise en calculant S avec les mesures données.

13. La pression dans un solide est donnée par

$$P(s,r) = sr(4s^2 - r^2 - 2)$$

où s est la chaleur spécifique et r est la densité. On s'attend à ce que la mesure (s,r)

soit approximativement $(2, 2)$ et on voudrait avoir la valeur la plus précise possible pour P. Il y a deux façons différentes de mesurer s et r. La méthode 1 mesure s à 0.01 près et r à 0.1 près, tandis que la méthode 2 mesure s et r à 0.02 près.

Devrions-nous utiliser la méthode 1 ou la méthode 2 ? Expliquez votre raisonnement.

14. Une poutre rectangulaire qui est supportée à ses deux extrémités supportant une charge uniforme s'affaisse d'une quantité

$$S = C\frac{p\ell^4}{wh^3},$$

où p = charge, ℓ = longueur, h = hauteur, w = largeur et C est une constante. Supposons que $p \approx 100$, $\ell \approx 4$, $w \approx .1$ et $h \approx .2$. L'affaissement de la poutre sera-t-il plus sensible aux changements de hauteur de la poutre ou à des changements dans la largeur de la poutre ?

15. Deux côtés d'un triangle mesurent 3 m et 4 m, à 0.1 m près, et l'angle qu'ils forment mesure 90°, à 1° près. La longueur du troisième côté est alors calculée en utilisant la loi des cosinus $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$. Quelle est l'erreur approximative maximale de la valeur calculée pour C ?

16. Considérez la fonction f qui associe chaque point (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ à ye^{-x}.

(a) Supposez que $x = 1$ et $y = e$, mais que des erreurs de taille 0.1 sont faites en mesurant chacun des x et y. Estimez l'erreur maximale que ceci peut causer sur $f(x, y)$.

(b) Le graphe de la fonction f se situe dans $\mathbb{R}^3$, et le point $(1, e, 1)$ se situe dans le graphe. Trouvez un vecteur non-nul qui est perpendiculaire à ce graphe en ce point.

17. Une surface $z = f(x, y)$ admet les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2$ en $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

(a) Si x croît de 1 à 1.2, et y décroît de 3 à 2.6, trouvez le changement en z à l'aide d'une approximation linéaire.

(b) Trouvez l'équation du plan tangent à la surface au point $(1, 3, 1)$.

2.5 Règle de dérivation des fonctions composées

La règle de dérivation des fonctions composées, souvent appelée la « règle de la chaîne », à savoir

$$\frac{d}{dt}f\left(x(t)\right) = \frac{df}{dx}\left(x(t)\right)\ \frac{dx}{dt}(t),$$

nous est déjà familière. On s'en sert, par exemple, lorsqu'on calcule

$$\frac{d}{dt}\sin(t^2) = \cos(t^2)\ 2t.$$

Dans cet exemple, $f(x) = \sin(x)$ et $x(t) = t^2$.

Le cas général

Nous allons généraliser la règle de dérivation des fonctions composées aux fonctions de plus d'une variable. Nous donnerons la formulation générale, en utilisant le langage matriciel développé dans la section 2.4. Ceci nous permettra de donner un énoncé concis, qui reflète exactement l'idée de base, sans nous encombrer avec des notations lourdes faisant intervenir des dérivées partielles et des sommes qui apparaissent lorsque nous évitons le langage matriciel.

Les formules particulières pour les cas spécifiques sont données plus bas.

Sommairement, l'idée à retenir est que si f et g sont différentiables (et composables), alors la composée $f \circ g$ sera différentiable également, mais aussi et surtout que l'approximation linéaire de la composition $f \circ g$ est donnée par la composition des approximations linéaires $\mathbf{D}f$ et $\mathbf{D}g$, ce qui correspond au produit matriciel. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.5.1 Règle de la chaîne.

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^p$ des fonctions telles que $g(\mathcal{D}) \subset \mathcal{E}$, de sorte que $F = f \circ g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^p$ est définie. Supposons de plus que g est différentiable en $\mathbf{r}_0$ et que f est différentiable en $g(\mathbf{r}_0)$. Alors, F est différentiable en $\mathbf{r}_0$, et

$$\mathbf{D}F(\mathbf{r}_0) = \mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{r}_0) = \mathbf{D}f(g(\mathbf{r}_0))\ \mathbf{D}g(\mathbf{r}_0).$$

Il est important de comprendre que le terme de droite de l'égalité ci-haut est un produit matriciel

$$\underbrace{\mathbf{D}f(g(\mathbf{r}_0))}_{p\times n}\ \underbrace{\mathbf{D}g(\mathbf{r}_0)}_{n\times m}.$$

Voyons maintenant quelques exemples.

Composition avec un chemin : $f \circ \mathbf{r}(t)$. Soit $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ un chemin différentiable et f définie sur une région de $\mathbb{R}^3$ contenant la courbe $\mathcal{C}_\mathbf{r}$. Nous pouvons donc considérer $F = f \circ \mathbf{r}$, c'est-à-dire $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Il s'agit d'une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles. Selon le théorème 2.5.1, nous avons, en tout point t,

$$\begin{aligned} F'(t) = \mathbf{D}F(t) &= \mathbf{D}(f \circ \mathbf{r})(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{r}(t))\ \mathbf{D}\mathbf{r}(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{r}(t))\ \mathbf{r}'(t) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right]\Big|_{\mathbf{r}(t)} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\mathbf{r}(t)} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{r}(t)} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{\mathbf{r}(t)} z'(t). \end{aligned}$$

On peut écrire aussi, en omettant le point d'évaluation des dérivées partielles (ce qui comporte un petit risque si l'on ne s'assure pas de bien avoir compris),

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Par ailleurs, avec les variables de dérivation comme indices, ceci s'écrit

$$F'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) + f_z(\mathbf{r}(t))z'(t).$$

Exemple 2.5.2 $\frac{d}{dt} f\,(x(t), y(t))$.

Calculer $\frac{d}{dt} f\,(x(t), y(t))$ lorsque $f(x, y) = x^2 - y^2$ avec $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$.

Posons $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ et $F(t) = f \circ \mathbf{r}(t) = f\,(x(t), y(t))$. Nous avons,

d'une part,

$$\mathbf{D}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \end{bmatrix}$$

et, d'autre part,

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathbf{r}(t)} x'(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mathbf{r}(t)} y'(t) \\ &= 2x(t) \cdot x'(t) - 2y(t) \cdot y'(t) \\ &= (2\cos t)(-\sin t) + (-2\sin t)(\cos t) \\ &= -4\sin t \cos t. \end{aligned}$$

Bien entendu, dans cet exemple, on peut calculer $F(t)$ explicitement,

$$F(t) = f\left(x(t), y(t)\right) = x(t)^2 - y(t)^2 = \cos^2 t - \sin^2 t,$$

puis calculer la dérivée

$$F'(t) = 2(\cos t)(-\sin t) - 2(\sin t)(\cos t) = -4\sin t \cos t.$$

Exemple 2.5.3 $\frac{d}{dt} f(a+ct)$**.**

Dans cet exemple, la variable intermédiaire n'est pas donnée. Posons donc $u(t) = a + ct$ et $w(t) = f(a+ct) = f\left(u(t)\right)$. Ainsi,

$$\frac{d}{dt} f(x+ct) = \frac{dw}{dt}(t) = \frac{df}{du}\left(u(t)\right) \frac{du}{dt}(t) = c\, f'(a+ct).$$



À vous de jouer 2.5.4

Utiliser la règle de dérivation en chaîne pour calculer $\dfrac{dz}{dt}$, où :

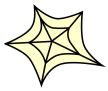
$$z = x^2 y + x y^2, \quad x = 4 - t^5 \quad \text{et} \quad y = 1 + t^6.$$

On commence par dériver les expressions données :
$\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____
$\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____
$\frac{dx}{dt} =$ _____
$\frac{dy}{dt} =$ _____
On combine ensuite en une fonction de la variable indépendante :
$\frac{dz}{dt} =$ _____



À vous de jouer 2.5.5

Le rayon d'un cône circulaire augmente à un taux de 5 centimètres par seconde et sa hauteur décroît à un taux de 4 centimètres par seconde. À quel taux est-ce que le volume du cône change lorsque le rayon est 10 centimètres et la hauteur est 40 centimètres ?



_____ cm^3 par seconde

Corollaire 2.5.6 Retour au plan tangent.

Soit $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en (x_0, y_0), et soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = f(x, y)$. Alors le plan d'équation $z = L(x, y)$, où L est l'approximation linéaire de f en (x_0, y_0) (voir 2.4.3), est effectivement le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$: il contient les vecteurs vitesse en ce point de toutes *les courbes différentiables tracées sur $\mathcal{S}$ et y passant.*

Démonstration. Posons $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + f(x_0, y_0)\,\mathbf{k}$ et

$$\mathbf{n} = -f_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i} - f_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

le vecteur normal du plan candidat établi plus haut. Les points $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ du plan vérifient donc

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

de sorte qu'un vecteur $\mathbf{v}$ est une direction du plan (c'est-à-dire que $\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}$ y reste) si et seulement si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Soit maintenant $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + f(x(t), y(t))\,\mathbf{k}$ un chemin différentiable *quelconque*, tracé sur $\mathcal{S}$, passant par $\mathbf{r}_0$ au temps t_0 (c'est-à-dire $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$). On prétend que le vecteur vitesse $\mathbf{r}'(t_0)$ est orthogonal à $\mathbf{n}$,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

ce qui montrera, par ce qui précède, que $\mathbf{r}'(t_0)$ est bel et bien une direction du plan candidat.

Calcul du vecteur vitesse. Par la règle de la chaîne, la troisième composante de $\mathbf{r}'(t)$, évaluée en t_0, est

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\bigg|_{t_0} = f_x(x_0, y_0)\,x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\,y'(t_0).$$

Ainsi,

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\mathbf{i} + y'(t_0)\,\mathbf{j} + \big[f_x(x_0, y_0)\,x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\,y'(t_0)\big]\,\mathbf{k}.$$

Produit scalaire. On calcule directement

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'(t_0) &= -f_x(x_0, y_0)\,x'(t_0) - f_y(x_0, y_0)\,y'(t_0) \\ &\qquad + \big[f_x(x_0, y_0)\,x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\,y'(t_0)\big] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Comme le chemin $\mathbf{r}(t)$ était arbitraire, *tout* vecteur vitesse en $\mathbf{r}_0$ de *toute* trajectoire tracée sur $\mathcal{S}$ satisfait $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$, c'est-à-dire se trouve dans le plan candidat. Par définition, ce plan est donc bel et bien le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}_0$. ■

Composition avec une fonction de deux variables.$f(x(s,t), y(s,t))$. Soit, comme avant, f une fonction de deux variables x, y, mais, cette fois, nous considérons qu'elles sont à leur tour des fonctions des variables s, t. Plus formellement, posons $g(s,t) = x(s,t)\mathbf{i} + y(s,t)\mathbf{j}$ et supposons que g est différentiable. Alors, on peut définir $F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$, qui est une fonction de deux variables réelles, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc deux dérivées partielles, et sa dérivée est

$$\mathbf{D}F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, le théorème 2.5.1 nous dit aussi que

$$\mathbf{D}F(s,t) = \mathbf{D}(f\circ g)(s,t) = \mathbf{D}f(g(s,t))\ \mathbf{D}g(s,t).$$

Or,

$$\mathbf{D}f(g(s,t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right]\Big|_{g(s,t)} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D}g(s,t) = \left[\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{matrix}\right]\Big|_{(s,t)}.$$

Ceci donne directement

$$\begin{aligned}\mathbf{D}F(s,t) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right]\left[\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{matrix}\right]\\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right].\end{aligned}$$

Composante à composante, on déduit les formules usuelles

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},\end{aligned} \qquad (*)$$

où il faut garder à l'esprit que les dérivées partielles de f sont évaluées en $g(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$.

Exemple 2.5.7 $\frac{\partial}{\partial s} f\,(x(s,t), y(s,t))$**.**

Dans cet exemple, on trouve $\frac{\partial}{\partial s} f\,(x(s,t), y(s,t))$ lorsque

$$f(x,y) = e^{xy}, \qquad x(s,t) = s, \qquad y(s,t) = \cos t.$$

Posons $F(s,t) = f\,(x(s,t),\, y(s,t))$. Le théorème 2.5.1 ou, plus directement, la formule $(*)$ ci-haut donnent

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x(s,t),\, y(s,t))\ \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x(s,t),\, y(s,t))\ \frac{\partial y}{\partial s}(s,t).$$

Pour les fonctions données,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{xy},\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= ye^{xy}, & \frac{\partial f}{\partial x}\,(x(s,t),y(s,t)) &= y(s,t)e^{x(s,t)\,y(s,t)} = \cos t\ e^{s\cos t},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xe^{xy}, & \frac{\partial f}{\partial y}\,(x(s,t),y(s,t)) &= x(s,t)e^{x(s,t)\,y(s,t)} = s\ e^{s\cos t},\\ \frac{\partial x}{\partial s} &= 1, & \frac{\partial y}{\partial s} &= 0,\end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = \overbrace{\left\{\cos t\ e^{s\cos t}\right\}}^{\frac{\partial f}{\partial x}}\overbrace{(1)}^{\frac{\partial x}{\partial s}} + \overbrace{\left\{s\ e^{s\cos t}\right\}}^{\frac{\partial f}{\partial y}}\overbrace{(0)}^{\frac{\partial y}{\partial s}} = \cos t\ e^{s\cos t}.$$

De la même façon, on calcule

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = -s\sin t\, e^{s\cos t}.$$

Exemple 2.5.8 Coordonnées polaires.

Soit $z = f(x, y)$ donnée (et différentiable), avec $x(r, \theta) = r\cos\theta$ et $y(r, \theta) = r\sin\theta$. Calculer les dérivées partielles de z par rapport à r et θ.

De nouveau, posons $z(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$. Alors, la formule $(*)$ donne directement

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\\ &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

Exemple 2.5.9

Soit $f(x, y)$ une fonction différentiable et $F(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$. Calculer $t\frac{\partial F}{\partial s} + s\frac{\partial F}{\partial t}$.

De nouveau, dans cet exemple, les variables intermédiaires ne sont pas données. Posons donc $g(s, t) = (x(s, t), y(s, t)) = (s^2 - t^2, t^2 - s^2)$, de sorte que $F(s, t) = f \circ g(s, t)$.

Nous avons, toujours d'après $(*)$:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2s\frac{\partial f}{\partial x} - 2s\frac{\partial f}{\partial y},$$

et donc $t\frac{\partial F}{\partial s} = 2ts\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

De la même façon,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -2t\frac{\partial f}{\partial x} + 2t\frac{\partial f}{\partial y},$$

et donc $t\frac{\partial F}{\partial t} = 2ts\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Il s'ensuit que

$$t\frac{\partial F}{\partial s} + s\frac{\partial F}{\partial t} = 2st\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + 2st\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Exemple 2.5.10

Soit $f(x, y)$ où f est une fonction de classe C^2. Si $x(u, v) = u^2 + v^2$ et que $y(u, v) = 2uv$, alors on considère $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$.

Le calcul de la dérivée du premier ordre est immédiat, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 2v\\ &= 2\left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Afin de calculer la dérivée du deuxième ordre, nous devons dériver de nouveau et tenir compte de la règle du produit dans un premier temps :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u} = 2\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

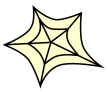
$$= 2\frac{\partial f}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + 0\frac{\partial f}{\partial y} + 2v\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$= 2\frac{\partial f}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + 2v\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Or, il faut bien comprendre que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont évaluées en $(x(u,v), y(u,v))$, ce qui donne le sens aux expressions $\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}$. On calcule alors

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,2v$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,2v.$$

La fonction f étant de classe C^2, les dérivées partielles mixtes sont égales. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} &= 2\frac{\partial f}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + 2v\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}\\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x} + 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,2v\right] + 2v\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,2v\right]\\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x} + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 4v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$



À vous de jouer 2.5.11

Soient $z = x^2 \sin y, \quad x = -4s^2 - t^2 \quad$ et $\quad y = -2st.$

(a) Utiliser la règle de dérivation en chaîne pour calculer $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ comme des fonctions de x, y, s et t :

$\dfrac{\partial z}{\partial s} =$ _____

$\dfrac{\partial z}{\partial t} =$ _____

(b) Trouver les valeurs numériques de $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ lorsque $(s,t) = (-1,3)$:

$\dfrac{\partial z}{\partial s}(-1,3) =$ _____

$\dfrac{\partial z}{\partial t}(-1,3) =$ _____

Plus d'exemples, et une preuve

Revenons au cas général et écrivons $\mathbf{x}$ au lieu de $\mathbf{r}$, avec

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \text{ puis } \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = f(\mathbf{u}).$$

Ainsi, $\mathbf{z} = f \circ g(\mathbf{x})$, et nous avons p variables $z_1, \ldots, z_p$ qui dépendent des m variables $x_1, \ldots, x_m$. La fonction $F = f \circ g$ va d'une partie de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$. Sa dérivée évaluée en un point est donc une matrice ayant p rangées et m colonnes.

$$\mathbf{D}F(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}) = \mathbf{D}f(g(\mathbf{x}))\,\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = \mathbf{D}f(\mathbf{u})\,\mathbf{D}g(\mathbf{x}).$$

L'entrée en position (i, j) de cette matrice est $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$. Elle s'obtient en multipliant la $i^{\text{ième}}$ rangée de $\mathbf{D}f(\mathbf{u})$ avec la $j^{\text{ième}}$ colonne de $\mathbf{D}g(\mathbf{x})$. Cette rangée et cette colonne sont, respectivement,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial u_1} & \frac{\partial z_i}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial z_i}{\partial u_n} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \end{bmatrix}.$$

On en déduit donc la formule

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \tag{$**$}$$

où, à nouveau, il faut garder à l'esprit que les dérivées partielles de z_i sont évaluées en $\mathbf{u}$.

Dans la pratique, la différentiabilité est assurée par la continuité des dérivées partielles (c'est le théorème 2.4.13).

Bien que le théorème 2.5.1 ne requière pas la continuité des dérivées partielles, la preuve que nous présentons plus bas sera faite avec cette hypothèse supplémentaire.

Exemple 2.5.12

Soit $g(s,t) = \left(st, \frac{1}{2}(t^2 - s^2)\right)$ et $f(x,y) = (x+y, y, x^2)$. Posons $F(s,t) = f \circ g\,(s,t)$. Notons que F est une fonction de deux variables qui prend des valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On a

$$\mathbf{D}F(s,t) = \mathbf{D}f(g(s,t))\,\mathbf{D}g(s,t).$$

Or, on calcule sans peine

$$\mathbf{D}f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D}g(s,t) = \begin{bmatrix} t & s \\ -s & t \end{bmatrix}.$$

La dérivée de f doit être évaluée en $g(s,t)$. Il vient donc que

$$\mathbf{D}F(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2st & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & s \\ -s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-s & s+t \\ -s & t \\ 2st^2 & 2s^2t \end{bmatrix}.$$

On vérifie aisément que

$$F(s,t) = \begin{bmatrix} st + \frac{1}{2}(t^2 - s^2) \\ \frac{1}{2}(t^2 - s^2) \\ s^2t^2 \end{bmatrix}.$$

Les entrées de la troisième rangée de $\mathbf{D}f(s,t)$, à savoir $2st^2$ et $2s^2t$, sont les dérivées partielles de la troisième composante de $F(s,t)$, à savoir s^2t^2, par rapport aux variables s et t respectivement.

Démonstration du théorème 2.5.1. La stratégie de la preuve suivra la progression des exemples que nous avons rencontrés, à savoir :

- Dans un premier temps, on considère le cas où g est un chemin dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une fonction d'une seule variable, t, puis f prend des valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Une fois le premier cas traité, tout en gardant f comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, on permettra à g d'être une fonction de plusieurs variables. Comme la dérivation partielle par rapport à une variable laisse fixes toutes les autres, ce deuxième cas suivra directement du premier.
- Finalement, on permet à f de prendre des valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Ceci revient à dire que f est donnée par p fonctions $f_1, \ldots, f_p$. Ainsi, $f \circ g$ est la donnée de p fonctions comme celles qui ont été considérées dans le point précédent, à savoir $f_1 \circ g$, $f_2 \circ g$, $\ldots$, $f_p \circ g$. Le résultat suivra.

Afin de traiter le premier cas, faisons, pour des fins d'écriture, l'hypothèse supplémentaire que g est un chemin dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $g : t \mapsto (x(t), y(t))$. On se donne aussi $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ et l'on s'intéresse à $F(t) = (f \circ g)(t)$. Nous avons, par définition,

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0}.\end{aligned}$$

Or, on peut écrire le numérateur du quotient comme

$$\underbrace{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t))}_{y(t) \text{ est fixe}} + \underbrace{f(x(t_0), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}_{x(t_0) \text{ est fixe}}.$$

Les deux premiers termes sont la différence des valeurs de f évaluée en deux points dont le deuxième argument est fixe, à savoir $y(t)$. De même, les deux derniers termes sont la différence de deux valeurs de f évaluée en deux points dont le premier argument, $x(t_0)$, est fixe.

Étant donné qu'on suppose que f admet des dérivées partielles continues, le théorème des accroissements finis appliqué à f comme fonction de chacune des variables séparément donne qu'il existe

- un réel x^* entre $x(t)$ et $x(t_0)$ tel que

$$f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y(t)) \cdot (x(t) - x(t_0))\,;$$

- un réel y^* entre $y(t)$ et $y(t_0)$ tel que

$$f(x(t_0), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y^*) \cdot (y(t) - y(t_0)).$$

Ainsi, le quotient des différences qui nous intéresse est

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0}$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y(t)) \cdot (x(t) - x(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y^*) \cdot (y(t) - y(t_0))}{t - t_0}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y(t)) \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y^*) \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}.$$

Il suit de la continuité des dérivées partielles de la fonction f et de la définition de la dérivée de x et y comme fonctions de t que la limite qui nous intéresse est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0).$$

Or, nous avons

$$\mathbf{D}f(x(t_0), y(t_0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) & \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \end{bmatrix} \text{ et}$$
$$\mathbf{D}g(t_0) = \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons le résultat voulu. ■

Voyons une application de la règle des fonctions composées au calcul d'erreurs relatives. Nous avons vu, à la définition 2.4.27, que l'erreur relative lors du calcul ou de la mesure de f est, par définition, $\left|\frac{\Delta f}{f}\right|$.

Près du point d'évaluation $\mathbf{r}_0$, la variation Δf (qui résulte d'une variation $\Delta\mathbf{r}$) est approchée par

$$df = \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\, \Delta\mathbf{r}.$$

Supposons que $f(\mathbf{r}_0) \neq 0$ et posons alors $g(\mathbf{r}) = \ln(f(\mathbf{r}))$, de sorte que, en vertu de la règle des fonctions composées,

$$\mathbf{D}g(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{f(\mathbf{r}_0)} \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0),$$

et donc la différentielle de g (en $\mathbf{r}_0$) vaut

$$dg = \mathbf{D}g(\mathbf{r}_0)\, \Delta\mathbf{r} = \frac{1}{f(\mathbf{r}_0)} \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\, \Delta\mathbf{r} = \frac{1}{f(\mathbf{r}_0)} df.$$

Exemple 2.5.13

Soit $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$. Si l et g sont mesurées avec des erreurs relatives d'au plus 1 %, montrer qu'il en va de même pour T.

Solution. Posons $\mathbf{r} = (l, g)$ et $w = \ln T(l, g) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g$. Alors,

$$dw = \mathbf{D}w(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2l} & \frac{-1}{2g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dl \\ dg \end{bmatrix} = \frac{dl}{2l} - \frac{dg}{2g}.$$

Ainsi, nous avons

$$\left|\frac{dT}{T}\right| = |dw| = \frac{1}{2}\left|\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\frac{dl}{l}\right| + \left|\frac{dg}{g}\right|\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100}.$$

Les fonctions implicites

Une application importante de la règle de dérivation des fonctions composées est la technique de dérivation implicite. Celle-ci repose sur le *théorème des fonctions implicites*, qui est valable dans un cadre très général, mais dont la preuve dépasse le cadre de ce manuel. Contentons-nous de faire une discussion informelle dans le cas de deux variables.

Supposons que nous avons une courbe du plan donnée par l'équation $f(x,y)=0$ et que nous avons aussi un paramétrage de cette courbe $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$. Ainsi, nous devons avoir

$$0=f(x(t),y(t))=f\circ\mathbf{r}(t).$$

D'après la formule de dérivation des fonctions composées, après dérivation par rapport à t, nous avons

$$0=\mathbf{D}(f\circ\mathbf{r})=(\mathbf{D}f)\,\mathbf{r}'=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ainsi, nous avons que le vecteur $\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$ (que nous appellons le « gradient de f », il jouera un rôle crucial dans les sections à venir) est orthogonal au vecteur vitesse $\mathbf{r}'(t_0)=x'(t_0)\,\mathbf{i}+y'(t_0)\,\mathbf{j}$ et donc orthogonal à la courbe. Si $(x_0,y_0)=\mathbf{r}(t_0)$ est un point sur la courbe, la connaissance du vecteur normal nous permet d'obtenir directement une équation de la tangente.

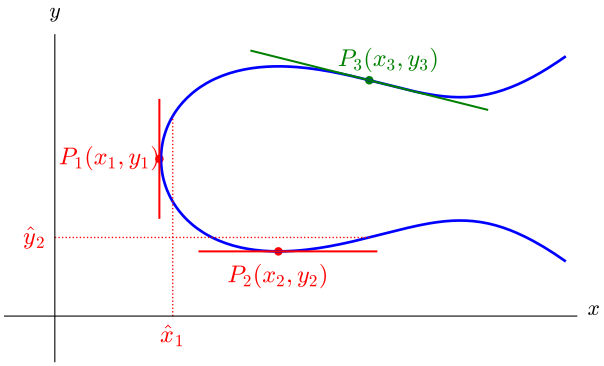


Figure 2.5.14 Une courbe $f(x,y)=0$ et quelques tangentes.

En effet, il suit de l'équation (†) d'une droite dans le plan, appliquée à la tangente en (x_0,y_0) avec vecteur normal $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathbf{j}$, que celle-ci a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, la tangente n'est pas verticale, et sa pente est précisément

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Par ailleurs, si, dans cette situation, on a en plus que les dérivées partielles sont continues, alors il existe un voisinage de x_0 où chaque valeur de x détermine une unique valeur de y, qu'on note $y(x)$, telle que $(x,y(x))$ se trouve sur la courbe. On dit alors que « la relation $f(x,y)=0$ définit implicitement y comme fonction de x près de x_0 ». De plus, cette fonction est dérivable et, puisque la dérivée $y'(x_0)$ est la pente de la tangente, on s'attend à avoir $y'(x_0)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$. Ce résultat peut être obtenu avec la règle de dérivation des fonctions composées. En partant de $f(x,y)=0$, après dérivation par rapport à x, on obtient

$$0=\frac{d}{dx}f(x,y(x))=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},\qquad(*)$$

d'où le résultat voulu.

Notons que, si nous avons plutôt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$, nous pouvons reprendre les arguments ci-haut et obtenir $x=x(y)$ et, sans surprise,

$$x'(y_0)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}.$$

Pour les fonctions à plus de deux variables, nous avons quelque chose de semblable : le fait d'avoir une dérivée partielle qui ne s'annule pas permet de définir implicitement l'une des variables comme fonction des deux autres. Cette fonction admet des dérivées partielles, et la règle de dérivation des fonctions composées permet de les calculer.

Sans aller dans les détails, contentons-nous d'énoncer le théorème des fonctions implicites pour les fonctions à trois variables.

Théorème 2.5.15

Soit $f(x,y,z)$ une fonction à valeurs réelles ayant des dérivées partielles continues [a]. Si (x_0,y_0,z_0) est tel que

$$f(x_0,y_0,z_0)=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

alors :

(a) il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (x_0,y_0) et une unique fonction $z=g(x,y)$ telle que $f(x,y,g(x,y))=0$ pour $(x,y)\in\mathcal{U}$;

(b) de plus, $z=g(x,y)$ admet des dérivées partielles continues en (x_0,y_0) et, au point (x_0,y_0), on a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Comme cela a été mentionné plus haut, la preuve dépasse le cadre de ce texte. C'est le point 1 qui est délicat, mais, si l'on accepte l'existence de la fonction $z=z(x,y)$, on obtient les formules du point 2 avec la règle de la chaîne, de la même façon que ce qui a été fait en (∗), à savoir

$$0=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z(x,y))=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

où la dernière égalité suit du fait que x et y sont indépendantes. Il vient alors que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Encore une fois, il serait tentant de penser que ceci découle de « simplifier les fractions », mais il n'en est rien.

On procède de la même façon, mais en dérivant par rapport à y pour obtenir la deuxième formule.

Voyons quelques exemples.

Exemple 2.5.16

Supposons que trois quantités, x, y et z, sont liées par la relation $x-z=\arctan(yz)$. Trouver les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Posons $f(x,y,z)=x-z-\arctan(yz)$, de sorte que l'égalité donnée équivaut à $f(x,y,z)=0$. On calcule alors $\frac{\partial f}{\partial z}=-1-\frac{y}{1+y^2z^2}$. Ainsi, la relation donnée définit implicitement z en fonction de x et y sauf lorsque $1+y^2z^2=-y$. Par ailleurs :

- $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, d'où $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{-1}{-1-\frac{y}{1+y^2z^2}}=\frac{1+y^2z^2}{1+y^2z^2+y}$;

[a] On dit alors que f est « de classe » C^1.

- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-z}{1+y^2z^2}$, d'où $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{z}{1+y^2z^2}}{-1-\frac{y}{1+y^2z^2}} = \frac{-z}{1+y^2z^2+y}$.



À vous de jouer 2.5.17

Soit la relation $\sin(z-(5x+10y))=0$.

Déterminer, par dérivation implicite, les dérivées partielles $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ au point $(0,0,0)$.

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0,0) =$ _____

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0,0) =$ _____

Procédure (optionnelle)

L'approche présentée ci-haut est plutôt abstraite, dans le sens qu'elle met l'accent sur la dérivée en la considérant comme une application linéaire. D'un point de vue très pratique, il importe de pouvoir effectuer les calculs des dérivées partielles. Ci-après, on présente une démarche qui peut être utile les premières fois qu'on effectue ce genre de calculs.

- Étape 1 : Écrire ***explicitement*** toutes les fonctions concernées et spécifier les arguments (les variables) de chacune d'elles. Il faut s'assurer que des fonctions différentes ont des noms différents. Au besoin, on pourra introduire de nouveaux noms pour certaines fonctions. Dans le cas du théorème 2.5.1, cette liste est :

$$f(x,y), \qquad x(s,t), \qquad y(s,t), \qquad F(s,t) = f\left(x(s,t), y(s,t)\right).$$

  Bien que les fonctions f et F soient intimement liées, elles ne sont pas la même chose. L'une est une fonction de x et y tandis que l'autre est une fonction de s et t.

- Étape 2 : Écrire le modèle

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s}.$$

  Noter que

  - la fonction F apparaît une fois dans le numérateur à gauche, et la fonction f, à partir de laquelle F est définie au moyen d'un changement de variables, apparaît une fois dans le numérateur à droite ;
  - la variable du dénominateur de gauche apparaît une fois dans le dénominateur de droite.

- Étape 3 : Remplir les espaces restants avec chacune des variables pour lesquelles cela a du sens, c'est-à-dire chacune des variables de la fonction f. En particulier, si f est une fonction de x et y, elle peut être dérivée par rapport à x et y seulement. Ainsi, on ajoute deux copies du modèle ci-haut, une pour x et une pour y :

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

  Remarquer que x et y sont des fonctions de s, de sorte que les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial s}$ et $\frac{\partial y}{\partial s}$ sont définies. Le premier terme, $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}$, tient compte de la variation de x par rapport à s, et le second terme, $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$, tient compte de la variation de y par rapport à s.

- Étape 4 : Écrire ***explicitement*** la relation fonctionnelle et ses variables. Il y a une seule relation fonctionnelle qui a du sens. Le terme de gauche est une fonction des variables s et t. Ainsi, le terme de droite doit aussi être une fonction de ces variables. Comme f est une fonction de x et y, ceci est obtenu en évaluant f en $x = x(s,t)$ et $y = y(s,t)$.

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(s,t), y(s,t)\right) \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(s,t), y(s,t)\right) \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

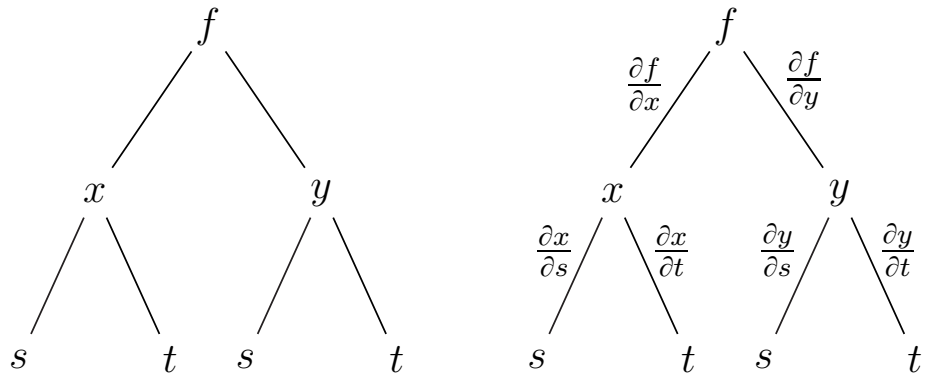
  Si l'on omet les arguments, ou si l'on oublie quels sont ces arguments, il est possible d'oublier que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dépendent de s et t. Ainsi, si l'on doit calculer une autre dérivée, on aura des problèmes pour différentier les facteurs $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(s,t), y(s,t)\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(s,t), y(s,t)\right)$.

Afin de s'aider à retenir les formules du théorème 2.5.1, il peut être utile de penser que les variables sont des quantités physiques : f et F mesurées en grammes, x et y mesurées en mètres, et s et t mesurées en secondes. Notons alors que

- le terme de gauche, $\frac{\partial F}{\partial s}$, a pour unités des grammes par seconde ;
- chaque terme du côté droit contient la dérivée partielle de f par rapport à une variable différente. La variable indépendante apparaît une fois dans le dénominateur et une fois dans le numérateur, de sorte que ses unités (dans notre cas des mètres) s'annulent. Ainsi, les deux termes $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$ à droite ont aussi des grammes par seconde comme unités.

Voici une représentation graphique qui utilise un *arbre de dépendances* afin de se rappeler la règle de dérivation des fonctions composées. $\frac{\partial}{\partial s} f\left(x(s,t), y(s,t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$. Comme dans la figure de gauche ci-bas :

- Écrire, dans la rangée supérieure, « f » ;
- Écrire, dans la rangée du milieu, chacune des variables de la fonction $f(x,y)$, c'est-à-dire « x » et « y » ;
- Écrire, dans la rangée inférieure,
  - sous x, chacune des variables desquelles $x(s,t)$ dépend, dans ce cas « s » et « t », et,
  - sous y, chacune des variables desquelles $y(s,t)$ dépend, à savoir « s » et « t » ;
- Joindre par une ligne chaque fonction aux variables desquelles elle dépend ;
- Puis, comme dans la figure de droite ci-bas, écrire à côté de chaque ligne la dérivée partielle de la fonction au-dessus de la ligne par rapport à la variable sous celle-ci.

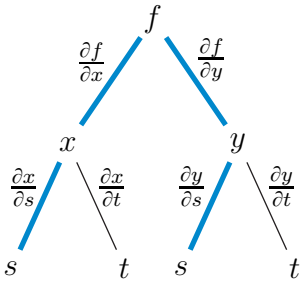


- Finalement :
  - Remarquons, dans la figure ci-bas, qu'il y a deux chemins entre f, tout en haut, et s, tout en bas. L'un d'eux passe par x et l'autre passe par y.

- Pour chaque chemin, on multiplie les dérivées partielles des deux côtés des traits qui composent le chemin. Dans cet exemple, les deux produits sont $\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s}$ pour le premier chemin et $\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s}$ pour le second.
- On additionne tous ces produits, ce qui donne dans notre exemple $\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s}$.
- On écrit les arguments, comme à l'étape 4 ci-haut.

- On obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial s} f\left(x(s,t), y(s,t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(s,t), y(s,t)\right) \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(s,t), y(s,t)\right) \frac{\partial y}{\partial s}(s,t).$$

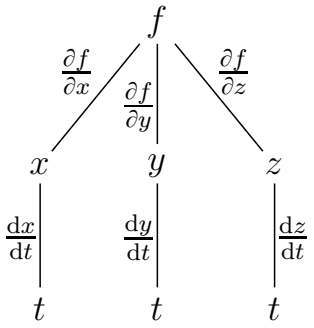


Exemple 2.5.18

Le terme de droite de l'égalité

$$\frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t), z(t)\right) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t), z(t)\right) \frac{dy}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(x(t), y(t), z(t)\right) \frac{dz}{dt}(t),$$

sans les variables, est $\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}$. Le diagramme d'arbre qui correspond est le suivant :



Étant donné que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont des fonctions d'une seule variable, les dérivées indiquées dans les traits du bas sont des dérivées ordinaires, pas des dérivées partielles.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Écrivez la règle de dérivation des fonctions composées pour toutes les fonctions suivantes.

(a) $\frac{\partial h}{\partial x}$ pour $h(x,y) = f\,(x, u(x,y))$.

(b) $\frac{dh}{dx}$ pour $h(x) = f\,(x, u(x), v(x))$.

(c) $\frac{\partial h}{\partial x}$ pour $h(x,y,z) = f\,(u(x,y,z), v(x,y), w(x))$.

2. Supposons que $z = f(x,y)$ admet des dérivées partielles de deuxième ordre continues, et $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Exprimez les dérivées partielles suivantes en termes de r, t, et des dérivées partielles de f.

(a) $\frac{\partial z}{\partial t}$. (b) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

3. Soit $z = f(x,y)$, où $f(x,y)$ admet des dérivées partielles de deuxième ordre continues, et

$$f_x(2,1) = 5, \qquad f_y(2,1) = -2,$$
$$f_{xx}(2,1) = 2, \qquad f_{xy}(2,1) = 1, \qquad f_{yy}(2,1) = -4$$

Trouvez $\frac{d^2}{dt^2} z\,(x(t), y(t))$ lorsque $x(t) = 2t^2$, $y(t) = t^3$ et $t = 1$.

4. Supposez que $f(x,y)$ est différentiable deux fois (avec $f_{xy} = f_{yx}$), et $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

(a) Évaluez f_θ, f_r et $f_{r\theta}$ en termes de r, θ et les dérivées partielles de f par rapport à x et y.

(b) Soit $g(x,y)$ une autre fonction satisfaisant $g_x = f_y$ et $g_y = -f_x$. Exprimez f_r et f_θ en termes de r, θ et g_r, g_θ.

5. Évaluez

(a) $\frac{\partial y}{\partial z}$ si $e^{yz} - x^2 z \ln y = \pi$.

(b) $\frac{dy}{dx}$ si $F(x, y, x^2 - y^2) = 0$.

(c) $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$ si $xyuv = 1$ et $x + y + u + v = 0$.

6. Soit $z = f(x,y)$ donnée implicitement par

$$e^z + yz = x + y.$$

(a) Trouvez la différentielle dz.

(b) Utilisez l'approximation linéaire au point $(1,0)$ pour approximer $f(0.99, 0.01)$.

7. La surface $x^4 + y^4 + z^4 + xyz = 17$ passe par le point $(0,1,2)$, et près de ce point la surface détermine x comme une fonction, $x = F(y,z)$, de y et de z.

(a) Trouvez F_y et F_z en $(x,y,z) = (0,1,2)$.

(b) Utilisez l'approximation par le plan tangent (aussi connue sous le nom d'approximation linéaire de premier ordre ou approximation différentielle) pour trouver la valeur approximative de x (près de 0) tel que $(x, 1.01, 1.98)$ se trouve sur la surface.

8. Considérez la surface donnée par : $z^3 - xyz^2 - 4x = 0$.

(a) Trouvez les expressions pour $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ comme fonctions de x, y et z.

(b) Évaluez $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(1, 1, 2)$.

(c) Les mesures sont entachées d'erreurs : on a mesuré $x = 1$, avec une erreur d'au plus 0.03, et $y = 1$, avec une erreur d'au plus 0.02. Trouvez l'erreur maximale de mesure pour z.

(d) Une particule se déplace sur la surface le long d'un chemin dont la projection dans le plan xy est donnée en termes de l'angle θ comme étant

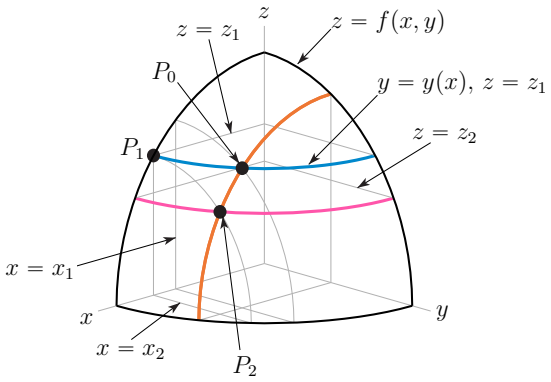
$$x(\theta) = 1 + \cos\theta,\ y(\theta) = \sin\theta$$

du point $A : x = 2,\ y = 0$ jusqu'au point $B : x = 1,\ y = 1$. Trouvez $\frac{dz}{d\theta}$ aux points A et B.

Pour mieux comprendre.

9. Une partie de la surface $z = f(x, y)$ est montrée ci-dessous pour quelques fonctions différentiables $f(x, y)$. Les courbes de niveau $f(x, y) = z_1$ sont marquées par des lignes bleues. Les trois points P_0, P_1, et P_2 se trouvent sur la surface.

Sur la courbe de niveau $z = z_1$, on peut penser à y comme une fonction de x. Soit $w(x) = f(x, y(x)) = z_1$. On approxime, à P_0, $f_x(x, y) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$ et $\frac{dw}{dx}(x) \approx \frac{\Delta w}{\Delta x}$. Identifiez les quantités Δf, Δw, et Δx sur le diagramme.



10. Soit $w = f(x, y, t)$ avec x et y dépendant de t. Supposons qu'à un point (x, y) et un temps t, les dérivées partielles f_x, f_y et f_t sont égales à 2, -3 et 5 respectivement, tandis que $\frac{dx}{dt} = 1$ et $\frac{dy}{dt} = 2$. Trouvez et expliquez les différences entre $\frac{dw}{dt}$ et f_t.

11. Qu'est-ce qui ne fonctionne pas dans l'argument suivant ? Supposez que $w = f(x, y, z)$ et $z = g(x, y)$. Par la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Ainsi, $0 = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$ et donc $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ou $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

12. Utilisez deux méthodes (une en utilisant la règle de dérivation en chaîne) afin d'évaluer $\frac{\partial w}{\partial s}$ et $\frac{\partial w}{\partial t}$ étant donnée la fonction $w = x^2 + y^2 + z^2$, avec $x = st$, $y = s\cos t$ et $z = s\sin t$.

13. Évaluez $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(2x+3y, xy)$ en termes des dérivées partielles de f. Vous pouvez supposer que f est une fonction lisse de façon à ce que le Théorème de Clairaut et la règle de dérivation en chaîne s'appliquent à l'égalité des dérivées partielles mixtes.

14. Trouvez toutes les dérivées d'ordre deux de $g(s,t) = f(2s+3t, 3s-2t)$. Vous pouvez supposer que $f(x,y)$ est une fonction lisse de façon à ce que le Théorème de Clairaut et la règle de dérivation en chaîne s'appliquent à l'égalité des dérivées partielles mixtes.

15. Supposons que $f(x,y)$ satisfait l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Montrez que c'est également le cas pour la fonction composée $g(s,t) = f(s-t, s+t)$, i.e. montrez que $\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$. Vous pouvez également supposer que $f(x,y)$ est une fonction lisse de telle sorte que la règle de la chaîne et le Théorème de Clairaut sur l'égalité des dérivées partielles mixtes s'appliquent.

16. Soit $z = f(x,y)$, où $x = 2s+t$ et $y = s-t$. Trouvez les valeurs des constantes a, b et c telles que

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Vous pouvez supposer que $z = f(x,y)$ est une fonction lisse de telle sorte que la règle de la chaîne et le Théorème de Clairaut sur l'égalité des dérivées partielles mixtes s'appliquent.

17. Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Dénotons les points dans $\mathbb{R}^2$ par (u,v) et les dérivées partielles correspondantes de F par $F_u(u,v)$, $F_v(u,v)$, $F_{uu}(u,v)$, $F_{uv}(u,v)$, etc. Supposez que ces dérivées sont toutes continues. Exprimez

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F(x^2-y^2, 2xy)$$

en termes des dérivées partielles de la fonction F.

18. $u(x,y)$ est définie par

$$u(x,y) = e^y\, F\left(xe^{-y^2}\right)$$

pour une fonction arbitraire $F(z)$.

(a) Si $F(z) = \ln(z)$, trouvez $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

(b) Pour une fonction arbitraire $F(z)$ montrez que $u(x,y)$ satisfait

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

19. Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de x satisfaisant $f''(7) = -2$ et $g''(-4) = -1$. Si $z = h(s,t) = f(2s+3t) + g(s-6t)$ est une fonction de s et de t, trouvez la valeur de $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ lorsque $s = 2$ et $t = 1$.

20. Supposez que la fonction $F(x,y,z)$ satisfait l'équation $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ et que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ sont égales. Soit A une constante et soit $G(\gamma, s, t) = F(\gamma+s, \gamma-s, At)$. Trouvez la valeur de A telle que $\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}$.

21. Soit $f(x)$ une fonction différentiable, et supposons que $f'(0) = 10$. Soit $g(s,t) = f(as-bt)$, où a et b sont des constantes. Évaluez $\frac{\partial g}{\partial s}$ au point $(s,t) = (b,a)$, i.e. trouvez $\frac{\partial g}{\partial s}\big|_{(b,a)}$.

22. Soit $w(s,t) = u(2s+3t, 3s-2t)$ pour une fonction différentiable deux fois $u = u(x,y)$.

(a) Trouvez w_{ss} en termes de u_{xx}, u_{xy} , et de u_{yy}. Vous pouvez supposer que $u_{xy} = u_{yx}$.

(b) Supposez que $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Pour quelle constante A est-ce que $w_{ss} = Aw_{tt}$?

23. Par définition, le gradient d'une fonction différentiable $f(x, y)$ à un point $(x_0\,,\,y_0)$ est

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,y_0)\,,\, \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0\,,\,y_0) \right)$$

Supposons que

$$\boldsymbol{\nabla} f(3, 6) = (7, 8)$$

Supposons également que

$$\boldsymbol{\nabla} g(1, 2) = (-1, 4)\,,$$

et

$$\boldsymbol{\nabla} h(1, 2) = (-5, 10)\,.$$

Supposons que $g(1, 2) = 3$, $h(1, 2) = 6$, et $z(s, t) = f\,(g(s, t), h(s, t))$, trouvez

$$\boldsymbol{\nabla} z(1, 2)$$

24.

(a) Soit f une fonction différentiable arbitraire définie sur la droite réelle. Montrez que la fonction w définie sur le plan réel par

$$w(x, y) = e^{-y} f(x - y)$$

satisfait l'équation différentielle partielle :

$$w + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

(b) Les équations $x = u^3 - 3uv^2$, $y = 3u^2v - v^3$ et $z = u^2 - v^2$ définissent z comme une fonction de x et de y. Déterminez $\frac{\partial z}{\partial x}$ au point $(u, v) = (2, 1)$ qui correspond au point $(x, y) = (2, 11)$.

25. Soit $f(u, v)$ une fonction différentiable, et soit $u = x + y$ et $v = x - y$. Trouvez une constante, α, telle que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \alpha \left((f_u)^2 + (f_v)^2 \right)$$

Pour aller plus loin.

26. Les équations

$$x^2 - y\cos(uv) = v$$
$$x^2 + y^2 - \sin(uv) = \frac{4}{\pi} u$$

définissent x et y implicitement comme fonctions de u et de v (i.e. $x = x(u, v)$, et $y = y(u, v)$) près du point $(x, y) = (1, 1)$ auquel $(u, v) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(a) Trouvez

$$\frac{\partial x}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial y}{\partial u}$$

à $(u, v) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(b) Si $z = x^4 + y^4$, déterminez $\frac{\partial z}{\partial u}$ au point $(u, v) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

27. Les textes sur la thermodynamique utilisent la relation

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1$$

Expliquez la signification de cette équation et prouvez qu'elle est vraie.

28. Supposez que $w = f(xz, yz)$, où f est une fonction différentiable. Montrez que

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = z\frac{\partial w}{\partial z}$$

29. Soit $f(u, v)$ une fonction différentiable de deux variables, et soit z une fonction différentiable de x et de y définie implicitement par $f(xz, yz) = 0$. Montrez que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -z$$

30. Soit z une fonction de x et de y telle que

$$z^3 - z + 2xy - y^2 = 0, \qquad z(2, 4) = 1.$$

(a) Trouvez l'approximation linéaire de z au point $(2, 4)$.

(b) Utilisez votre réponse de la partie (a) pour estimer la valeur de z en $(2.02, 3.96)$.

31. Si deux résistances ayant une résistance de R_1 et de R_2 sont en parallèles, alors la résistance résultante R satisfait l'équation $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Utilisez l'approximation linéaire pour estimer le changement dans R si R_1 décroît de 2 à 1.9 ohms et R_2 croît de 8 à 8.1 ohms.

32. La résistance totale R de trois résistances, R_1, R_2, R_3, connectées en parallèles est déterminée par

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si les résistances, mesurées en Ohms, sont $R_1 = 25$ ohms, $R_2 = 40$ ohms et $R_3 = 50$ ohms, avec une erreur possible de 0.5% dans chaque cas, estimez l'erreur maximale dans la valeur calculée de R.

33.

(a) Trouvez l'équation du plan tangent à la surface $x^2z^3 + y\sin(\pi x) = -y^2$ au point $P(1, 1, -1)$.

(b) Soit z défini implicitement par $x^2z^3 + y\sin(\pi x) = -y^2$. Trouvez $\frac{\partial z}{\partial x}$ au point $P(1, 1, -1)$.

(c) Soit z la même fonction implicite que dans la partie (ii), définie par l'équation $x^2z^3 + y\sin(\pi x) = -y^2$. Soit $x = 0.97$, et $y = 1$. Trouvez la valeur approximative de z.

34. Supposez qu'une fonction $z = f(x, y)$ est implicitement définie par une équation :

$$xyz + x + y^2 + z^3 = 0$$

(a) Trouvez $\frac{\partial z}{\partial x}$.

(b) Si $f(-1, 1) < 0$, trouvez l'approximation linéaire de la fonction $z = f(x, y)$ à $(-1, 1)$.

(c) Si $f(-1,1) < 0$, utilisez l'approximation linéaire en (b) pour approximer $f(-1.02, 0.97)$.

35. Une surface est définie implicitement par $z^4 - xy^2z^2 + y = 0$.

(a) Calculez $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en termes de x, y et z.

(b) Évaluez $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(x, y, z) = (2, -1/2, 1)$.

(c) Si x décroît de 2 à 1.94, et y croît de -0.5 à -0.4, trouvez le changement approximatif de z en 1.

(d) Trouvez l'équation du plan tangent à la surface au point $(2, -1/2, 1)$.

36. D'après l'équation de van der Waal, un gaz satisfait l'équation

$$(pV^2 + 16)(V - 1) = TV^2,$$

où p, V et T dénotent la pression, le volume et la température respectivement. Supposons que le gaz est maintenant à une pression de 1, un volume de 2 et une température de 5. Trouvez l'approximation du changement de volume si p augmente de 0.2 et T augmente de 0.3.

37. L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

se présente dans plusieurs modèles impliquant des phénomènes se comportant comme des vagues. Soit $u(x,t)$ et $v(\xi, \eta)$ relié par le changement de variables

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v\left(\xi(x,t), \eta(x,t)\right) \\ \xi(x,t) &= x - ct \\ \eta(x,t) &= x + ct \end{aligned}$$

(a) Montrez que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ si et seulement si $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

(b) Montrez que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ si et seulement si $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ pour des fonctions F et G.

(c) Interprétez $F(x-ct) + G(x+ct)$ en termes d'ondes progressives. Pensez à $u(x,t)$ comme la hauteur, à la position x et au temps t, d'une onde qui progresse le long de l'axe des x.

Remarque : Ne vous laissez pas déconcerter par les symboles étranges ξ et η. Ce sont juste deux lettres inoffensives de l'alphabet grec, appelées « xi » et « eta » respectivement.

2.6 Vecteur gradient

Motivation

Dans cette section, nous nous intéressons aux fonctions f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons, pour motiver la discussion, que $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sont données. On s'intéresse à $\mathbf{D}f$, mais vue à travers une lentille différente de celle de la section 2.4. Jusqu'à présent, on a surtout considéré $\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)$, la dérivée évaluée en un point, et on la comprend comme une transformation linéaire (c'est pour ça qu'il s'agit d'un vecteur rangée plutôt qu'un vecteur colonne). Le changement de point de vue consiste à considérer une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, à savoir la fonction

$$(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Cette nouvelle fonction $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ est ce qu'on appelle le **champ gradient de** f. Nous l'avons déjà évoqué très *tangentiellement* lors de la discussion sur les fonctions implicites (voir les paragraphes juste avant la figure 2.5.14). Ce champ gradient jouera un rôle crucial par la suite, notamment dans le dernier chapitre, celui sur le calcul vectoriel.

Nous rencontrerons deux contextes également importants, mais les interprétations du gradient seront différentes.

- D'une part, lorsqu'on aura une relation de la forme $z = f(x, y)$ ou, plus généralement, $z = f(\mathbf{x})$, où une variable (ici z) est définie *explicitement* en termes d'autres variables (ici (x, y) ou $\mathbf{x}$), le gradient de f sera surtout lié à la notion de *dérivée directionnelle.*
- D'autre part, lorsqu'on aura plutôt une relation de la forme $g(x, y) = k$ ou, plus généralement, $g(\mathbf{x}) = 0$, c'est-à-dire lorsqu'on aura une relation *implicite* entre certaines variables, le gradient de g sera plutôt lié à des considérations géométriques comme les objets tangents ou normaux à des ensembles de niveau.

Bien entendu, ces deux contextes sont liés, et il est (presque tout le temps) possible de passer de l'un à l'autre. Nous verrons comment.

Définition 2.6.1

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ donné et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles (sur $\mathcal{D}$). Le **gradient de** f est la fonction

$$\boldsymbol{\nabla} f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n \text{ donnée par } \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix}.$$

On représente les champs vectoriels (dans le plan) en dessinant au point (x, y) un vecteur représentant le vecteur $\boldsymbol{\nabla} f(x, y)$, à facteur d'échelle près. En effet, afin de ne pas surcharger la figure, il est commun d'ajuster la norme de $\boldsymbol{\nabla} f(x, y)$.

Exemple 2.6.2

Soit $f(x,y) = x^2 - 2y^2$. Le champ gradient de f est $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = 2x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$. La figure ci-contre représente le champ gradient $\boldsymbol{\nabla} f$ ainsi que certaines courbes de niveau de f. Par exemple, au point $(2,1)$, plutôt que de dessiner le vecteur $\boldsymbol{\nabla} f(2,1) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, on représente un multiple de celui-ci. Plus bas, nous allons expliquer le lien apparent entre le gradient et les courbes de niveau.

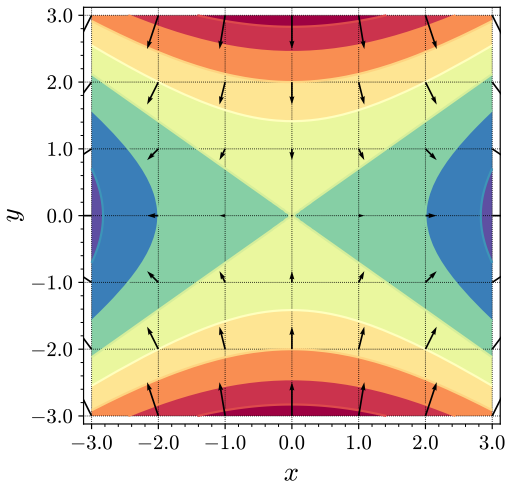


Figure 2.6.3 Courbes de niveau et champ gradient de $f(x,y) = x^2 - 2y^2$.

À vous de jouer 2.6.4

Si $f(x,y,z) = 2zy^2$, alors le gradient au point $(5,3,6)$ est :
$\nabla f(5,3,6) =$ _____ *(Indiquer un vecteur comme* $(0,1,2)$ *par* $< 0,1,2 >$*.)*

Remarquons que $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)^T$, c'est simplement la transposée de la dérivée de f, de sorte que l'approximation linéaire de f au point $\mathbf{r}_0$ (voir théorème 2.4.12) peut s'écrire simplement

$$L(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

c'est-à-dire que le produit matriciel devient un produit scalaire.

Dérivées directionnelles et le vecteur gradient

La principale interprétation de $\frac{df}{dx}(a)$ est le taux de variation instantané de $f(x)$, par unité de x, au point $x = a$. L'analogie naturelle pour les fonctions de plusieurs variables est celle de *dérivée directionnelle*.

Supposons que nous nous trouvons à proximité d'un feu de camp. La température perçue au point $\mathbf{r} = (x, y)$ est $f(x, y)$. Supposons que nous nous déplaçons avec une vitesse de norme constante (que nous supposons égale à 1) en passant par le point $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$. Lors du passage, la vitesse est $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$, et l'on se demande quel est le taux de variation de la température ressentie. Par exemple, dans la figure ci-contre, en partant de $(-1, -1)$ avec la direction $\mathbf{u}$ indiquée, on se demande comment on perçoit le changement de température.

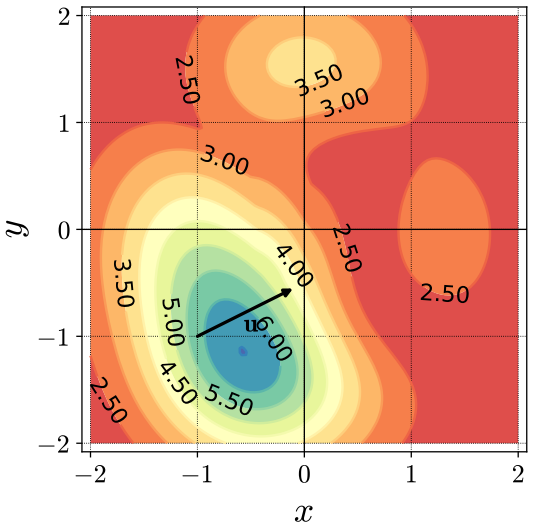


Figure 2.6.5 Les courbes isothermes sur une région du plan.

Plus précisément, nous avons un chemin $\boldsymbol{\gamma}(t)$ qui, au temps $t = 0$, passe par le point $\mathbf{r}_0$, c'est-à-dire tel que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{r}_0$. De plus, la condition sur la vitesse constante lors du déplacement revient à dire que $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \mathbf{u}$ est un vecteur unitaire.

Nous pourrions considérer n'importe quel chemin vérifiant ces conditions : un exemple serait $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, la droite par $\mathbf{r}_0$ dirigée par $\mathbf{v}$.

On s'intéresse au taux de variation de f le long de la courbe décrite par $\boldsymbol{\gamma}(t)$, c'est-à-dire au taux de variation de $f \circ \boldsymbol{\gamma}(t)$. Ce taux de variation est précisément la dérivée $\frac{d}{dt}\left(f \circ \boldsymbol{\gamma}\right)(t)$ évaluée en $t = 0$.

Bien entendu, ceci peut être généralisé aux fonctions de plus de deux variables.

Définition 2.6.6

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles. Soit, par ailleurs, $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire. La **dérivée directionnelle de f dans la direction de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{r}_0$** est

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{r}_0) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{u})\bigg|_{t=0}$$

lorsque cette dérivée (qui est une limite) existe.

Remarquons que l'hypothèse $\|\mathbf{u}\| = 1$ donne que $\mathbf{D}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{r}_0)$ est le taux de variation de la valeur de f lorsque, en partant de $\mathbf{r}_0$, on part dans la direction de $\mathbf{u}$ ***par unité de distance***.

Dans certains textes, on n'impose pas cette condition. Ceci revient à dire qu'on passe par $\mathbf{r}_0$ avec une vitesse arbitraire $\mathbf{v}$. Dans ce cas, on parlera plutôt de la **dérivée directionnelle de f le long de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{r}_0$**. La formule est la même, mais l'interprétation est différente : cette fois, $\mathbf{D}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}_0)$ est le taux de variation de la valeur de f lorsque, en partant de $\mathbf{r}_0$, on part dans la direction de $\mathbf{v}$ ***par unité de temps***.

Exemple 2.6.7

Soit $f(x, y) = x^{1/3} y^{1/3}$. Étudier l'existence de dérivées directionnelles de f à l'origine, dans la direction du vecteur unitaire $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}$.

Par définition, on s'intéresse à la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h\frac{\sqrt{2}}{2},h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2/3}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2/3}h^{-1/3}.$$

Or, cette limite n'existe pas. Cette fonction n'admet donc pas de dérivée directionnelle en $(0,0)$ dans la direction donnée, et ce, même si les dérivées partielles de f existent. On voit de la même façon qu'il n'y a pas de dérivée directionnelle dans toute direction $\mathbf{u}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}$ telle que $ab\neq 0$. Dans les directions des axes, par contre, f est nulle, et les dérivées directionnelles existent et valent 0.

Proposition 2.6.8

Soit $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n$ et $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ différentiable en un point $\mathbf{r}_0\in\mathcal{D}$. Alors, f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $\mathbf{r}_0$, et

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{r}_0)=\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{u}.$$

Démonstration. En effet, avec les notations et les hypothèses de l'énoncé, posons $\boldsymbol{\gamma}(t)=\mathbf{r}_0+t\mathbf{u}$. Par définition, nous avons $\mathbf{D}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{r}_0)=(f\circ\boldsymbol{\gamma})'(0)$. Or, f étant différentiable, la règle de la chaîne donne :

$$(f\circ\boldsymbol{\gamma})'(0)=\mathbf{D}(f\circ\boldsymbol{\gamma})(0)=\mathbf{D}f(\boldsymbol{\gamma}(0))\,\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}(0)=\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\boldsymbol{\gamma}'(0)$$
$$=\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}_0)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(0)=\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{u}.$$

■

Voyons maintenant quelques exemples.

Exemple 2.6.9

Trouver la dérivée directionnelle de $f(x,y)=e^{x+y^2}$ au point $(0,1)$ dans la direction de $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

Solution. Afin de calculer la dérivée directionnelle, nous avons besoin du gradient et donc des dérivées partielles de f au point $(0,1)$:

$$f_x(0,1)=e^{x+y^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=e \text{ et } f_y(0,1)=2ye^{x+y^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=2e,$$

de sorte que le gradient est

$$\boldsymbol{\nabla}f(0,1)=f_x(0,1)\,\mathbf{i}+f_y(0,1)\,\mathbf{j}=e\,\mathbf{i}+2e\,\mathbf{j}.$$

Par ailleurs, le vecteur donnant la direction doit être normalisé, puisque la norme de $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ est $\sqrt{2}$. Posons donc $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})$, le vecteur unitaire dans la direction de $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$. La dérivée directionnelle cherchée est

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}}f(0,1)=\boldsymbol{\nabla}f(0,1)\cdot\mathbf{u}=(e\,\mathbf{i}+2e\,\mathbf{j})\cdot\frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}=\frac{e}{\sqrt{2}}.$$

Exemple 2.6.10

Trouver la dérivée directionnelle de la fonction $w(x,y,z) = xyz + \ln(xz)$ au point $(1,3,1)$ dans la direction de $\mathbf{i}+\mathbf{k}$.

Solution. Pour commencer, les dérivées partielles de w en $(1,3,1)$ sont

$$\begin{aligned} w_x(1,3,1) &= \left[yz + \frac{1}{x}\right]\Bigg|_{(1,3,1)} = 3\times 1 + \frac{1}{1} = 4, \\ w_y(1,3,1) &= xz\Big|_{(1,3,1)} = 1\times 1 = 1, \\ w_z(1,3,1) &= \left[xy + \frac{1}{z}\right]\Bigg|_{(1,3,1)} = 1\times 3 + \frac{1}{1} = 4, \end{aligned}$$

de sorte que le gradient qui nous intéresse est

$$\boldsymbol{\nabla} w(1,3,1) = w_x(1,3,1)\,\mathbf{i} + w_y(1,3,1)\,\mathbf{j} + w_z(1,3,1)\,\mathbf{k} = 4\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\,\mathbf{k}.$$

Le vecteur unitaire dans la direction de $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ est $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k})$, et la dérivée directionnelle cherchée est

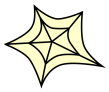
$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{u}} w(1,3,1) &= \boldsymbol{\nabla} w(1,3,1)\cdot\mathbf{u} = (4\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\,\mathbf{k})\cdot\frac{\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La dérivée directionnelle de w en $(1,3,1)$ dans la direction de $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$ est nulle si et seulement si, en posant $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|}$,

$$0 = \mathbf{D}_{\mathbf{u}} w(1,3,1) = \boldsymbol{\nabla} w(1,3,1)\cdot\mathbf{u} = (4\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\,\mathbf{k})\cdot\frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|},$$

ce qui arrive si et seulement si $\mathbf{d}$ est orthogonal à $4\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\,\mathbf{k}$. Ainsi, si l'on se déplace dans la direction de n'importe quel vecteur dans le plan $4x+y+4z=0$ (dont le vecteur normal est $4\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\,\mathbf{k}$), alors la dérivée directionnelle est nulle.

À vous de jouer 2.6.11



Calculer la dérivée directionnelle de $f(x,y,z) = z^3 - x^2y$ au point $(-1,-2,2)$ dans a direction du vecteur $\mathbf{v} = \langle 1,-2,-4\rangle$.

On vient de voir que le taux de variation instantané de f par unité de distance lorsqu'on quitte $\mathbf{r}_0$ dans la direction du vecteur unitaire $\mathbf{u}$ est un produit scalaire que l'on peut écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{u} = \|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r})\|\cos\theta,$$

où θ est l'angle formé par le vecteur gradient $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ et le vecteur de direction $\mathbf{u}$. Le fait de l'écrire de cette façon et que le cosinus d'un angle se trouve toujours entre -1 et 1 nous permet de faire quelques remarques importantes :

- La direction de plus grande augmentation de f lorsqu'on est à $\mathbf{r}_0$ est celle qui correspond à l'angle $\theta = 0$. Ainsi, afin d'avoir ce taux d'augmentation maximal, on doit quitter $\mathbf{r}_0$ dans la direction donnée par le gradient $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$. Le taux d'augmentation par unité de distance sera alors $\|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)\|$.
- La direction de taux d'augmentation minimale (c'est-à-dire le plus négative) est celle qui

correspond à $\theta = \pi$. Afin d'obtenir le taux minimal de variation par unité de distance, on doit quitter $\mathbf{r}_0$ dans la direction opposée de celle donnée par le vecteur gradient. Dans ce cas, le taux de variation est $-\|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)\|$.

- Les directions donnant un taux de variation nul sont celles perpendiculaires au vecteur gradient $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$. Si l'on se déplace dans une direction orthogonale à $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$, alors f reste constante. À cet instant, on se déplace de sorte que $f(\mathbf{r})$ reste constante, c'est-à-dire qu'on se déplace le long de l'ensemble de niveau de f (une courbe de niveau si f est une fonction de deux variables, ou une surface s'il s'agit d'une fonction de trois variables). Dans tous les cas, nous avons que $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ est orthogonal à l'ensemble de niveau $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0)$. Nous reviendrons sur ces considérations un peu plus tard.



À vous de jouer 2.6.12

Find the maximum rate of change of $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ at the point (5, -4) and the direction in which it occurs.

Maximum rate of change : _____

Direction (unit vector) in which it occurs : $\langle$_____, _____$\rangle$

Exemple 2.6.13

Soit $f(x, y) = 5 - x^2 - 2y^2$ et $(x_0, y_0) = (-1, -1)$. Dans cet exemple, on étudie le comportement de $f(x, y)$ autour du point (x_0, y_0).

Remarquons que, pour toute valeur de $f_0 < 5$, fixe, la courbe de niveau $f(x, y) = f_0$ est l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 5 - f_0$. Ainsi, le graphe de $z = f(x, y)$ est formé d'un amoncellement d'ellipses les unes par-dessus les autres.

- Puisque l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 5 - f_0$ a pour demi-axes $\sqrt{5 - f_0}$ dans la direction des x et $\sqrt{\frac{5-f_0}{2}}$ dans la direction des y,
  - les ellipses commencent en étant réduites à un point sur l'axe des z lorsque $f_0 = 5$ et
  - voient leur taille grandir à mesure que f_0 décroît.
- La portion du graphe $z = f(x, y)$ dans le premier octant est esquissée dans la figure de gauche ci-bas.
- Plusieurs courbes de niveau $f(x, y) = f_0$ sont esquissées dans la figure de droite.
- Le vecteur gradient

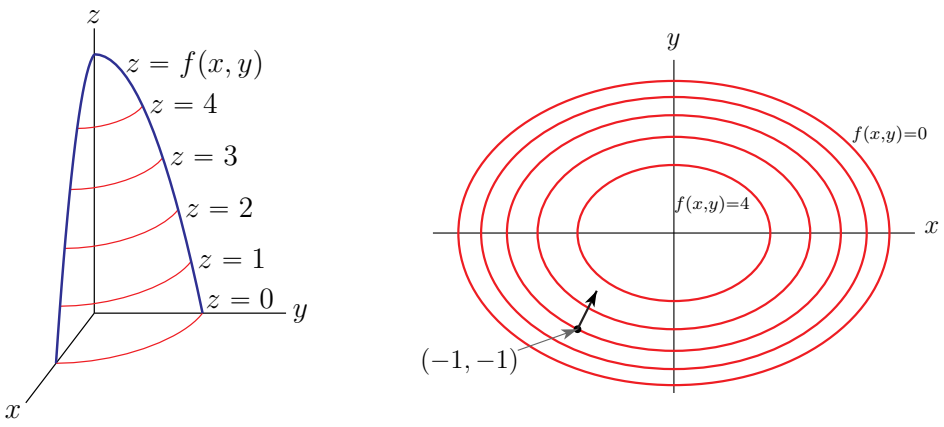
$$\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) = (-2x\,\mathbf{i} - 4y\,\mathbf{j})\big|_{(-1,-1)} = 2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} = 2(\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})$$

  au point $(-1, -1)$ est aussi illustré dans la figure de droite.

À $(x_0, y_0) = (-1, -1)$:

- Le vecteur unitaire donnant la direction de taux d'accroissement maximal est le vecteur gradient normalisé, c'est-à-dire $2(\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})$ normalisé : $\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})$. Le taux maximal d'accroissement est $\|2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}\| = 2\sqrt{5}$.
- Le vecteur unitaire donnant la direction de décroissance plus rapide est $-\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})$, et le taux de décroissance est $-\|2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}\| = -2\sqrt{5}$.
- Les directions donnant lieu à un taux de variation nul sont les directions orthogonales au gradient $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0)$. Un tel vecteur est [a] $2\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Ainsi, les vecteurs unitaires donnant

un taux de variation nul sont $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2\,\mathbf{i}-\mathbf{j})$. Il s'agit, bien entendu, de deux vecteurs directeurs pour la tangente à la courbe de niveau $f(x_0,y_0)$ au point (x_0,y_0), c'est-à-dire la courbe $f(x,y)=f(x_0,y_0)$.



Changeons un peu les choses pour le prochain exemple. Les taux de variation en deux directions différentes sont fournis, on verra comment ceci permet de déterminer le taux de variation dans n'importe quelle direction.

Exemple 2.6.14

Le taux de variation d'une fonction donnée $f(x,y)$ au point $P_0(1,2)$ dans la direction du point $P_1(2,3)$ est $2\sqrt{2}$ et dans la direction de $P_2(1,0)$ est -3. Quel est le taux de variation de f en P_0 dans la direction de l'origine $P_3(0,0)$?

Solution. On pourra facilement calculer le taux de variation de f au point P_0 dans n'importe quelle direction lorsqu'on connaîtra le gradient $\boldsymbol{\nabla} f(1,2)=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}$. On utilisera donc les deux taux de variation donnés pour trouver a et b, puis pour déterminer le taux de variation dans la direction de $(0,0)$.

Les deux taux de variation sont ceux dans les directions des vecteurs

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\mathbf{i}+\mathbf{j},\qquad \overrightarrow{P_0P_2}=-2\,\mathbf{j},$$

dont les vecteurs unitaires sont $\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ et $\mathbf{u}_2=-\mathbf{j}$. Ainsi, on sait que :

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}=\mathbf{D}_{\mathbf{u}_1}f(1,2)&=\boldsymbol{\nabla} f(1,2)\cdot\mathbf{u}_1=(a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j})\cdot\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}\\-3=\mathbf{D}_{\mathbf{u}_2}f(1,2)&=\boldsymbol{\nabla} f(1,2)\cdot\mathbf{u}_2=(a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{j})\\&=-b.\end{aligned}$$

Ces deux calculs fournissent ainsi deux équations linéaires en a et b. La seconde équation donne directement $b=3$. En remplaçant dans la première, on obtient $a=1$. Le vecteur direction de $P_0(1,2)$ vers $P_3(0,0)$ est

$$\overrightarrow{P_0P_3}=-\mathbf{i}-2\,\mathbf{j},$$

de vecteur unitaire $\mathbf{u}_3=-\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i}+2\,\mathbf{j})$, et le taux de variation (par unité de distance) dans

[a] Vérifiez-le avec le produit scalaire !

cette direction est

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\mathbf{u}_3} f(1,2) &= \boldsymbol{\nabla} f(1,2)\cdot \mathbf{u}_3 = (a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j})\cdot \mathbf{u}_3 \\ &= (\mathbf{i}+3\,\mathbf{j})\cdot \frac{-\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}}{\sqrt{5}} = -\frac{7}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$



À vous de jouer 2.6.15

Supposons qu'une fonction réelle à deux variables $f(x,y)$ ait des dérivées directionnelles au point $(4,4)$ données par :
$\frac{4}{\sqrt{41}}$ dans la direction du vecteur $(5,4)$, et
$\frac{2}{\sqrt{41}}$ dans la direction du vecteur $(4,5)$.
Le gradient de f au point $(4,4)$ est
(_____, _____).

Exemple 2.6.16 Le gradient en coordonnées polaires.

Trouver le gradient en coordonnées polaires.

Solution. Comme c'est souvent le cas, bien comprendre la question est plus que la moitié du travail. Par la définition 2.6.1, le gradient d'une fonction $g(x,y)$ est le vecteur $g_x(x,y)\,\mathbf{i} + g_y(x,y)\,\mathbf{j}$. Dans cette question, on nous donne une fonction $f(r,\theta)$ exprimée avec les coordonnées polaires r et θ. Nous convertissons celle-ci en coordonnées rectangulaires et nous considérons la fonction

$$g(x,y) = f\left(r(x,y), \theta(x,y)\right),$$

où

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta(x,y) &= \arctan\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Puis, nous voulons calculer le gradient de $g(x,y)$ et l'exprimer en termes de r et θ. En vertu de la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{r\cos\theta}{r} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\frac{r\sin\theta}{r^2},\end{aligned}$$

puisque $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$,

$$= \frac{\partial f}{\partial r}\,\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\frac{\sin\theta}{r}.$$

De la même façon,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial r}\ \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\ \frac{1/x}{1+(y/x)^2} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\ \frac{x}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\ \sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\ \frac{\cos\theta}{r},
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$
\boldsymbol{\nabla} g = g_x\,\mathbf{i} + g_y\,\mathbf{j} = f_r\,(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}) + \frac{f_\theta}{r}(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).
$$

Les deux vecteurs qui apparaissent ici sont unitaires et orthogonaux. Si on les nomme

$$
\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j},
$$

le premier pointe dans la direction où r croît, et le second dans la direction où θ croît. Le gradient s'écrit alors simplement

$$
\boldsymbol{\nabla} g = f_r\,\mathbf{e}_r + \frac{f_\theta}{r}\,\mathbf{e}_\theta,
$$

ou, avec les points d'évaluation écrits explicitement,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} g(x,y) = {} & f_r\,(r(x,y),\theta(x,y))\ \big(\cos\theta(x,y)\,\mathbf{i} + \sin\theta(x,y)\,\mathbf{j}\big) \\
& + \frac{1}{r(x,y)} f_\theta\,(r(x,y),\theta(x,y))\ \big(-\sin\theta(x,y)\,\mathbf{i} + \cos\theta(x,y)\,\mathbf{j}\big).
\end{aligned}
$$

Le calcul de l'exemple précédent repose sur la règle de la chaîne, appliquée séparément à chacune des deux dérivées partielles. La forme matricielle de cette règle (théorème 2.5.1) permet d'organiser le même calcul de façon plus compacte, en travaillant avec la dérivée $\mathbf{D}g$ (un vecteur ligne) plutôt qu'avec le gradient. C'est ce que fait l'exemple suivant.

Exemple 2.6.17 Le gradient en coordonnées polaires : approche matricielle.

Reprendre l'exemple 2.6.16 précédent en utilisant la forme matricielle de la règle de la chaîne.

Solution. Comme dans l'exemple précédent, posons $g(x,y) = f\big(r(x,y),\theta(x,y)\big)$. Autrement dit, $g = f \circ \Phi$, où $\Phi(x,y) = \big(r(x,y),\theta(x,y)\big)$, avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$. La règle de la chaîne donne

$$
\mathbf{D}g(x,y) = \mathbf{D}f\big(r,\theta\big)\ \mathbf{D}\Phi(x,y),
$$

un produit d'un vecteur ligne 1×2 par une matrice 2×2.

La dérivée de f est le vecteur ligne $\mathbf{D}f(r,\theta) = \begin{bmatrix} f_r & f_\theta \end{bmatrix}$. La matrice $\mathbf{D}\Phi(x,y)$ regroupe les dérivées partielles de r et de θ, déjà calculées dans l'exemple précédent :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x & y \\ -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Le produit matriciel donne alors, en une seule étape,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} g_x & g_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_r & f_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_r\cos\theta - \dfrac{f_\theta}{r}\sin\theta & f_r\sin\theta + \dfrac{f_\theta}{r}\cos\theta \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Le gradient est la transposée de la dérivée, $\boldsymbol{\nabla} g = \mathbf{D}g^T$. On retrouve donc

$$\boldsymbol{\nabla} g = \Big(f_r\cos\theta - \frac{f_\theta}{r}\sin\theta\Big)\mathbf{i} + \Big(f_r\sin\theta + \frac{f_\theta}{r}\cos\theta\Big)\mathbf{j} = f_r\,\mathbf{e}_r + \frac{f_\theta}{r}\,\mathbf{e}_\theta,$$

comme dans l'exemple 2.6.16 précédent.

Gradient et ensembles de niveau

Considérons le cas des fonctions à deux variables et posons $\mathbf{r} = (x, y)$. Nous avons déjà vu que si $\mathcal{C}$ est une courbe de niveau donnée par $f(x, y) = 0$ et que $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, alors la tangente à $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}_0$ est

$$\mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \qquad (*)$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Ayant à l'esprit la définition du gradient 2.6.1, nous obtenons plus que la moitié de la preuve du résultat suivant :

Théorème 2.6.18

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ différentiable et $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ un point sur la courbe de niveau $f(\mathbf{r}) = c$. Alors,

(a) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}_0$ est

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0\,;$$

(b) l'équation de la droite passant par $\mathbf{r}_0$ et orthogonale à $\mathcal{C}$ en ce point est

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0).$$

Démonstration. Le premier énoncé est simplement une reformulation de l'équation $(*)$.

Le second énoncé découle du fait que le vecteur $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ est un vecteur normal pour la tangente, donc un vecteur directeur pour la droite normale. ■

Exemple 2.6.19

Soit $\mathcal{C}$ donnée par $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$. Soit $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en un point quelconque, et $(x^*, 0)$, $(0, y^*)$ les points d'intersection de $\mathcal{T}$ avec les axes de coordonnées.

Montrer que la quantité $x^* + y^*$ ne dépend pas du point de tangence choisi.

Solution. Soit $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ et $(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$. Le gradient de f est

$$f_x(x,y)\mathbf{i}+f_y(x,y)\mathbf{j}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{i}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbf{j}.$$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en (x_0,y_0) est alors

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)\\ \iff 0&=\frac{x}{\sqrt{x_0}}-\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}-\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}\\ \iff \sqrt{c}&=\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}},\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de ce que (x_0,y_0) se trouve sur $\mathcal{C}$.

Les intersections de la tangente $\mathcal{T}$ avec les axes des coordonnées se calculent aisément

- avec l'axe des abscisses : $y=0$ donne $x^*=\sqrt{cx_0}$;
- avec l'axe des ordonnées : $x=0$ donne $y^*=\sqrt{cy_0}$.

Ainsi,

$x^*+y^*=\sqrt{cx_0}+\sqrt{cy_0}=\sqrt{c}\,(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})=c.$

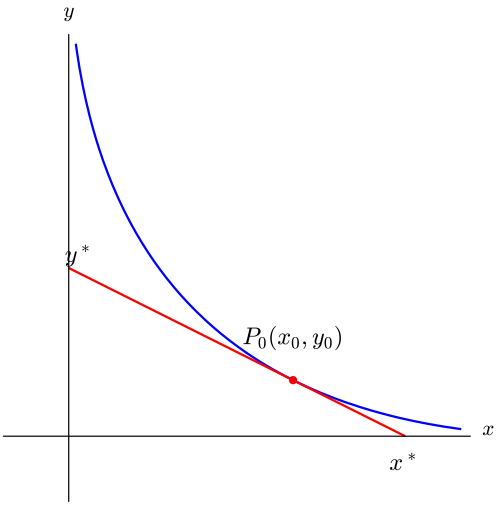
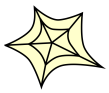


Figure 2.6.20 La courbe $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$ ainsi que sa tangente en un point quelconque

À vous de jouer 2.6.21



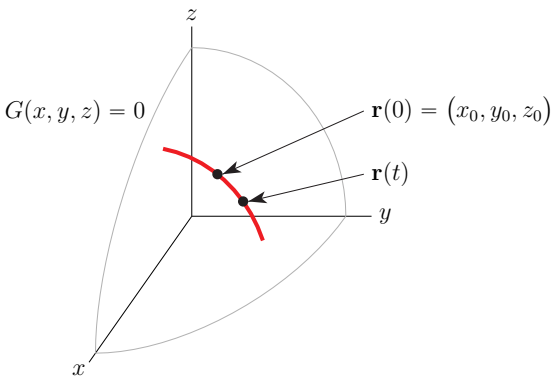
Considérez la courbe $(y-x)^2+2=xy-3$ comme une courbe de niveau de $f(x,y)$.
(a) À l'aide de $\nabla f(3,2)$ trouver un vecteur normal a la courbe au point $(3,2)$.
(b) Avec la réponse de (a) trouver l'équation (implicite) de la tangente a la courbe au point $(3,2)$.

Avec une variable de plus, nous assistons à une métamorphose :

- La courbe d'équation $f(x,y)=k$ devient une surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x,y,z)=k$, et le point (x_0,y_0) devient un point (x_0,y_0,z_0) sur $\mathcal{S}$;
- La droite tangente à la courbe devient le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$.

Nous allons utiliser un procédé semblable à celui qui nous a servi lors de notre discussion au sujet des fonctions implicites, mais avec une surface au lieu d'une courbe. Soit $\mathcal{S}$ la surface $G(x,y,z)=0$ et $R_0\,(x_0,\,y_0,\,z_0)$ un point sur $\mathcal{S}$.

Imaginons que nous nous promenons sur la surface et que, à l'instant $t = 0$, nous passons au point $R_0\,(x_0,\, y_0,\, z_0)$. Soit $\mathbf{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$ la position au temps t.



Puisque notre balade a lieu sur la surface, nous savons que $\mathbf{r}(t)$ se trouve sur la surface, c'est-à-dire

$$G \circ \mathbf{r}(t) = G\,(x(t),\, y(t),\, z(t)) = 0$$

pour tout t. En dérivant par rapport à t, on obtient, en vertu de la règle de la chaîne,

$$(\mathbf{D}G \circ \mathbf{r}(t))\,\mathbf{r}'(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial G}{\partial x}\,(x(t),\, y(t),\, z(t))\;\; x'(t) + \frac{\partial G}{\partial y}\,(x(t),\, y(t),\, z(t))\;\; y'(t) + \frac{\partial G}{\partial z}\,(x(t),\, y(t),\, z(t))\;\; z'(t) = 0.$$

En particulier, en $t = 0$, on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial x}\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\;\; x'(0) + \frac{\partial G}{\partial y}\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\;\; y'(0) + \frac{\partial G}{\partial z}\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\;\; z'(0) = 0. \qquad (\dagger\dagger)$$

À nouveau, compte tenu de la définition du gradient de G, l'égalité $(\dagger\dagger)$ se lit simplement

$$\boldsymbol{\nabla} G(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}_0' = 0,$$

c'est-à-dire que le gradient $\boldsymbol{\nabla} G(\mathbf{r}_0)$ est orthogonal à $\mathbf{r}_0'$.

Ceci étant vrai pour toute courbe sur $\mathcal{S}$ passant par $\mathbf{r}_0$, on a que $\boldsymbol{\nabla} G(\mathbf{r}_0)$ est orthogonal au plan tangent à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}_0$. Ceci donne la preuve du résultat suivant.

Théorème 2.6.22 Plan tangent et droite normale : surfaces de niveau.

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $G(x, y, z) = k$ et $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ un point de $\mathcal{S}$ où le gradient $\boldsymbol{\nabla} G(\mathbf{r}_0)$ existe et est non nul. Pour un point (x, y, z) quelconque, posons $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Alors :

(a) le vecteur $\boldsymbol{\nabla} G(\mathbf{r}_0)$ est orthogonal à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}_0$;

(b) le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}_0$ a pour équation

$$\boldsymbol{\nabla} G(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

c'est-à-dire, en coordonnées,

$$G_x(\mathbf{r}_0)\,(x - x_0) + G_y(\mathbf{r}_0)\,(y - y_0) + G_z(\mathbf{r}_0)\,(z - z_0) = 0;$$

(c) la droite normale à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}_0$ admet le paramétrage

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\boldsymbol{\nabla} G(\mathbf{r}_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.6.23

Nous avons quelques idées au sujet des plans tangents aux surfaces $z = f(x, y)$ et des approximations linéaires, voir la définition 2.4.3 et le paragraphe qui la suit. Il s'agit de conséquences du théorème 2.6.22. En effet, il est toujours possible d'écrire l'équation $z = f(x, y)$ sous la forme $z - f(x, y) = 0$ et d'invoquer le théorème 2.6.22 avec $G(x, y, z) = z - f(x, y)$, puisque

$$\boldsymbol{\nabla} G(x_0, y_0, z_0) = -f_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i} - f_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Le théorème 2.6.22 donne alors ces faits comme une conséquence.

Il est ***très important*** de pouvoir passer d'un contexte à l'autre.

Remarque 2.6.24 Deux interprétations du gradient.

Le gradient joue deux rôles différents, selon le contexte. Supposons que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable.

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = f(x, y)$, c'est-à-dire le graphe de f. Alors $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0)$ est un vecteur qui vit *dans le domaine* de f : il pointe, à partir de (x_0, y_0), dans la direction de plus forte croissance de f (voir la sous-section « Dérivées directionnelles et le vecteur gradient »).

Si on voit plutôt cette même surface comme une surface de niveau, celle d'équation $G(x, y, z) = 0$ avec $G(x, y, z) = f(x, y) - z$ (au signe près, comme à la remarque 2.6.23), alors, au point (x_0, y_0, z_0) de la surface (avec $z_0 = f(x_0, y_0)$), $\boldsymbol{\nabla} G(x_0, y_0, z_0)$ est un vecteur *normal à la surface*, orthogonal au plan tangent en ce point (théorème 2.6.22). C'est la même idée que pour les courbes de niveau, une dimension plus haut.

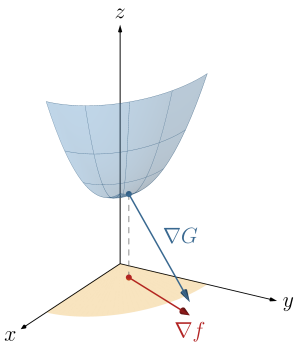


Figure 2.6.25 $\boldsymbol{\nabla} f$ dans le domaine, $\boldsymbol{\nabla} G$ normal à la surface

La figure 2.6.25 montre les deux sur un même exemple. En rouge, $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0)$, dans le domaine, pointe dans la direction de plus forte croissance de f ; en bleu, $\boldsymbol{\nabla} G(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ est normal à la surface au point correspondant. Sa partie horizontale est précisément $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0)$.

Voyons maintenant quelques exemples.

Exemple 2.6.26

Trouver le plan tangent et la droite normale à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = x^2 + 5xy - 2y^2$ au point $(1, 2, 3)$.

Solution. Vérifions pour commencer que $1^2 + 5 \times 1 \times 2 - 2(2)^2 = 3$, de sorte que le point $(1, 2, 3)$ appartient effectivement à la surface $\mathcal{S}$.

Écrivons l'équation de la surface sous la forme $G(x, y, z) = x^2 + 5xy - 2y^2 - z = 0$. Alors, le gradient est

$$\boldsymbol{\nabla} G(x, y, z) = (2x + 5y)\,\mathbf{i} + (5x - 4y)\,\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

de sorte que, en vertu du théorème 2.6.22, $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nabla} G(1,2,3) = 12\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ est un vecteur normal à la surface au point $(1,2,3)$. Ayant le vecteur normal, nous n'avons plus qu'à trouver l'équation du plan tangent.

$$\mathbf{n} \cdot \big((x-1)\,\mathbf{i} + (y-2)\,\mathbf{j} + (z-3)\,\mathbf{k}\big) = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{bmatrix} = 0$$

ou encore

$$12x - 3y - z = 3$$

On vérifie aisément que $(1,2,3)$ se trouve bel et bien sur le plan : $12 \times 1 - 3 \times 2 - 3 = 3$. La droite normale est donc

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{bmatrix} = t\,\mathbf{n} = t \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1} \quad \big(= t\big).$$

Mise en garde 2.6.27

Le vecteur $\boldsymbol{\nabla} G(x,y,z)$ n'est pas orthogonal à la surface $G(x,y,z) = K$ au point (x_0,y_0,z_0). Le vecteur $\boldsymbol{\nabla} G(x_0,y_0,z_0)$ est orthogonal à la surface en ce point (pourvu, bien entendu, qu'il s'agisse d'un point de la surface, c'est-à-dire $G(x_0,y_0,z_0) = K$).

Considérons l'exemple suivant pour illustrer les problèmes qui peuvent arriver si nous omettons d'évaluer $\boldsymbol{\nabla} G(x,y,z)$ en (x_0,y_0,z_0).

Trouver le plan tangent à la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ au point $(0,0,1)$.

Dans ce cas, la surface est donnée par $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Le gradient de G est $\boldsymbol{\nabla} G(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$. Afin d'invoquer correctement la partie (b) du théorème 2.6.22, on doit évaluer $\boldsymbol{\nabla} G(0,0,1) = 2\,\mathbf{k}$ et trouver que le plan tangent en $(0,0,1)$ est

$$\boldsymbol{\nabla} G(0,0,1) \cdot \big(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z-1)\,\mathbf{k}\big) = 0 \quad \text{ou} \quad 2(z-1) = 0 \quad \text{ou} \quad z = 1.$$

Ceci est correct : le plan tangent à la sphère unité au pôle nord est un plan horizontal.

Cependant, si l'on applique incorrectement la partie (b) du théorème 2.6.22, sans évaluer $\boldsymbol{\nabla} G(x,y,z)$ au point $(0,0,1)$, on trouverait que le « plan tangent » est

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\nabla} G(x,y,z) \cdot \big(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z-1)\,\mathbf{k}\big) = 0 \\ \text{ou} \quad & 2x(x-0) + 2y(y-0) + 2z(z-1) = 0 \\ \text{ou} \quad & x^2 + y^2 + z^2 - z = 0, \end{aligned}$$

ce qui est terriblement faux. Cette équation n'est même pas l'équation d'un plan puisque tout plan a une équation de la forme $ax + by + cz = d$, avec a, b, c et d des constantes.

Voyons plus d'exemples.

Exemple 2.6.28

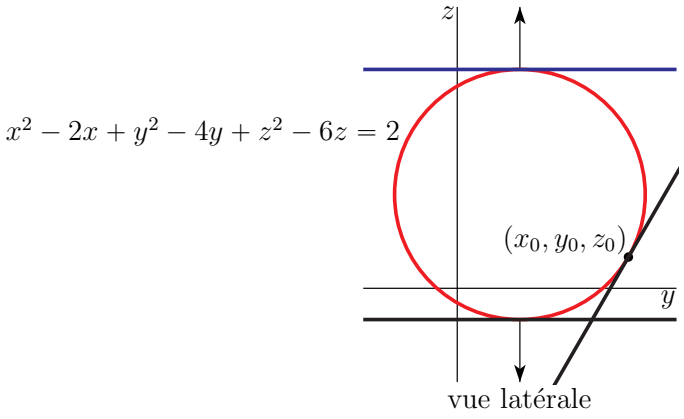
Supposons que nous voulons déterminer le point le plus haut et le point le plus bas sur la surface $G(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z = 2$, c'est-à-dire que nous voulons déterminer, parmi les points de cette surface, ceux pour lesquels la coordonnée z a la valeur la plus grande ou la plus petite.

Après complétion des carrés, on obtient

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z \\ &= (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 14, \end{aligned}$$

de sorte que la surface $G(x,y,z) = 2$ est une sphère, son point le plus haut est le « pôle nord » et son point le plus bas est le « pôle sud ». Supposons cependant que $G(x,y,z) = 2$ est plus compliquée et que nous ne pouvons pas l'esquisser facilement.

Nous allons trouver les points qui nous intéressent en utilisant le fait que le plan tangent à la surface $G = 2$ est horizontal en ces points. De façon équivalente, le vecteur normal à $G = 2$ doit être vertical. En effet, regardons la figure ci-bas. Si le plan tangent en (x_0, y_0, z_0) n'est pas horizontal, alors ce plan tangent contient des points dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) avec $z > z_0$ et d'autres points dans ce voisinage avec $z < z_0$. Près de (x_0, y_0, z_0), le plan tangent est une bonne approximation de la surface [a], de sorte qu'elle contient aussi de tels points.



Le gradient est

$$\boldsymbol{\nabla} G(x,y,z) = (2x-2)\,\mathbf{i} + (2y-4)\,\mathbf{j} + (2z-6)\,\mathbf{k}.$$

Il est vertical lorsque les composantes en $\mathbf{i}$ et en $\mathbf{j}$ sont nulles. Ceci arrive lorsque $2x-2=0$ et $2y-4=0$, c'est-à-dire lorsque $x=1$ et $y=2$. Ainsi, le vecteur normal à la surface $G=2$ au point (x,y,z) est vertical quand $x=1$, $y=2$ et (il ne faut pas oublier ceci !) (x,y,z) se trouve sur $G=2$.

$$\begin{aligned} & G(1,2,z) = 1^2 - 2\times 1 + 2^2 - 4\times 2 + z^2 - 6z = 2 \\ \iff & z^2 - 6z - 7 = 0 \\ \iff & (z-7)(z+1) = 0 \\ \iff & z = 7,\ -1. \end{aligned}$$

Le point le plus haut est $(1,2,7)$ tandis que le point le plus bas est $(1,2,-1)$, tel qu'on s'y attendait.

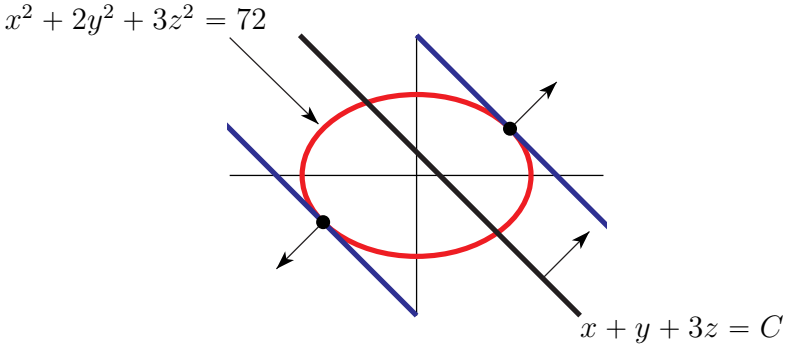
[a] Nous reviendrons avec plus de précision sur ce point, lorsque la notion de *différentiabilité* sera introduite.

Dans cet exemple, nous aurions pu utiliser le fait que la surface est une sphère et que, dans ce cas, le vecteur joignant le centre à un point quelconque est orthogonal au plan tangent en ce point. Voyons un autre exemple dans lequel un tel raccourci n'est pas possible.

Exemple 2.6.29

Trouver les points sur la surface $x^2+2y^2+3z^2=72$ qui donnent lieu à la plus grande ainsi qu'à la plus basse valeur de $x+y+3z$.

Afin de développer une stratégie pour résoudre ce problème, considérons l'esquisse ci-bas.



L'ellipse en rouge représente la surface

$$x^2+2y^2+3z^2=72,$$

qui est un ellipsoïde. La ligne diagonale du milieu (en noir) représente le plan $x+y+3z=C$ pour une certaine valeur de C que nous ferons varier astucieusement. À chaque point sur ce plan, la fonction $(x,y,z)\mapsto x+y+3z$ (que l'on veut maximiser ou minimiser) prend la valeur C.

En particulier, pour la valeur de C choisie dans la figure, le plan $x+y+3z=C$ coupe notre surface, ce qui nous dit que $x+y+3z$ prend la valeur C à quelque part sur la surface.

Afin de maximiser $x+y+3z$, imaginons que la valeur de C croît lentement, de sorte que le plan $x+y+3z=C$ se déplace vers la droite [a]. Nous voulons arrêter de faire croître la valeur de C lorsque nous atteindrons la plus grande valeur de C pour laquelle le plan $x+y+3z=C$ coupe la surface $x^2+2y^2+3z^2=72$. Pour cette valeur de C, le plan $x+y+3z=C$, représenté par la diagonale bleue de droite, est tangent à notre surface.

De la même façon, si l'on veut minimiser $x+y+3z$, on doit diminuer la valeur de C. Le même argument mène à conclure que, au point de minimum, le plan doit être tangent à la surface. L' exemple 2.6.28 était semblable, mais le plan en question était $z=C$.

Nous sommes en mesure de calculer. Nous avons besoin de trouver les points (a,b,c) (dans la figure, ils sont représentés par les points de tangence, en noir) pour lesquels

- (a,b,c) se trouve sur la surface, et
- le vecteur normal à la surface $x^2+2y^2+3z^2=72$ en (a,b,c) est parallèle au vecteur normal du plan, c'est-à-dire à $\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}$.

Étant donné que le gradient de $x^2+2y^2+3z^2$ est $2x\,\mathbf{i}+4y\,\mathbf{j}+6z\,\mathbf{k}=2(x\,\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}+3z\,\mathbf{k})$, ces conditions sont équivalentes aux équations ci-après.

$$\begin{aligned} a^2+2b^2+3c^2&=72\\ a\,\mathbf{i}+2b\,\mathbf{j}+3c\,\mathbf{k}&=t(\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}), \qquad \text{pour un scalaire } t \end{aligned}$$

La seconde équation dit que $a=t$, $b=\frac{t}{2}$ et $c=t$. En remplaçant dans la première équation, on obtient

$$t^2+\frac{1}{2}t^2+3t^2=72 \iff \frac{9}{2}t^2=72 \iff t^2=16 \iff t=\pm 4,$$

de sorte que

- le point sur la surface $x^2+2y^2+3z^2=72$ pour lequel $x+y+3z$ atteint sa valeur maximale est $(a,b,c)=\left(t,\frac{t}{2},t\right)\Big|_{t=4}=(4,2,4)$, et
- $x+y+3z$ prend la valeur $4+2+3\times 4=18$ en ce point ;
- le point sur la surface $x^2+2y^2+3z^2=72$ pour lequel $x+y+3z$ atteint sa valeur minimale est $(a,b,c)=\left(t,\frac{t}{2},t\right)\Big|_{t=-4}=(-4,-2,-4)$, et
- $x+y+3z$ prend la valeur $-4-2+3\times(-4)=-18$ en ce point.

Exemple 2.6.30

Soit $F(x,y,z)=0$ et $G(x,y,z)=0$ deux surfaces se coupant le long d'une courbe. Trouver un vecteur qui est tangent à cette courbe au point (x_0,y_0,z_0).

Solution. Soit $\mathbf{T}$ le vecteur tangent cherché. Ainsi, $\mathbf{T}$ doit être

- tangent à la surface $F(x,y,z)=0$ en (x_0,y_0,z_0) et
- tangent à la surface $G(x,y,z)=0$ en (x_0,y_0,z_0).

Ainsi, $\mathbf{T}$ doit être

- orthogonal au vecteur $\boldsymbol{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)$, qui est normal à $F(x,y,z)=0$ en (x_0,y_0,z_0), et, en même temps, il doit être
- orthogonal au vecteur $\boldsymbol{\nabla} G(x_0,y_0,z_0)$, qui est normal à $G(x,y,z)=0$ en (x_0,y_0,z_0).

On peut donc utiliser le produit vectoriel des deux vecteurs gradients pour construire $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}=\boldsymbol{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)\times\boldsymbol{\nabla} G(x_0,y_0,z_0)&=\det\begin{bmatrix}\mathbf{i}&F_x&G_x\\ \mathbf{j}&F_y&G_y\\ \mathbf{k}&F_z&G_z\end{bmatrix}\\ &=(F_yG_z-F_zG_y)\,\mathbf{i}+(F_zG_x-F_xG_z)\,\mathbf{j}+(F_xG_y-F_yG_x)\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

où, bien entendu, toutes les dérivées partielles doivent être évaluées en $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)$.

Voyons l' exemple 2.6.30 en action.

Exemple 2.6.31

Considérer la courbe intersection des surfaces $x^2+y^2+z^2=5$ et $x^2+y^2=4z$. Trouver un vecteur tangent à cette courbe au point $\left(\sqrt{3}\,,\,1\,,\,1\right)$.

Solution. Vérifions tout d'abord que le point $\left(\sqrt{3}\,,\,1\,,\,1\right)$ se trouve bel et bien sur la courbe, c'est-à-dire qu'il vérifie les deux équations :

$$\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2+1^2=5\qquad\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2=4\times 1.$$

Nous trouverons le vecteur tangent voulu en utilisant la stratégie de l' exemple 2.6.30.

Posons $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ et $G(x,y,z)=x^2+y^2-4z$. Alors,

[a] En effet, $\frac{\partial C}{\partial x}=1=\frac{\partial C}{\partial y}>0$.

- le vecteur
$$\boldsymbol{\nabla} F\left(\sqrt{3},1,1\right) = \left[\begin{array}{c} 2x \\ 2y \\ 2z \end{array}\right]\Bigg|_{(\sqrt{3},1,1)} = 2\left[\begin{array}{c} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]$$
est normal à $F(x,y,z)=5$ en $\left(\sqrt{3},\,1,\,1\right)$, et
- le vecteur
$$\boldsymbol{\nabla} G\left(\sqrt{3},1,1\right) = \left[\begin{array}{c} 2x \\ 2y \\ -4 \end{array}\right]\Bigg|_{(\sqrt{3},1,1)} = 2\left[\begin{array}{c} \sqrt{3} \\ 1 \\ -2 \end{array}\right]$$
est normal à $G(x,y,z)=0$ en $\left(\sqrt{3},\,1,\,1\right)$.

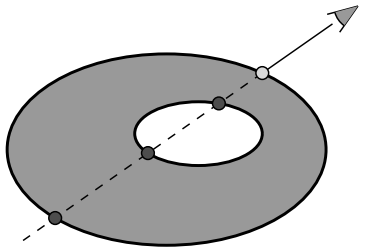
Ainsi, un vecteur tangent est

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{c} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} \sqrt{3} \\ 1 \\ -2 \end{array}\right] &= \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \mathbf{j} & 1 & 1 \\ \mathbf{k} & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= (-2-1)\,\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)\mathbf{j} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)\mathbf{k} \\ &= -3\,\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Il y a un facteur 3 dans les deux composantes non nulles, de sorte que l'on peut choisir $-\mathbf{i}+\sqrt{3}\,\mathbf{j}$ comme vecteur tangent.

Exemple 2.6.32 Graphiques par ordinateur, élimination de surfaces cachées.

Lorsque nous regardons un objet tridimensionnel, nous ne le voyons pas au complet : certaines portions de l'objet nous sont cachées par d'autres portions de celui-ci. Par exemple, l'esquisse ci-bas schématise la trajectoire d'un rayon de lumière entre l'œil et la surface de l'objet. L'objet est solide, de sorte que le rayon ne peut pas le traverser. S'il le pouvait, il traverserait, suivant la ligne pointillée, rencontrant la surface de l'objet à trois autres reprises. L'œil peut voir un seul point, mais pas les trois autres.



La technique de reproduire cet effet en infographie est connue comme l' « élimination de surfaces cachées ». En général, l'implémentation peut être compliquée. Souvent, on utilise une technique appelée « ray tracing ». Elle est relativement simple à comprendre pour peu qu'on connaisse les vecteurs et les gradients, et si, l'on regarde un seul objet convexe (par définition, un objet est convexe si, lorsque deux points se trouvent sur celui-ci, tout le segment de droite joignant ces deux points fait également partie de l'objet).

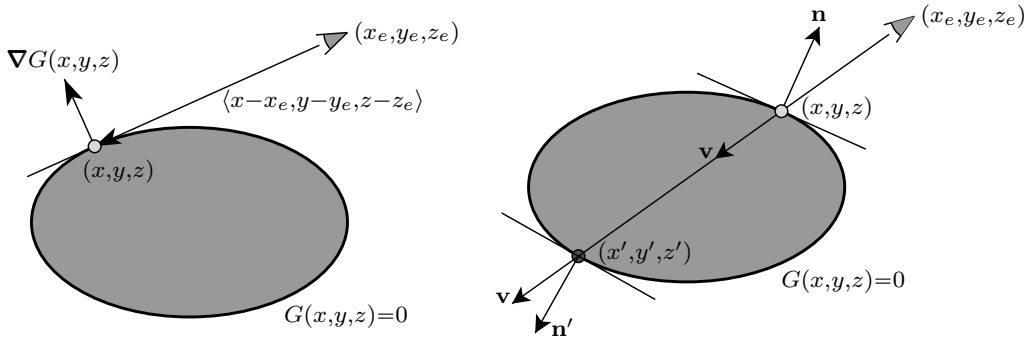


non convexe convexe

Supposons donc que nous regardons un solide convexe, et que l'équation de sa surface est $G(x, y, z) = 0$ et que notre œil se trouve à (x_e, y_e, z_e).

- Travaillons à reculons et considérons pour commencer un rayon de lumière qui quitte l'œil et effleure le solide en (x, y, z), comme dans la figure de gauche ci-bas. Le rayon est tangent à la surface en (x, y, z). Ainsi, le vecteur donnant la direction du rayon, $\begin{bmatrix} x-x_e \\ y-y_e \\ z-z_e \end{bmatrix}$, est tangent à la surface en (x, y, z) et, conséquemment, il est orthogonal au vecteur normal $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nabla} G(x, y, z)$, à la surface en (x, y, z). Ainsi,

$$\begin{bmatrix} x - x_e \\ y - y_e \\ z - z_e \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\nabla} G(x, y, z) = 0.$$



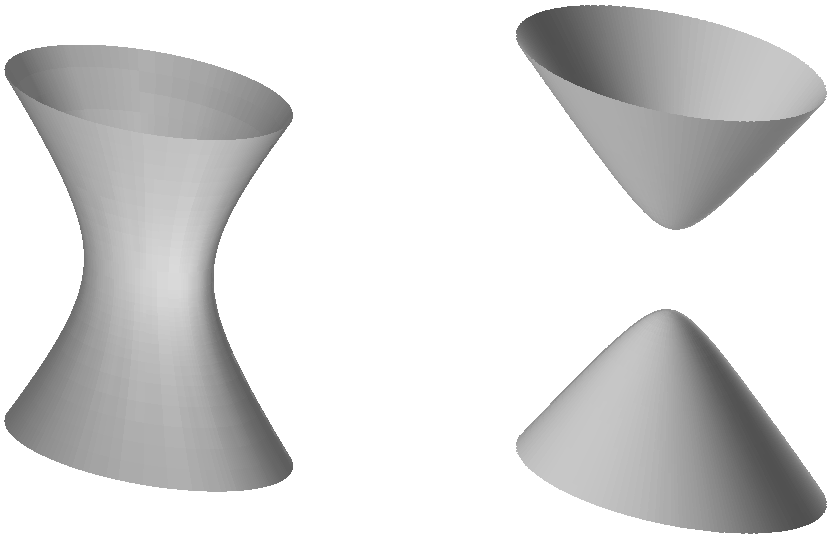
- Considérons maintenant un rayon qui quitte l'œil et qui passe à travers le solide, tel qu'illustré dans la figure de droite ci-haut. Soit (x, y, z) le point par lequel le rayon entre dans le solide et (x', y', z') le point « de sortie ».
  - Soit $\mathbf{v}$ un vecteur de même direction, c'est-à-dire un multiple positif, de $\begin{bmatrix} x-x_e \\ y-y_e \\ z-z_e \end{bmatrix}$.
  - Soit $\mathbf{n}$ un vecteur normal pointant vers l'extérieur du solide à (x, y, z). Il s'agira, par exemple, de $\boldsymbol{\nabla} G(x, y, z)$ ou de $-\boldsymbol{\nabla} G(x, y, z)$.
  - Soit $\mathbf{n}'$ un vecteur normal pointant vers l'extérieur du solide à (x', y', z'). Il s'agira de $\boldsymbol{\nabla} G(x', y', z')$ ou de $-\boldsymbol{\nabla} G(x', y', z')$.

  Alors,

  - au point (x, y, z) où le rayon entre dans le solide, qui est un point visible, le vecteur $\mathbf{v}$ pointe vers l'intérieur du solide. L'angle θ entre $\mathbf{v}$ et le normal $\mathbf{n}$ pointant vers l'extérieur est plus grand que $\pi/2$, de sorte que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{n}\| \cos\theta < 0$. Mais
  - au point (x', y', z') où le rayon quitte le solide, qui est un point caché, le vecteur $\mathbf{v}$ pointe vers l'extérieur. L'angle θ entre $\mathbf{v}$ et le normal $\mathbf{n}'$ pointant vers l'extérieur est inférieur à $\pi/2$, de sorte que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}' = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{n}'\| \cos\theta > 0$.

La conclusion est que si l'on regarde dans la direction de $\mathbf{v}$ et que le normal pointant vers l'extérieur [a] de la surface à (x, y, z) est $\boldsymbol{\nabla} G(x, y, z)$, alors le point (x, y, z) est caché si et seulement si $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} G(x, y, z) > 0$.

Cette méthode est utilisée en infographie pour créer des figures comme celles ci-après [b].



Exercices

Pour se pratiquer.

1. Trouvez la dérivée directionnelle de $f(x, y, z) = e^{xyz}$ dans la direction $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ au point $(0, 1, 1)$.

2. Trouvez $\boldsymbol{\nabla}\left(y^2 + \sin(xy)\right)$.

3. Trouvez le taux de variation de la fonction donnée au point donné dans la direction donnée.

(a) $f(x, y) = 3x - 4y$ au point $(0, 2)$ dans la direction $-2\mathbf{i}$.

(b) $f(x, y, z) = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ à $(2, -3, 4)$ dans la direction $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4. Trouvez $\boldsymbol{\nabla} f(a, b)$ étant données les dérivées directionnelles

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}} f(a, b) = 3\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{v}} f(a, b) = 5,$$

où $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ et $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j})$.

5. Supposez que la dérivée directionnelle de $w = f(x, y, z)$ au point P est maximale dans la direction du vecteur $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, et que la la valeur de la dérivéee directionnelle dans cette direction est $3\sqrt{6}$.

(a) Trouvez le vecteur gradient de $w = f(x, y, z)$ en P.

(b) Trouvez la dérivée directionnelle de $w = f(x, y, z)$ en P dans la direction du

[a] Si $\boldsymbol{\nabla} G(x, y, z)$ est le normal pointant vers l'intérieur, on remplace G par $-G$.

[b] Ces figures ne sont pas convexes, mais il est possible d'adapter la méthode décrite parce que chaque rayon qui passe par notre œil passe par le solide au plus deux fois. Il y entre au point visible et en sort par le point invisible.

vecteur $\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

6. Est-ce raisonnable de dire que les surfaces $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ et $x^2+y^2+(z+1)^2=1$ sont tangentes l'une par rapport à l'autre en $(0,0,0)$?

7. Soit $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+2y^2}$. Trouvez le plan tangent à la surface $z=f(x,y)$ au point $\left(-1\,,\,1\,,\,\frac{1}{3}\right)$.

8. Trouvez le plan tangent à $\frac{27}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+3}}=9$ au point $(2,1,1)$.

9. Trouvez les équations du plan tangent et de la droite normale aux graphes des fonctions spécifiées aux points spécifiés.

(a) $f(x,y)=x^2-y^2$ en $(-2,1)$.

(b) $f(x,y)=e^{xy}$ en $(2,0)$.

10. Considérez la surface $z=f(x,y)$ définie implicitement par l'équation $xyz^2+y^2z^3=3+x^2$. Utilisez un vecteur gradient de dimension 3 pour trouver l'équation du plan tangent à cette surface au point $(-1,1,2)$. Écrivez votre réponse sous la forme $z=ax+by+c$, où a, b et c sont constantes.

11. Une surface est donnée par $z=x^2-2xy+y^2$.

(a) Trouvez l'équation du plan tangent à la surface en $x=a$, $y=2a$.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de a est-ce que le plan tangent est parallèle au plan $x-y+z=1$?

12. Trouvez le plan tangent et la droite normale à la surface $z=f(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$ en $(x,y)=(-1,2)$.

Pour mieux comprendre.

13. Un moustique est à la position $(3,2,1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Il sait que la température T autour de ce point est donnée par $T=2x^2+y^2-z^2$.

(a) Il souhaite rester à la même température, mais il doit voler dans une direction initiale. Trouvez une direction dans laquelle le taux de variation initial de la température est 0.

(b) Si vous et un autre étudiant avez les deux la bonne réponse à la partie (a), est-ce que les directions que vous obtenez sont les mêmes ? Pourquoi oui ou pourquoi non ?

(c) Quelle direction (ou directions) initiale(s) devrait suivre le moustique s'il veut refroidir le plus vite possible.

14. Soient

$$f(x,y,z)=(2x+y)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$
$$g(x,y,z)=xz+y^2+yz+z^2$$

(a) Trouvez les gradients de f et g en $(0,1,-1)$.

(b) Un oiseau en $(0,1,-1)$ vole à une vitesse de 6 dans la direction pour laquelle $f(x,y,z)$ croît le plus rapidement. Lorsqu'il passe en $(0,1,-1)$, à quelle vitesse

est-ce que $g(x, y, z)$ semble (du point de vue de l'oiseau) changer ?

(c) Une chauve-souris en $(0, 1, -1)$ vole dans la direction pour laquelle $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ ne varient pas, mais z croît. Trouvez un vecteur dans cette direction.

15. La température au point (x, y, z) est donnée par $T(x, y, z) = 5e^{-2x^2-y^2-3z^2}$, où T est mesurée en degrées et x, y, z en mètres.

(a) Trouvez le taux de variation de la température au point $P(1, 2, -1)$ dans la direction vers le point $(1, 1, 0)$.

(b) Dans quelle direction est-ce que la température décroît le plus rapidement ?

(c) Trouvez le taux de variation maximal de décroissance en P.

16. Supposez qu'il est connu que la direction pour laquelle la fonction $f(x, y)$ croît le plus rapidement à l'origine est donnée par le vecteur $\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$. Trouvez un vecteur unitaire u qui est tangent à la courbe de niveau de $f(x, y)$ passant par l'origine.

17. Soit la température dans une région de l'espace donnée par la formule $T(x, y, z) = 3x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2$ degrées.

(a) Un moineau vole le long de la courbe $\mathbf{r}(s) = \left(\frac{1}{3}s^3, 2s, s^2\right)$ à une vitesse constante de 3ms^{-1}. Quelle est la vélocité (i.e. le vecteur vitesse) du moineau lorsque $s = 1$?

(b) À quel taux est-ce que le moineau ressend le changement de température au point $A\left(\frac{1}{3}, 2, 1\right)$ pour lequel $s = 1$.

(c) Au point $A\left(\frac{1}{3}, 2, 1\right)$ dans quelle direction est-ce que la température décroît à un taux maximal ?

(d) Un aigle croise le chemin du moineau en $A\left(\frac{1}{3}, 2, 1\right)$. L'aigle se déplace dans une direction à angle droit par rapport au moineau, et se déplace également dans une direction pour laquelle la température demeure constante. Dans quelle direction est-ce que l'aigle peut se déplacer lorsqu'il passe par le point A ?

18. Considérez la fonction $f(x, y, z) = x^2 + \cos(yz)$.

(a) Donnez la direction pour laquelle f croît le plus rapidement au point $(1, 0, \pi/2)$.

(b) Donnez l'équation du plan T tangent à la surface

$$\mathcal{S} = \left\{ \; (x, y, z) \;\middle|\; f(x, y, z) = 1 \; \right\}$$

au point $(1, 0, \pi/2)$.

(c) Trouvez la distance entre T et le point $(0, 1, 0)$.

(d) Trouvez l'angle entre le plan T et le plan

$$P = \left\{ \; (x, y, z) \;\middle|\; x + z = 0 \; \right\}..$$

19. On sait qu'une fonction $T(x, y, z)$ en $P(2, 1, 1)$ est telle que $T(P) = 5$, $T_x(P) = 1$, $T_y(P) = 2$, et $T_z(P) = 3$.

(a) Une abeille commence à voler en P et vole le long du vecteur unitaire pointant vers le point $Q(3, 2, 2)$. Quel est le taux de variation de $T(x, y, z)$ dans cette direction ?

(b) Utilisez l'approximation linéaire de T au point P pour approximer $T(1.9, 1, 1.2)$.

(c) Soit $S(x, y, z) = x + z$. Une abeille commence à voler en P ; le long de quel vecteur de direction est-ce que l'abeille devrait voler de façon à ce que les taux de variation de $T(x, y, z)$ et de $S(x, y, z)$ soient nuls tous les deux dans cette direction ?

20. Soit $f(x, y)$ une fonction différentiable avec $f(1, 2) = 7$. Soient $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} + \frac{4}{5}\,\mathbf{j}$ et $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\,\mathbf{j}$ des vecteurs unitaires. Supposons qu'il est connu que les dérivées directionnelles $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ et $D_{\mathbf{v}}f(1, 2)$ sont égales à 10 et 2 respectivement.

(a) Montrez que le vecteur gradient $\boldsymbol{\nabla} f$ en $(1, 2)$ est $10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

(b) Déterminez le taux de variation de f en $(1, 2)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

(c) En utilisant l'approximation du plan tangent, estimez la valeur de $f(1.01, 2.05)$.

21. Trouvez tous les points sur la surface $x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 17$ où le plan tangent est parallèle au plan $x - 8z = 0$.

22. Soit S la surface $z = x^2 + 2y^2 + 2y - 1$. Trouvez tous le(s) point(s) $P(x_0, y_0, z_0)$ sur S avec $x_0 \neq 0$ tel que la droite normale en P contient l'origine $(0, 0, 0)$.

23. Trouvez tous les points sur l'hyperboloïde $z^2 = 4x^2 + y^2 - 1$ où le plan tangent est parallèle au plan $2x - y + z = 0$.

24. Trouvez un vecteur de longueur $\sqrt{3}$ qui est tangent à la courbe d'intersection des surfaces $z^2 = 4x^2 + 9y^2$ et $6x + 3y + 2z = 5$ en $(2, 1, -5)$.

25. Trouvez tous les plans horizontaux qui sont tangent à la surface d'équation

$$z = xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

Quelle est la plus petite et la plus grande valeur de z sur cette surface ?

26. Soit $\mathcal{S}$ la surface $xy - 2x + yz + x^2 + y^2 + z^3 = 7$

(a) Trouvez le plan tangent et la droite normale à la surface S au point $(0, 2, 1)$.

(b) L'équation définissant S définit z implicitement comme une fonction de x et de y pour (x, y, z) près de $(0, 2, 1)$. Trouvez les expressions pour $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Évaluer $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(x, y, z) = (0, 2, 1)$.

(c) Trouvez une expression pour $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

27.

(a) Trouvez un vecteur perpendiculaire au point $(1, 1, 3)$ à la surface d'équation $x^2 + z^2 = 10$.

(b) Trouvez un vecteur tangent au même point à la courbe d'intersection de la surface de la partie (a) avec la surface $y^2 + z^2 = 10$.

(c) Trouvez des équations paramétriques de la droite tangente à cette courbe en ce point.

28. Soit P le point où la courbe $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k},\ (0 < \infty)$ intersecte la surface

$$z^3 + xyz - 2 = 0$$

Trouvez l'angle (aigu) entre la courbe et la surface en P.

29. Trouvez la distance entre le point $(1, 1, 0)$ et le paraboloïde circulaire d'équation $z = x^2 + y^2$.

Pour aller plus loin.

30. Soit $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ un point de la surface $G(x, y, z) = 0$. Supposez que $\boldsymbol{\nabla} G(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Supposez que la courbe paramétrée $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ est contenue dans la surface et que $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$. Montrez que la droite tangente à la courbe en $\mathbf{r}_0$ est contenue dans le plan tangent à $G = 0$ en $\mathbf{r}_0$.

31. Soit $F(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0) = 0$ et soient les vecteurs $\boldsymbol{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$ et $\boldsymbol{\nabla} G(x_0, y_0, z_0)$ non nuls et non parallèles l'un par rapport à l'autre. Trouvez l'équation du plan normal à la courbe d'intersection des surfaces $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0). Par définition, ce plan normal est le plan passant par (x_0, y_0, z_0) dont le vecteur normal est le vecteur tangent de la courbe d'intersection en (x_0, y_0, z_0).

32. Soit $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$ et soit $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) \neq \boldsymbol{\nabla} g(x_0, y_0)$. Trouvez une équation de la droite tangente à la courbe d'intersection des surfaces $z = f(x, y)$ et $z = g(x, y)$ en $(x_0\,,\, y_0,\, z_0 = f(x_0, y_0))$.

2.7 Polynômes de Taylor avec plusieurs variables

Quelques rappels

Pour commencer, en guise de rappel et aussi de motivation, plaçons-nous dans le contexte des fonctions d'une variable réelle. Nous utiliserons ces idées et ces résultats pour obtenir ce que nous cherchons, à savoir :

- une formule pour avoir les polynômes de Taylor des fonctions de plusieurs variables ;
- une idée de l'erreur commise lorsque nous utilisons une approximation de Taylor plutôt que la fonction elle-même.

Une des conséquences de ceci sera le résultat analogue au critère de la dérivée seconde permettant de classifier les points critiques. Ceci viendra dans la section suivante.

Soit donc g une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et t_0 un point à l'intérieur de I.

La formule de Taylor du premier ordre (autour de t_0) dit que, pour $t \in I$, il existe c_t dans I tel que

$$g(t) = \underbrace{g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0)}_{\text{Approx. linéaire}} + \underbrace{\frac{1}{2} g''(c_t)(t - t_0)^2}_{\text{Reste}}.$$

Si g est trois fois dérivable, on aura à nouveau un (autre) c_t entre x_0 et t tel que

$$g(t) = \underbrace{g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} g''(t_0)(t - t_0)^2}_{\text{Approx. quadratique}} + \underbrace{\frac{1}{3!} g'''(c_t)(t - t_0)^3}_{\text{Reste}}.$$

La partie $Q(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} g''(t_0)(t - t_0)^2$ est **l'approximation quadratique**, ou encore **l'approximation de Taylor d'ordre** 2, de g autour de t_0. Le reste correspondant, à savoir $R_2(t) = \frac{1}{3!} g'''(c_t)(t - t_0)^3$, vérifie

$$\lim_{t \to t_0} \frac{R_2(t)}{(t - t_0)^2} = 0.$$

Avec plusieurs variables

Voyons maintenant comment obtenir les formules analogues pour les fonctions à plusieurs variables. L'idée centrale sera de considérer une telle fonction f et de la composer avec un chemin $\boldsymbol{\gamma}$, de sorte à obtenir une fonction $g = f \circ \boldsymbol{\gamma}$ d'une variable à laquelle appliquer les résultats mentionnés auparavant.

Soit donc $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{r}_0$ un point intérieur à $\mathcal{D}$ proche de $\mathbf{r}_0$. Soit par ailleurs $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 3. Écrivons aussi $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ puis $\mathbf{h} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$.

Nous voulons une approximation de $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{h})$. Pour cela, considérons le chemin $\boldsymbol{\gamma} : t \mapsto \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = r_0 + t\mathbf{h}$. Il s'agit de la droite qui relie $\mathbf{r}_0$ (à $t = 0$) à $\mathbf{r}_0$ (à $t = 1$). Remarquons qu'il s'agit d'un chemin de vitesse constante, à savoir $\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{h}$.

Posons finalement $g = f \circ \boldsymbol{\gamma} : t \mapsto f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h})$. Alors, l'approximation de Taylor de g autour de $t_0 = 0$ permet d'obtenir, pour $t = 1$,

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(c)$$

pour un c entre 0 et 1.

Or, $g(0) = f(\boldsymbol{\gamma}(0)) = f(\mathbf{r}_0)$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} g'(t) = \mathbf{D}(f \circ \boldsymbol{\gamma})(t) = \mathbf{D}f(\boldsymbol{\gamma}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{\gamma}(t))\mathbf{h} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h})h_j. \end{aligned}$$

En particulier,

$$g'(0) = \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\mathbf{h} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{r}_0)h_j.$$

Pour calculer le terme d'ordre 2, nous devons dériver encore une fois $g'(t)$ puis évaluer en 0.

Afin d'alléger les notations, utilisons les indices pour indiquer les dérivées partielles. Ainsi, on écrit f_{x_j} au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, de sorte que

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h})h_j = \sum_{j=1}^{n} (f_{x_j} \circ \boldsymbol{\gamma})(t)h_j.$$

Nous calculons alors, pour un j fixé,

$$\frac{d}{dt}\left(f_{x_j} \circ \boldsymbol{\gamma}\right)(t) = \mathbf{D}f_{x_j}(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{D}f_{x_j}(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h}.$$

Or, $\mathbf{D}f_{x_j}(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h})$ est la matrice à une rangée formée par les dérivées partielles de f_{x_j}, qu'on note $f_{x_j\,x_i}$, évaluées en $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h}$, de sorte que

$$\frac{d}{dt}\left(f_{x_j} \circ \boldsymbol{\gamma}\right)(t) = \begin{bmatrix} f_{x_j\,x_1} & f_{x_j\,x_2} & \cdots & f_{x_j\,x_n} \end{bmatrix}\Big|_{\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h}} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_{x_j\, x_i}(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h}) h_i.$$

Il vient donc que

$$\begin{aligned} g''(t) =& \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} (f_{x_j} \circ \boldsymbol{\gamma})(t)\ h_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}(f_{x_j} \circ \boldsymbol{\gamma})(t) \right) h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{x_j\, x_i}(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{h}) h_i\, h_j, \end{aligned}$$

et donc le terme qui nous intéresse est

$$g''(0) = \sum_{i,\, j=1}^{n} f_{x_j\, x_i}(\mathbf{r}_0) h_i\, h_j.$$

Remarquons que l'hypothèse de continuité des dérivées partielles d'ordre 2 donne l'égalité des dérivées partielles croisées. Par ailleurs, nous pouvons écrire la double somme apparaissant dans $g''(t)$ de façon plus succincte à l'aide du produit matriciel. En effet, on vérifie que

$$\begin{aligned} \sum_{i,\, j=1}^{n} f_{x_j\, x_i}(\mathbf{r}_0) h_i\, h_j &= \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \left[\begin{matrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_nx_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1x_n} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{matrix} \right]\Bigg|_{\mathbf{r}_0} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{h}^T \left[\begin{matrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_nx_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1x_n} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{matrix} \right]\Bigg|_{\mathbf{r}_0} \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Remarquons que la matrice apparaissant dans la formule ci-haut est exactement la matrice des dérivées partielles des composantes de $\boldsymbol{\nabla} f$, vue comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Avec les notations des sections précédentes, on noterait cette matrice $\mathbf{D}\boldsymbol{\nabla} f$, mais il est naturel de la noter $\mathbf{D}^2 f$.

Définition 2.7.1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 et $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{D}$ un point intérieur. Alors,

(a) la *matrice hessienne de f en $\mathbf{r}_0$* est la matrice

$$\mathbf{D}^2 f(\mathbf{r}_0) = \left[\begin{matrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_nx_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1x_n} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{matrix} \right]\Bigg|_{\mathbf{r}_0};$$

(b) la forme quadratique $Hf(\mathbf{r}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$Hf(\mathbf{r}_0)(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \mathbf{D}^2 f(\mathbf{r}_0)\mathbf{h}$$

est *la forme quadratique hessienne de f en $\mathbf{r}_0$*.

Rappelons que $\mathbf{h} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

Définition 2.7.2

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 et $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{D}$ un point intérieur. Le *polynôme de Taylor* d'ordre 2 de f autour de $\mathbf{r}_0$ est

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + Hf(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\ &= f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^T\mathbf{D}^2 f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

Voyons quelques exemples. Dans la pratique, on traitera surtout les cas où $n = 2$ ou 3. Si $n = 2$, on écrit $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{r} = (x, y)$ et $\mathbf{h} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0) = (h_x, h_y)$. Le polynôme de Taylor s'écrit alors

$$\begin{aligned} Q(x,y) =& f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right. \\ &\left.+ f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Il est commun d'utiliser les polynômes de Taylor pour faire des approximations. On veut approcher la valeur de $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, avec l'information de f (et de ses dérivées) en (x_0, y_0). On aura alors

$$\begin{aligned} Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =& f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y\right. \\ &\left.+ f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right]. \end{aligned} \tag{$**$}$$

La formule explicite pour les fonctions de trois variables est plus longue : on a les trois termes du premier ordre faisant intervenir les trois dérivées partielles, puis les six termes d'ordre 2 faisant intervenir les dérivées croisées d'ordre 3.

Exemple 2.7.3

Calculer l'approximation de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f : (x, y) \mapsto \cos(2x - y)$ autour de l'origine.

On calcule

$$\mathbf{D}f(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin(2x-y) & \sin(2x-y) \end{bmatrix},$$

donc $\mathbf{D}f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Par ailleurs,

$$\mathbf{D}^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\cos(2x-y) & 2\cos(2x-y) \\ 2\cos(2x-y) & -\cos(2x-y) \end{bmatrix},$$

et donc

$$\mathbf{D}^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme de Taylor cherché est alors

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= 1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-4x^2 + 4y - y^2) = 1 - 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

Exemple 2.7.4

Dans cet exemple, on trouve l'approximation quadratique de $f(x,y)=\sqrt{1+4x^2+y^2}$ autour de $(x_0,y_0)=(1,2)$ et l'on s'en sert pour donner une valeur approchée de $f(1.1,\,2.05)$. Nous savons que nous avons besoin de toutes les dérivées jusqu'au deuxième ordre. Calculons-les, évaluons-les au point $(x_0,y_0)=(1,2)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=\sqrt{1+4x^2+y^2}, & f(x_0,y_0)&=3,\\
f_x(x,y)&=\frac{4x}{\sqrt{1+4x^2+y^2}}, & f_x(x_0,y_0)&=\frac{4}{3},\\
f_y(x,y)&=\frac{y}{\sqrt{1+4x^2+y^2}}, & f_y(x_0,y_0)&=\frac{2}{3},\\
f_{xx}(x,y)&=\frac{4}{\sqrt{1+4x^2+y^2}}-\frac{16x^2}{(1+4x^2+y^2)^{3/2}}, & f_{xx}(x_0,y_0)&=\frac{4}{3}-\frac{16}{27}\\
&&&=\frac{20}{27},\\
f_{xy}(x,y)&=-\frac{4xy}{(1+4x^2+y^2)^{3/2}}, & f_{xy}(x_0,y_0)&=-\frac{8}{27},\\
f_{yy}(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+y^2}}-\frac{y^2}{(1+4x^2+y^2)^{3/2}}, & f_{yy}(x_0,y_0)&=\frac{1}{3}-\frac{4}{27}\\
&&&=\frac{5}{27}.
\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant dans (**) afin d'obtenir l'approximation quadratique de f autour de (x_0,y_0) :

$$\begin{aligned}
&f\left(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y\right)\\
&\quad\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\\
&\qquad\quad+\frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\Big]\\
&\quad=3+\frac{4}{3}\Delta x+\frac{2}{3}\Delta y+\frac{10}{27}\Delta x^2-\frac{8}{27}\Delta x\Delta y+\frac{5}{54}\Delta y^2.
\end{aligned}$$

En particulier, si l'on pose $\Delta x=0.1$ et $\Delta y=0.05$,

$$\begin{aligned}
f(1.1,\,2.05)&\approx 3+\frac{4}{3}(0.1)+\frac{2}{3}(0.05)+\frac{10}{27}(0.01)-\frac{8}{27}(0.005)+\frac{5}{54}(0.0025)\\
&=3.1691.
\end{aligned}$$

La valeur exacte, à 10^{-4} près, est 3.1690. Le taux d'erreur est d'autour de 0.004 %.



À vous de jouer 2.7.5

Trouver l'approximation quadratique (polynôme de Taylor d'ordre 2), $T_2(x,y)$, de $\sqrt{9+7x-2y}$ pour (x,y) près de $(0,0)$,

$Q(x,y)=$ _____

Exemple 2.7.6

Dans cet exemple, nous calculons l'approximation quadratique de $f(x,y) = e^{2x}\sin(3y)$ autour de $(x_0,y_0) = (0,0)$ de deux façons différentes.

La première utilise la formule (∗). Calculons toutes les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre au point (x_0,y_0) :

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{2x}\sin(3y), & f(x_0,y_0) &= 0,\\
f_x(x,y) &= 2e^{2x}\sin(3y), & f_x(x_0,y_0) &= 0,\\
f_y(x,y) &= 3e^{2x}\cos(3y), & f_y(x_0,y_0) &= 3,\\
f_{xx}(x,y) &= 4e^{2x}\sin(3y), & f_{xx}(x_0,y_0) &= 0,\\
f_{xy}(x,y) &= 6e^{2x}\cos(3y), & f_{xy}(x_0,y_0) &= 6,\\
f_{yy}(x,y) &= -9e^{2x}\sin(3y), & f_{yy}(x_0,y_0) &= 0,
\end{aligned}$$

de sorte que l'approximation quadratique de f autour de $(0,0)$ est

$$\begin{aligned}
f\,(x\,,\,y) &\approx f(x,y) + f_x(x,y)x + f_y(0,0)y \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\Big] \\
&= 3y + 6xy.
\end{aligned}$$

C'est plutôt simple : il suffit de calculer un certain nombre de dérivées, de les évaluer et d'appliquer la formule (∗).

Mais il existe une autre façon, souvent plus efficace du point de vue des calculs. Elle utilise les résultats connus pour le calcul à une variable :

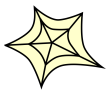
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \qquad \text{et} \quad \sin y = y - \frac{1}{3!}y^3 + \cdots.$$

Remplaçons x par $2x$ dans la première égalité et y par $3y$ dans la seconde. Après multiplication, et en ne gardant que les termes de degré au plus 2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{2x}\sin(3y) \\
&= \Big[1 + (2x) + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \cdots\Big]\Big[(3y) - \frac{1}{3!}(3y)^3 + \cdots\Big] \\
&= \Big[1 + 2x + 2x^2 + \cdots\Big]\Big[3y - \frac{9}{2}y^3 + \cdots\Big] \\
&= 3y + 6xy + 6x^2y + \cdots - \frac{9}{2}y^3 - 9xy^3 - 9x^2y^3 + \cdots \\
&= 3y + 6xy + \cdots
\end{aligned}$$

exactement comme dans le premier calcul.

À vous de jouer 2.7.7



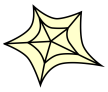
0.1/0.2

Trouvez les polynômes de Taylor linéaire, $L(x,y)$, et quadratique, $Q(x,y)$, valides au voisinage de $(0,5)$ pour

$$f(x,y) = \cos(x)\sin(y-5)\,.$$

$L(x,y) =$ _____

$Q(x,y) =$ _____



Trouvez les approximations de $f(0.1, 5.2)$ données par ces polynômes, et comparez avec la valeur exacte de la fonction :
En $(0.1, 5.2)$,
$L(0.1, 5.2) =$ _____,
$Q(0.1, 5.2) =$ _____,
$f(0.1, 5.2) =$ _____.

Une borne pour l'erreur dans l'approximation linéaire

Lorsque nous avons étudié la différentiabilité et comment utiliser l'approximation linéaire d'une fonction, nous avons vu comment calculer une valeur approchée de $f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r})$, à savoir

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)\Delta\mathbf{r}. \qquad (*)$$

Dans la pratique, il importe d'avoir une idée de la grandeur de l'erreur commise.

La formule de Taylor nous donne la réponse. On sait que, pour les fonctions à une variable, l'erreur est donnée par

$$\frac{1}{2}g''(c_t)(t - t_0)^2$$

pour un c_t entre t_0 et t.

Ceci s'adapte aux fonctions de plusieurs variables en suivant la même logique que précédemment. Cette fois, l'erreur sera donnée par

$$Hf(\mathbf{r}_0 + c\mathbf{h})(\mathbf{h})$$

pour une valeur de c entre 0 et 1. Cette expression équivaut à

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\,j\,=\,1}^{n} f_{x_i\,x_j}(\mathbf{r}_0 + c\mathbf{h})\,h_i\,h_j.$$

Ainsi, si l'on peut borner les dérivées du second ordre de f au voisinage de $\mathbf{r}_0$, on pourra borner l'erreur commise en utilisant l'approximation linéaire plutôt que la fonction elle-même.

Proposition 2.7.8

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 et $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{D}$ un point intérieur. Soit

$$L(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

l'approximation linéaire de f autour de $\mathbf{R}_0$.

Si $M \in \mathbb{R}$ est tel que $\left|f_{x_i\,x_j}(\mathbf{r}^*)\right| \leqslant M$ pour tout $\mathbf{r}^*$ sur le segment joignant $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}$, alors

$$|f(\mathbf{r}) - L(\mathbf{r})| \leqslant \frac{1}{2}M\left(\sum_{i=1}^{n}|h_i|\right)^2.$$

Démonstration. En effet, il existe un réel c entre 0 et 1 tel que l'erreur est

$$|f(\mathbf{r}) - L(\mathbf{r})| = |f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{h}) - L(\mathbf{r}_0 + \mathbf{h})| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i,\,j\,=\,1}^{n} f_{x_i\,x_j}(\mathbf{r}_0 + c\mathbf{h})h_i\,h_j\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|f_{x_i\,x_j}(\mathbf{r}_0+c\mathbf{h})h_i\,h_j\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}M|h_i|\,|h_j| = \frac{1}{2}M\left(\sum_{i=1}^{n}|h_i|\right)^2.$$

Voyons un exemple avec deux variables, c'est-à-dire $\mathbf{r}=(x,y)$. Posons $\mathbf{h}=\Delta\mathbf{r}=(\Delta x,\Delta y)=(h_x,h_y)$.

Exemple 2.7.9 exemple 2.4.24, revu.

Supposons que l'on veut approcher $\frac{(0.998)^3}{1.003}$ comme à l'exemple 2.4.24 et que l'on veut une borne pour l'erreur d'approximation. C'est ce qu'on peut obtenir en appliquant ce qui précède. Soit

$$f(x,y)=\frac{x^3}{y}$$

et

$$x_0=1,\qquad \Delta x=-0.002,\qquad y_0=1,\qquad \Delta y=0.003.$$

La valeur exacte est $f\,(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)$ et la valeur approchée est $f\,(x_0,\,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0,\,y_0)\,\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0,\,y_0)\,\Delta y$, de sorte que l'erreur d'approximation est

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(\boldsymbol{\gamma}(c))\,\Delta x^2+2\frac{\partial^2\,f}{\partial x\partial y}\,(\boldsymbol{\gamma}(c))\,\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(\boldsymbol{\gamma}(c))\,\Delta y^2\right|,$$

où $\boldsymbol{\gamma}(c)=(x_0,y_0)+c(\Delta x,\Delta y)=(1-0.002c\,,\,1+0.0003c)$ pour un certain $0\leqslant c\leqslant 1$. Pour notre fonction f,

$$f(x,y)=\frac{x^3}{y},\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3x^2}{y},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{x^3}{y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{6x}{y},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\frac{3x^2}{y^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2x^3}{y^3}.$$

Nous ne savons pas ce que $\boldsymbol{\gamma}(c)=(1-0.002c\,,\,1+0.0003c)$ vaut, mais nous savons que $0\leqslant c\leqslant 1$, de sorte que la composante x de $\boldsymbol{\gamma}(c)$ est inférieure à 1 et que la composante y de $\boldsymbol{\gamma}(c)$ est plus grande que 1. Ainsi,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(\boldsymbol{\gamma}(c))\right|\leqslant 6,\qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,(\boldsymbol{\gamma}(c))\right|\leqslant 3,\qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(\boldsymbol{\gamma}(c))\right|\leqslant 2.$$

Nous pouvons donc choisir $M=6$. On a alors, en vertu de la proposition 2.7.8, que l'erreur vérifie

$$\begin{aligned}\text{erreur} &\leqslant \frac{1}{2}6\,(|\Delta x|+|\Delta y|)^2\\ &= 3\,(0.002+0.003)^2\\ &= 0.000075.\end{aligned}$$

Remarquons que cette borne est large, dans le sens que nous pouvons utiliser les valeurs maximales pour chacune des dérivées secondes, à savoir $6,3$ et 2, plutôt que la même valeur 6. En effet, cette approche donnerait plutôt

$$\text{erreur}\leqslant\frac{1}{2}\left[6\Delta x^2+2\times 3|\Delta x\,\Delta y|+2\Delta y^2\right]$$

$$\leqslant 3(0.002)^2 + 3(0.002)(0.003) + (0.003)^2$$
$$= 0.000039.$$

Pour des fins de comparaison, l'erreur est 0.0000389, à 10^{-7} près.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. On considère la fonction $P : (x, y) \mapsto x^3 + xy + y^3$

(a) Donnez le développement de Taylor de P d'ordre 2 autour du point $(-1, 1)$

(b) Même question, au voisinage du point $(1, 2)$.

(c) Utilisez le résultat de la partie précédente pour calculer une approximation de $(1.01)^3 + (1.01)(1.99) + (1.99)^3$

2. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$. Montrer que le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage du point $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy$.

3. Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto xe^y$

(a) Trouvez le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour du point $(1, 0)$, par la définition.

(b) Même question, en utilisant le polynôme de Taylor de la fonction exponentielle, tel que fait dans la deuxième solution de l'exemple 2.7.6

4. Pour chacune des fonctions suivantes, calculez son polynôme de Taylor d'ordre deux au voisinage du point (x_0, y_0) spécifié.

(a) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ autour de $(0, 0)$,

(b) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ autour de $(0, 0)$,

(c) $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$ autour de $(0, 0)$,

(d) $f(x, y) = e^{(y-1)^2} \sin x$ autour de $(0, 1)$,

(e) $f(x, y) = \sin xy - 3x^2 \ln y + 1$ autour de $(\pi/2, 1)$

2.8 Valeurs maximales et minimales

Une des principales applications du calcul différentiel des fonctions à une variable est l'optimisation, c'est-à-dire trouver des valeurs maximales ou minimales d'une fonction (d'une variable). Nous reprenons ce sujet dans le contexte des fonctions à 2 variables ou plus, en mettant l'accent sur les fonctions de deux variables. Avant de commencer, il convient de donner certaines définitions qui seront cruciales par la suite.

Définition 2.8.1

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{D}$.

- $\mathbf{r}_0$ est un *point de maximum local de* f si $f(\mathbf{r}) \leqslant f(\mathbf{r}_0)$ pour tout $\mathbf{r}$ près de $\mathbf{r}_0$. Plus

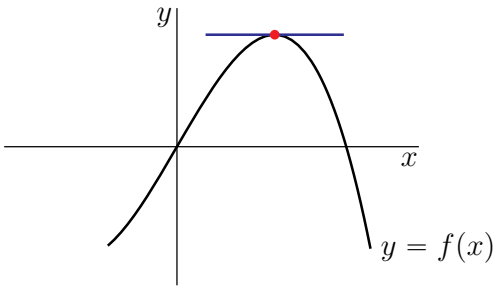
précisément, $\mathbf{r}_0$ est un maximum local de f s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(\mathbf{r}) \leqslant f(\mathbf{r}_0)$ lorsque $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \epsilon$.

- $\mathbf{r}_0$ est un *point de minimum local de* f si $f(\mathbf{r}) \geqslant f(\mathbf{r}_0)$ pour tout $\mathbf{r}$ près de $\mathbf{r}_0$.
- Les valeurs prises par f aux points de minimum ou de maximum locaux sont appelées les *valeurs extrémales* de f.
- $\mathbf{r}_0$ est un *point de maximum global*, ou un *point de maximum absolu*, de f si $f(\mathbf{r}) \leqslant f(\mathbf{r}_0)$ pour tout $\mathbf{r}$ dans $\mathcal{D}$.
- $\mathbf{r}_0$ est un *point de minimum global*, ou un *point de minimum absolu*, de f si $f(\mathbf{r}) \geqslant f(\mathbf{r}_0)$ pour tout $\mathbf{r}$ dans $\mathcal{D}$.

Maximums et minimums locaux

Une des premières choses qu'on fait lorsqu'on étudie les techniques d'optimisation des fonctions d'une variable est de se demander :

- Si l'on suppose que la valeur maximale de $f(x)$ est $f(a)$, que peut-on déduire de a ?



Peu de temps après, on a la réponse :

- Si f admet un maximum local en $x = a$, c'est-à-dire que $f(x) \leqslant f(a)$ lorsque x est près de a, et que f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Voyons pourquoi ceci est vrai. Supposons donc que f admet un maximum en a, donc pour h petit tel que $h > 0$,

$$f(a+h) \leqslant f(a) \implies f(a+h) - f(a) \leqslant 0 \implies \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant 0 \quad \text{si } h > 0.$$

On prend la limite lorsque $h \to 0$ et l'on conclut que $f'(a) \leqslant 0$. De la même façon[1], pour tout h petit tel que $h < 0$,

$$f(a+h) \leqslant f(a) \implies f(a+h) - f(a) \leqslant 0 \implies \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0 \quad \text{si } h < 0.$$

À nouveau, on prend la limite lorsque $h \to 0$ pour conclure que $f'(a) \geqslant 0$. Ainsi, on a les deux inégalités $f'(a) \geqslant 0$ et $f'(a) \leqslant 0$, ce qui donne $f'(a) = 0$.

On aura sans doute remarqué que, pour que cet argument tienne, on a besoin seulement d'avoir $f(x) \leqslant f(a)$ pour x près de a, pas nécessairement pour tout x. En effet, dans les inégalités ci-haut, on a utilisé seulement $f(a+h)$ avec h petit. Nous pouvons donc raffiner notre résultat :

- Si $f(a)$ est un maximum local pour $f(x)$ et que f est différentiable en a, alors $f'(a) = 0$.

Le même argument s'applique pour les points de minimum :

- Si $f(a)$ est un minimum local $f(x)$ et que f est différentiable en a, alors $f'(a) = 0$.

[1] Rappelons que si $h < 0$ et que $A \leqslant B$, alors $hA \geqslant hB$ puisque le produit de deux nombres négatifs est positif, donc $h < 0,\ A \leqslant B \implies A - B \leqslant 0 \implies h(A - B) \geqslant 0 \implies hA \geqslant hB$.

Voyons maintenant comment utiliser ces idées dans le contexte des fonctions à plusieurs variables. Supposons donc que f admet un maximum local en un point $\mathbf{r}_0$, autour duquel f est définie (c'est-à-dire que $\mathbf{r}_0$ est un point intérieur du domaine de f). La figure ci-contre illustre le cas des fonctions à deux variables.

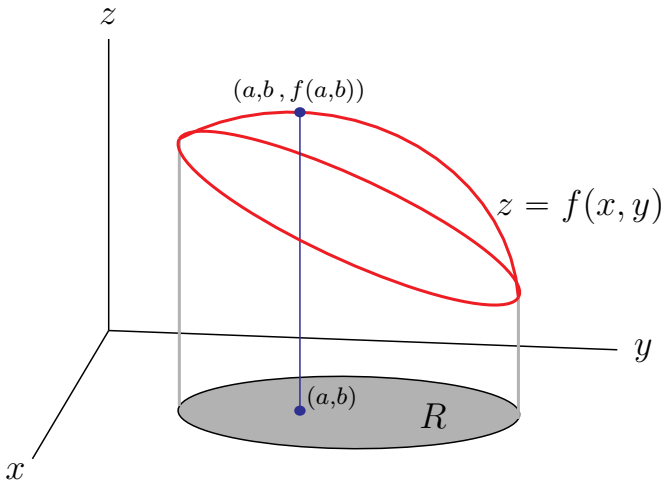


Figure 2.8.2 La fonction f est définie dans la région R qui contient $\mathbf{r}_0 = (a, b)$ comme point intérieur

La valeur de $f(\mathbf{r})$ doit donc décroître lorsque $\mathbf{r}$ se déplace en partant de $\mathbf{r}_0$ dans *n'importe quelle* direction. Peu importe quel vecteur de direction (que l'on peut supposer unitaire) $\mathbf{d}$ qu'on choisit, la dérivée directionnelle de f en $\mathbf{r}_0$ dans la direction de $\mathbf{d}$ doit donc être inférieure ou égale à zéro. Plus formellement,

$$D_{\mathbf{d}} f(\mathbf{r}_0) = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \leqslant 0.$$

Pour la même raison, la dérivée directionnelle de f en $\mathbf{r}_0$ dans la direction de $-\mathbf{d}$ doit aussi être négative ou nulle :

$$D_{-\mathbf{d}} f(\mathbf{r}_0) = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \cdot (-\mathbf{d}) \leqslant 0, \quad \text{ce qui donne} \quad \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \geqslant 0.$$

Puisque $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}$ doit être positif ou nul, et négatif ou nul, ce produit scalaire doit être nul. Ceci est vrai pour n'importe quel vecteur de direction $\mathbf{d}$. En particulier, si l'on choisit $\mathbf{d} = \mathbf{i}$, ceci force la première composante de $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ à être nulle. Le même argument avec $\mathbf{d} = \mathbf{j}$ (ou avec les vecteurs de base requis en dimensions supérieures) donne que toutes les composantes de $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ doivent être nulles. Nous avons établi que $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$. Le même argument fonctionne lorsqu'on a un point de minimum local en $\mathbf{r}_0$.

Théorème 2.8.3

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ différentiable en $\mathbf{r}_0$, un point de $\mathcal{D}$. Si

- *$\mathbf{r}_0$ est un point intérieur de $\mathcal{D}$, et que*
- *$\mathbf{r}_0$ est un point de maximum ou de minimum local pour f, et que*
- *f est différentiable en $\mathbf{r}_0$,*

alors

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}.$$

Définition 2.8.4

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{D}$. Alors,

- si $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ existe et est nul, on dit que $\mathbf{r}_0$ est un point critique (ou point stationnaire) de f et,

- si $\nabla f(\mathbf{r}_0)$ n'existe pas, on dit que $\mathbf{r}_0$ est un point singulier de f.

Mise en garde 2.8.5

Il faut noter que plusieurs auteur(e)s combinent les deux notions et disent que $\mathbf{r}_0$ est un point critique si $\nabla f(\mathbf{r}_0)$ est nul ou n'existe pas.

Mise en garde 2.8.6

Le théorème 2.8.3 nous dit que tout maximum ou minimum local à l'intérieur du domaine d'une fonction différentiable doit être un point critique. Ce résultat *ne nous dit pas* que tout point critique est soit un maximum soit un minimum local. Déjà pour les fonctions à une variable, on peut avoir des points d'inflexion, par exemple.

Nous verrons dans l'exemple 2.8.16 et dans l'exemple 2.8.20 qu'il y a des points critiques qui ne sont ni des points de maximum local ni de minimum local. Cependant, le théorème 2.8.3 est très utile puisque, souvent, une fonction ne possède qu'un nombre relativement restreint de points critiques. Pour trouver les points de maximum ou de minimum local, on doit donc considérer ces points critiques. Nous reviendrons plus tard sur la question de déterminer si un point critique est un point de maximum ou de minimum local (ou aucun des deux). Commençons par trouver quelques points critiques.

Exemple 2.8.7 $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 6y + 12$**.**

Trouver les points critiques de $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 6y + 12$.

Solution. Pour trouver les points critiques, nous trouvons le gradient, en calculant les dérivées partielles de $f(x,y)$:

$$f_x(x,y) = 2x - 2y + 2 \qquad \text{et} \qquad f_y(x,y) = -2x + 4y - 6.$$

Les points critiques sont les solutions du système d'équations

$$2x - 2y + 2 = 0, \qquad -2x + 4y - 6 = 0,$$

ou, de façon équivalente,

$$\begin{aligned} x - y &= -1, \\ -x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations avec deux inconnues (x et y). Un calcul immédiat donne l'unique solution : $x = 1$, $y = 2$.

L'exemple précédent était très simple, car les équations étaient linéaires, ce qui est une conséquence du fait que $f(x,y)$ était un polynôme de degré 2. Voyons un autre exemple.

Exemple 2.8.8 $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y$**.**

Trouver tous les points critiques de $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y$.

Solution. Comme dans l'exemple précédent, nous commençons par calculer le gradient, donc les dérivées partielles :

$$f_x = 6x^2 - 6y, \qquad f_y = -6x + 2y + 4.$$

Ainsi, les points critiques sont les solutions de

$$6x^2 - 6y = 0, \qquad -6x + 2y + 4 = 0.$$

La première équation équivaut à $y = x^2$, qui exprime y comme fonction de x. On remplace $y = x^2$ dans la seconde équation, ce qui donne

$$\begin{aligned} -6x + 2y + 4 = 0 &\iff -6x + 2x^2 + 4 = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x-2) = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } 2. \end{aligned}$$

Lorsque $x = 1$, $y = 1^2 = 1$, et lorsque $x = 2$, $y = 2^2 = 4$. Il y a donc deux points critiques : $(1, 1),\ (2, 4)$.



À vous de jouer 2.8.9

Soit la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$.
Trouvez les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ et calculez la valeur de f en chacun.
(a) Combien de points critiques f admet-elle sur $\mathbb{R}^2$?

_____

(b) Coordonnées du point critique : $(x_0,\, y_0) = \Big($_____, _____$\Big)$

(c) Valeur de f en ce point critique :
$f(x_0, y_0) =$ _____

Voyons un exemple un peu plus complexe.

Exemple 2.8.10 $f(x, y) = xy(5x + y - 15)$**.**

Trouver les points critiques de $f(x, y) = xy(5x + y - 15)$.

Solution. Les dérivées partielles de $f(x, y) = xy(5x + y - 15)$ sont

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y(5x + y - 15) + xy(5) &&= y(5x + y - 15) + y(5x) \\ &= y(10x + y - 15), \\ f_y(x, y) &= x(5x + y - 15) + xy(1) &&= x(5x + y - 15) + x(y) \\ &= x(5x + 2y - 15). \end{aligned}$$

Les points critiques sont les solutions de $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Nous devons donc trouver tous les x, y qui vérifient les équations

$$y(10x + y - 15) = 0, \tag{E1}$$
$$x(5x + 2y - 15) = 0. \tag{E2}$$

La première équation, $y(10x + y - 15) = 0$, est vérifiée si au moins un des deux facteurs, y ou $(10x + y - 15)$, est nul. Ainsi, la première équation est satisfaite si l'une des équations suivantes l'est :

$$y = 0, \tag{E1a}$$
$$10x + y = 15. \tag{E1b}$$

La seconde équation, $x(5x + 2y - 15) = 0$, est satisfaite si au moins un des deux facteurs, x ou $(5x + 2y - 15)$, est nul. Ainsi, la seconde équation est satisfaite si l'une des deux équations

suivantes l'est :

$$x = 0, \tag{E2a}$$
$$5x + 2y = 15. \tag{E2b}$$

Ainsi, les deux équations vérifiées par les points critiques, (E1) et (E2), sont satisfaites si et seulement si l'une parmi (E1a), (E1b) est satisfaite, et l'une parmi (E2a), (E2b) l'est aussi. Ainsi, les deux équations (E1) et (E2) sont satisfaites si et seulement si au moins une des quatre possibilités suivantes a lieu.

- (E1a) et (E2a) sont satisfaites si et seulement si $x = y = 0$.
- (E1a) et (E2b) sont satisfaites si et seulement si $y = 0,\ 5x + 2y = 15 \iff y = 0,\ 5x = 15$.
- (E1b) et (E2a) sont satisfaites si et seulement si $10x + y = 15,\ x = 0 \iff y = 15,\ x = 0$.
- (E1b) et (E2b) sont satisfaites si et seulement si $10x + y = 15,\ 5x + 2y = 15$. Nous pouvons utiliser, par exemple, la deuxième de ces équations pour isoler x en termes de y : $x = \frac{1}{5}(15 - 2y)$. Lorsqu'on remplace ceci dans la première équation, on obtient $2(15 - 2y) + y = 15$, qu'on résout pour y. Ceci donne $-3y = 15 - 30$, et donc $y = 5$, et alors $x = \frac{1}{5}(15 - 2 \times 5) = 1$.

En conclusion, les points critiques sont $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 15)$ et $(1, 5)$.

Une façon plus compacte d'écrire ce qui a été fait est :

$$\begin{aligned}
& f_x(x,y) = 0 && \text{et} \quad f_y(x,y) = 0 \\
\iff \quad & y(10x + y - 15) = 0 && \text{et} \quad x(5x + 2y - 15) = 0 \\
\iff \quad & \{y = 0 \text{ ou } 10x + y = 15\} && \text{et} \quad \{x = 0 \text{ ou } 5x + 2y = 15\} \\
\iff \quad & \{y = 0,\ x = 0\} \text{ ou } \{y = 0,\ 5x + 2y = 15\} \\
& \text{ou } \{10x + y = 15,\ x = 0\} \text{ ou } \{10x + y = 15,\ 5x + 2y = 15\} \\
\iff \quad & \{x = y = 0\} \text{ ou } \{y = 0,\ x = 3\} \\
& \text{ou } \{x = 0,\ y = 15\} \text{ ou } \{x = 1,\ y = 5\}.
\end{aligned}$$

Essayons maintenant un exemple pratique — quelque chose de la vie réelle... en fait la « vie réelle » d'un(e) mathématicien(e).

Exemple 2.8.11

Dans une certaine communauté, deux brasseries sont en concurrence, de sorte que les ventes de l'une influencent négativement les profits de l'autre. Si la brasserie A produit x litres de bière par mois et que la brasserie B en produit y, alors les profits des brasseries sont donnés par

$$P = 2x - \frac{2x^2 + y^2}{10^6} \qquad \text{et} \qquad Q = 2y - \frac{4y^2 + x^2}{2 \times 10^6}$$

respectivement. Trouver la somme des deux profits si chaque brasserie fixe sa production de façon indépendante pour maximiser son revenu et prend pour acquis que la concurrence en fait autant. Par la suite, on suppose que les brasseries se comportent comme un cartel. Trouver la somme des profits si les brasseries collaborent pour maximiser cette somme[a].

Solution. Si A ajuste x pour maximiser P (pour y fixe) et que B ajuste y pour maximiser

Q (pour x fixe), alors x et y sont déterminés par les équations

$$P_x = 2 - \tfrac{4x}{10^6} = 0, \tag{E1}$$
$$Q_y = 2 - \tfrac{8y}{2\times 10^6} = 0. \tag{E2}$$

L'équation (E1) donne $x = \frac{1}{2}10^6$, et l'équation (E2) donne $y = \frac{1}{2}10^6$. Connaissant x et y, on peut déterminer P, Q et le profit total :

$$\begin{aligned} P+Q &= 2(x+y) - \tfrac{1}{10^6}\left(\tfrac{5}{2}x^2 + 3y^2\right) \\ &= 10^6\left(1+1-\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{5}{8}10^6. \end{aligned}$$

Ensuite, si le tandem (A, B) ajuste (x, y) afin de maximiser $P+Q = 2(x+y) - \frac{1}{10^6}\left(\frac{5}{2}x^2 + 3y^2\right)$, alors x et y sont déterminés par

$$(P+Q)_x = 2 - \tfrac{5x}{10^6} = 0, \tag{E1}$$
$$(P+Q)_y = 2 - \tfrac{6y}{10^6} = 0. \tag{E2}$$

L'équation (E1) donne $x = \frac{2}{5}10^6$, et l'équation (E2) donne $y = \frac{1}{3}10^6$. De nouveau, connaissant x et y, on peut déterminer le profit total :

$$\begin{aligned} P+Q &= 2(x+y) - \tfrac{1}{10^6}\left(\tfrac{5}{2}x^2 + 3y^2\right) \\ &= 10^6\left(\tfrac{4}{5}+\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{11}{15}10^6. \end{aligned}$$

Ainsi, la coopération bénéficie aux deux brasseries.

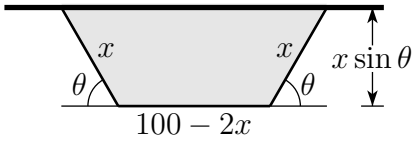
Voyons un exemple un peu plus géométrique.

Exemple 2.8.12

Des plis à angle égal sont réalisés à distance égale des deux extrémités d'une clôture de 100 mètres de long afin que la clôture à trois segments qui en résulte puisse être placée le long d'un mur existant pour former une enceinte de forme trapézoïdale. Quelle est la plus grande surface possible pour une telle enceinte ?



Solution. Ce problème est de nature très géométrique. Commençons par faire une esquisse détaillée et par donner des noms aux variables qui nous occupent.





L'aire de la région renfermée par la clôture est l'aire à l'intérieur du rectangle bleu (figure de droite ci-haut) plus l'aire des deux triangles bleus :

$$A(x,\theta) = (100-2x)x\sin\theta + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\sin\theta\cdot x\cos\theta$$

[a] Ce genre de chose est illégal.

$$= (100x - 2x^2)\sin\theta + x^2 \sin\theta \ \cos\theta.$$

Pour maximiser l'aire, nous devons résoudre

$$0 = \frac{\partial A}{\partial x} = (100 - 4x)\sin\theta + 2x\sin\theta\cos\theta,$$
$$0 = \frac{\partial A}{\partial \theta} = (100x - 2x^2)\cos\theta + x^2\big\{\cos^2\theta - \sin^2\theta\big\}.$$

Remarquons que les deux termes dans la première équation contiennent le facteur $\sin\theta$ et que tous les termes dans la seconde équation contiennent le facteur x. Si l'un de $\sin\theta$ ou x est nul, alors l'aire $A(x,\theta)$ le sera aussi, de sorte que nous n'aurons certainement pas un maximum. Ainsi, divisons la première équation par $\sin\theta$, et la seconde par x, ce qui donne

$$(100 - 4x) + 2x\cos\theta = 0, \tag{E1}$$
$$(100 - 2x)\cos\theta + x\big\{\cos^2\theta - \sin^2\theta\big\} = 0. \tag{E2}$$

Ces équations peuvent paraître un peu effrayantes, mais il n'y a aucune raison de paniquer. Elles ne sont pas si méchantes qu'elles en ont l'air, puisque θ intervient seulement à travers $\cos\theta$ et $\sin^2\theta$, qui peut être exprimé en termes de $\cos\theta$. Qui plus est, on peut éliminer $\cos\theta$ si l'on remarque que la première équation force $\cos\theta = -\frac{100-4x}{2x}$, et donc $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{(100-4x)^2}{4x^2}$. En remplaçant dans la seconde équation, on obtient

$$\begin{aligned}
& -(100-2x)\frac{100-4x}{2x} + x\left[\frac{(100-4x)^2}{2x^2} - 1\right] = 0 \\
\Longrightarrow \quad & -(100-2x)(100-4x) + (100-4x)^2 - 2x^2 = 0 \\
\Longrightarrow \quad & 6x^2 - 200x = 0 \\
\Longrightarrow \quad & x = \frac{100}{3} \quad \cos\theta = -\frac{-100/3}{200/3} = \frac{1}{2} \quad \theta = 60^\circ,
\end{aligned}$$

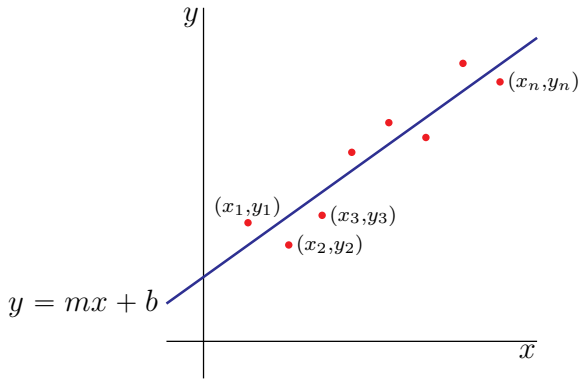
de sorte que l'aire maximale est

$$A = \left(100\frac{100}{3} - 2\frac{100^2}{3^2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \ + \ \frac{1}{2}\frac{100^2}{3^2}\frac{\sqrt{3}}{2} \ = \ \frac{2500}{\sqrt{3}}.$$

Voyons maintenant un exemple très pratique en statistiques : trouver la droite qui s'ajuste le mieux à un ensemble de points donnés.

Exemple 2.8.13 Régression linéaire.

Une expérience donne lieu à n observations (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. Nous voulons trouver la droite $y = mx + b$ qui s'ajuste le « mieux » à ces points.



La définition de « s'ajuste le mieux » est que la droite « minimise l'erreur quadratique moyenne », c'est-à-dire qu'elle minimise la quantité

$$E(m,b) = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2.$$

Remarquons que

- le $i^{\text{ième}}$ terme dans $E(m,b)$ est le carré de la différence entre y_i, qui est la $i^{\text{ième}}$ valeur observée de y, et $\Big[mx+b\Big]_{x=x_i}$, qui est l'approximation de y_i donnée par la droite $y = mx + b$;
- tous les termes de la somme sont positifs, indépendamment de si les points (x_i, y_i) se trouvent au-dessus ou au-dessous de la droite.

Notre problème maintenant est de trouver les valeurs de m et b qui minimisent $E(m,b)$. Cette technique pour trouver la droite est appelée « régression linéaire » et elle est utilisée *abondamment*[a], même dans le monde réel — pas seulement dans le monde réel des mathématicien(e)s— le vrai monde réel dans lequel on trouve du travail.

Solution. Nous devons choisir m et b de sorte à minimiser $E(m,b)$. Déterminons donc quand les dérivées partielles de E s'annulent :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial E}{\partial m} &= \sum_{i=1}^{n} 2(mx_i + b - y_i)x_i = m\Big[\sum_{i=1}^{n} 2x_i^2\Big] + b\Big[\sum_{i=1}^{n} 2x_i\Big] - \Big[\sum_{i=1}^{n} 2x_i y_i\Big], \\ 0 = \frac{\partial E}{\partial b} &= \sum_{i=1}^{n} 2(mx_i + b - y_i) \quad = m\Big[\sum_{i=1}^{n} 2x_i\Big] + b\Big[\sum_{i=1}^{n} 2\Big] - \Big[\sum_{i=1}^{n} 2y_i\Big]. \end{aligned}$$

Il y a beaucoup de symboles ici, mais il faut rappeler que les x_i et les y_i sont des constantes. Les seules inconnues sont m et b. Afin de mettre l'accent sur ce fait, et pour alléger l'écriture, posons

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad S_{x^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Les équations qui définissent les points critiques pour la fonction E sont, après simplification d'un facteur 2 :

$$S_{x^2}\, m + S_x\, b = S_{xy}, \tag{E1}$$
$$S_x\, m + n\, b = S_y. \tag{E2}$$

Il s'agit d'équations linéaires en m et b. Elles peuvent être résolues de plusieurs façons. L'une d'elles est d'utiliser (E2) pour isoler b en termes de m,

$$b = \frac{1}{n}\left(S_y - S_x m\right), \tag{E3}$$

puis de remplacer dans (E1) pour obtenir

$$S_{x^2}\, m + \frac{1}{n} S_x\, (S_y - S_x m) = S_{xy} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(nS_{x^2} - S_x^2\right) m = nS_{xy} - S_x S_y$$

pour m. On peut résoudre cette équation pour m et remplacer à nouveau dans (E3) pour obtenir b. Ceci donne

$$m = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{x^2} - S_x^2},$$

$$b = \frac{S_y}{n}\,\frac{nS_{x^2} - S_x^2}{nS_{x^2} - S_x^2} - \frac{S_x}{n}\,\frac{nS_{xy} - S_xS_y}{nS_{x^2} - S_x^2} = \frac{nS_yS_{x^2} - nS_xS_{xy}}{n(nS_{x^2} - S_x^2)}$$
$$= -\frac{S_xS_{xy} - S_yS_{x^2}}{nS_{x^2} - S_x^2}.$$

Ainsi, étant donné un ensemble de points, on a besoin d'un peu d'arithmétique — pas de calcul différentiel — pour appliquer les formules ci-haut afin d'obtenir la droite de meilleur ajustement. Bien entendu, on n'a pas besoin de calcul différentiel pour appliquer les formules, on en a besoin pour comprendre d'où elles viennent. La même technique peut être étendue à d'autres types de problèmes d'ajustement : des points comportant un nombre arbitraire de coordonnées, ou encore l'ajustement par une courbe d'un type donné, par exemple une régression polynomiale, exponentielle...

Le test de la dérivée seconde : la matrice hessienne

Considérons maintenant le problème de déterminer si un point critique est un point de maximum ou de minimum local. À nouveau, regardons ce qui est connu pour les fonctions d'une seule variable. Supposons donc que $x = a$ est un point critique d'une fonction $g(x)$. Toute fonction suffisamment lisse peut être bien approchée, dans un voisinage de a, par les quelques premiers termes de son expansion de Taylor :

$$g(x) = g(a) + g'(a)\,(x-a) + \tfrac{1}{2}g''(a)\,(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}g^{(3)}(a)\,(x-a)^3 + \cdots.$$

Si a est un point critique, nous avons $g'(a) = 0$ et

$$g(x) = g(a) + \tfrac{1}{2}g''(a)\,(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}g^{(3)}(a)\,(x-a)^3 + \cdots.$$

Si $g''(a) \neq 0$, $g(x)$ aura l'allure de $g(a) + \frac{1}{2}g''(a)\,(x-a)^2$ lorsque x est près de a. En particulier,

- si $g''(a) > 0$, alors $g(x) > g(a)$ lorsque x est près de (mais sans être égal à) a, de sorte que a sera un minimum local, et
- si $g''(a) < 0$, alors $g(x) < g(a)$ lorsque x est près de (mais sans être égal à) a, de sorte que a sera un point de maximum local, mais
- si $g''(a) = 0$, aucune conclusion ne peut être tirée sans un peu de travail supplémentaire.

Une analyse semblable, mais passablement plus complexe, peut être faite pour les fonctions de plus de deux variables. Voyons quelques exemples qui peuvent servir comme échauffement.

Exemple 2.8.14 $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x - 3y - 6$**.**

Soit $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x - 3y - 6$. Le gradient de f est

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (2x + 3y - 6)\,\mathbf{i} + (3x + 6y - 3)\,\mathbf{j},$$

de sorte que (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$2x + 3y = 6, \qquad \text{(E1)}$$
$$3x + 6y = 3. \qquad \text{(E2)}$$

On multiplie la première équation par 2 et l'on soustrait la seconde pour obtenir

$$x = 9. \qquad \text{(2(E1) - (E2))}$$

[a] Elle est été utilisée depuis longtemps. Elle a été introduite par le mathématicien français Adrien-Marie Legendre (1752-1833) en 1805 et par le mathématicien et physicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en 1809.

Puis, on remplace $x = 9$ dans la première équation :

$$2 \times 9 + 3y = 6 \implies y = -4,$$

de sorte que $f(x, y)$ admet exactement un point critique à $(9\,,\,-4)$.

Voyons le diagramme des courbes de niveau de f autour du point critique. Nous avons que $f(9, -4) = -27$, et le diagramme des courbes de niveau nous montre que, autour de $(9, -4)$, les valeurs de f sont supérieures à -27. Il s'agirait donc d'un minimum local.

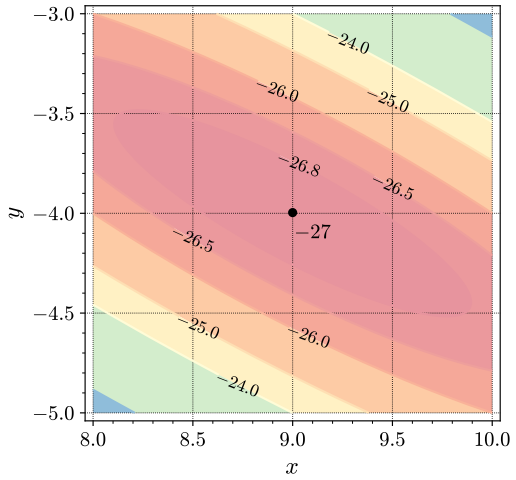


Figure 2.8.15 Les courbes de niveau de f autour de $(9, -4)$.

Voyons ceci de façon un peu plus formelle. Une bonne façon de le faire consiste à faire le changement de variables[a],

$$x = 9 + \Delta x, \qquad y = -4 + \Delta y,$$

et d'étudier le comportement de f pour Δx et Δy près de zéro.

$$\begin{aligned} f\,(9 + \Delta x,\, -4 + \Delta y) &= (9 + \Delta x)^2 + 3(9 + \Delta x)(-4 + \Delta y) + 3(-4 + \Delta y)^2 \\ &\qquad - 6(9 + \Delta x) - 3(-4 + \Delta y) - 6 \\ &= (\Delta x)^2 + 3\Delta x\,\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 27 \end{aligned}$$

Et une bonne façon d'étudier le signe d'expressions quadratiques comme $(\Delta x)^2 + 3\Delta x\,\Delta y + 3(\Delta y)^2$ est de compléter les carrés[b]. Lorsque plus d'une variable est présente, comme Δx et Δy, on peut simplement prétendre que l'une d'elles est une constante et compléter le carré comme dans le cas d'une seule variable. Par exemple, si l'on considère que Δy est constante,

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 + 3\Delta x\,\Delta y + 3(\Delta y)^2 &= \left(\Delta x + \frac{3}{2}\Delta y\right)^2 + \left(3 - \frac{9}{4}\right)(\Delta y)^2 \\ &= \left(\Delta x + \frac{3}{2}\Delta y\right)^2 + \frac{3}{4}(\Delta y)^2. \end{aligned}$$

À présent, nous avons exprimé

$$f\,(9 + \Delta x,\, -4 + \Delta y) = \left(\Delta x + \frac{3}{2}\Delta y\right)^2 + \frac{3}{4}(\Delta y)^2 - 27.$$

Comme les plus petites valeurs de $\left(\Delta x + \frac{3}{2}\Delta y\right)^2$ et $\frac{3}{4}(\Delta y)^2$ sont toutes les deux nulles, nous avons

$$f(x, y) = f\,(9 + \Delta x,\, -4 + \Delta y) \geqslant -27 = f(9, -4)$$

pour tout (x, y), de sorte que $(9, -4)$ est un minimum local, et global, de f.

On a déjà rencontré des exemples de fonctions à une variable où un point critique n'est pas un point de minimum ni de maximum local. Voyons quelques exemples montrant que ceci peut aussi arriver pour les fonctions à plusieurs variables. Nous commençons avec l'exemple le plus simple qui soit.

Exemple 2.8.16 $f(x,y) = x^2 - y^2$**.**

Les dérivées partielles de $f(x,y) = x^2 - y^2$ sont $f_x(x,y) = 2x$ et $f_y(x,y) = -2y$. Ainsi, le seul point critique est $(0,0)$. Voyons maintenant s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'aucun des deux. Commençons avec (x,y) à $(0,0)$ et déplaçons (x,y) en nous éloignant de $(0,0)$, puis voyons ce qui arrive avec $f(x,y)$. À l'origine, $f(0,0) = 0$. Les figures ci-dessous montrent le graphe de f ainsi que ses courbes de niveau autour de $(0,0)$: si l'on se déplace le long de l'axe des x, la valeur de f augmente, tandis que la situation est différente le long de l'axe des y.

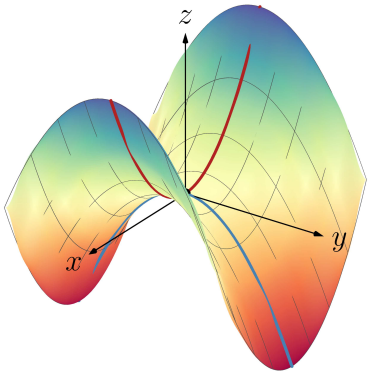


Figure 2.8.17 Le graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$, avec ses traces en $x = 0$ (bleu) et $y = 0$ (rouge).

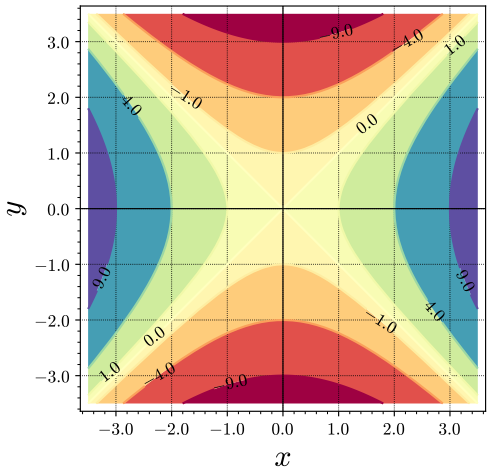


Figure 2.8.18 Les courbes de niveau de f autour de $(0,0)$.

- Commençons par déplacer (x,y) le long de l'axe des x. Alors, $(x,y) = (x,0)$ et $f(x,y) = f(x,0) = x^2$, de sorte que la valeur de f grandit, ce qui signifie que $(0,0)$ ne peut pas être un maximum local pour f.
- À présent, déplaçons (x,y) en nous éloignant de $(0,0)$ le long de l'axe des y. Alors, $(x,y) = (0,y)$ et $f(x,y) = f(0,y) = -y^2$. Ainsi, quand on commence avec $y = 0$ et qu'on fait grandir $|y|$, la valeur de f décroît, ce qui veut dire que $(0,0)$ ne peut pas être un minimum local pour f.

Ainsi, se déplacer à partir de $(0,0)$ dans une direction entraîne une augmentation de la valeur de f, tandis que se déplacer à partir de $(0,0)$ dans une autre direction entraîne une diminution de la valeur de f. En conséquence, $(0,0)$ n'est pas un point de minimum local ni un point de maximum local pour f. On appelle ces points des *points de selle* puisque le graphe de f ressemble à une selle pour cheval (la définition précise suit).

Si un point critique (a,b) n'est ni un point de minimum local ni un point de maximum local, alors il s'agit d'un point de selle. Pour que (a,b) ne soit pas un point de maximum local, f doit prendre des valeurs plus grandes que $f(a,b)$ en certains points près de (a,b). Pour que (a,b) ne soit pas un point de minimum local, f doit prendre des valeurs plus petites que $f(a,b)$ en

[a] Ceci équivaut à translater le graphe de sorte à avoir le point critique à $(0,0)$.

[b] À présent, vous avez certainement rencontré une complétion de carrés pour une seule variable, comme $x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3$.

certains points près de (a, b).

Définition 2.8.19

Soit $\mathbf{r}_0$ un point critique d'une fonction f. Alors, $\mathbf{r}_0$ est appelé un *point de selle* pour f si, pour tout $\epsilon > 0$,

- il existe au moins un point $\mathbf{r}$ tel que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \epsilon$ et $f(\mathbf{r}) > f(\mathbf{r}_0)$, et
- il existe au moins un point $\mathbf{r}$ tel que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \epsilon$ et $f(\mathbf{r}) < f(\mathbf{r}_0)$.

Voyons un autre exemple de point de selle. On a besoin de travailler un peu plus pour le voir.

Exemple 2.8.20 $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4y - 2$**.**

Considérer $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4y - 2$. Le gradient de f est

$$\boldsymbol{\nabla} f(x, y) = (2x - 2y)\,\mathbf{i} + (-2x - 2y + 4)\,\mathbf{j}.$$

Ainsi, (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0, \\ -2x - 2y &= -4. \end{aligned}$$

La première équation donne $x = y$. Remplacer dans la seconde équation donne

$$-2y - 2y = -4 \implies x = y = 1.$$

Ainsi, $f(x, y)$ admet précisément un point critique à $(1, 1)$.

Pour déterminer si f admet un point de minimum local, de maximum local ou un point de selle en $(1, 1)$, procédons comme dans l'exemple 2.8.14. On fait le changement de variables,

$$x = 1 + \Delta x, \qquad y = 1 + \Delta y,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} &f(1 + \Delta x,\, 1 + \Delta y) \\ &\qquad = (1 + \Delta x)^2 - 2(1 + \Delta x)(1 + \Delta y) - (1 + \Delta y)^2 + 4(1 + \Delta y) - 2 \\ &\qquad = (\Delta x)^2 - 2\Delta x\, \Delta y - (\Delta y)^2. \end{aligned}$$

Après complétion des carrés,

$$f(1 + \Delta x,\, 1 + \Delta y) = (\Delta x)^2 - 2\Delta x\, \Delta y - (\Delta y)^2 = (\Delta x - \Delta y)^2 - 2(\Delta y)^2.$$

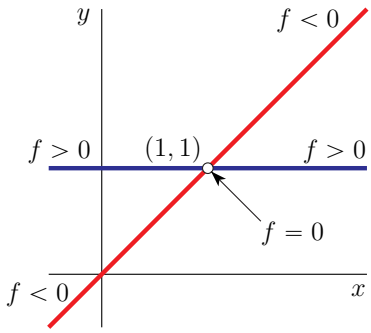
Notons que f a été écrite comme la différence de deux carrés, comme la fonction f de l'exemple 2.8.16.

- Si Δx et Δy sont tels que le premier carré $(\Delta x - \Delta y)^2$ est non nul, mais que le second carré $(\Delta y)^2$ est nul, alors $f(1 + \Delta x,\, 1 + \Delta y) = (\Delta x - \Delta y)^2 > 0 = f(1, 1)$. En somme, lorsque $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq \Delta y$, alors $f(1 + \Delta x,\, 1 + \Delta y) = (\Delta x - \Delta y)^2 > 0 = f(1, 1)$.
- Aussi, si Δx et Δy sont tels que le premier carré $(\Delta x - \Delta y)^2$ est nul, mais que le second carré $(\Delta y)^2$ ne l'est pas, alors $f(1 + \Delta x,\, 1 + \Delta y) = -2(\Delta y)^2 < 0 = f(1, 1)$. En somme, lorsque $\Delta x = \Delta y \neq 0$, alors $f(1 + \Delta x,\, 1 + \Delta y) = -2(\Delta y)^2 < 0 = f(1, 1)$.

Ainsi,

- $f(x,y) > f(1,1)$ pour tous les points sur la ligne bleue, et
- $f(x,y) < f(1,1)$ pour tous les points sur la ligne rouge.

On conclut que $(1,1)$ est le seul point critique pour f et qu'il s'agit d'un point de selle.



Les trois exemples qui précèdent montrent comment procéder pour classifier les points critiques des fonctions quadratiques (de deux variables, mais la même gymnastique de complétion de carrés fonctionne avec un nombre arbitraire de variables).

Bien entendu, il existe des fonctions qui ne sont pas des fonctions quadratiques. Cependant, avec l'approximation quadratique, on peut utiliser les mêmes idées de façon plus générale.

Supposons que (a,b) est un point critique pour une fonction $f(x,y)$. Pour Δx et Δy petits, l'approximation quadratique de la définition 2.7.2 donne

$$\begin{aligned} & f\,(a+\Delta x,\, b+\Delta y) \\ & \quad \approx f\,(a\,,\,b) + f_x\,(a,\,b)\;\Delta x + f_y\,(a,\,b)\;\Delta y \\ & \qquad\qquad + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}\,(a,b)\;\Delta x^2 + 2f_{xy}\,(a,b)\;\Delta x\Delta y + f_{yy}\,(a,b)\;\Delta y^2\right\} \qquad (*) \\ & \quad = f\,(a\,,\,b) + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}\,(a,b)\;\Delta x^2 + 2f_{xy}\,(a,b)\;\Delta x\Delta y + f_{yy}\,(a,b)\;\Delta y^2\right\}. \end{aligned}$$

Puisque (a,b) est un point critique, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Alors, avec la technique de l'exemple 2.8.14 et de l'exemple 2.8.20, on obtient[2] : voir les détails plus bas.

Théorème 2.8.21 Test de la dérivée seconde.

Soit $\mathbf{r} = (x,y)$ *et* $\mathbf{r}_0 = (x_0,y_0)$ *un point critique de* f *tel qu'il existe* $\epsilon > 0$ *de sorte que toutes les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre de* f *sont continues en tout point vérifiant* $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \epsilon$. *Soit* $Hf(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\mathbf{r}) & f_{xy}(\mathbf{r}) \\ f_{yx}(\mathbf{r}) & f_{yy}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$ *la matrice hessienne de* f, *et définissons*

$$D(\mathbf{r}) = \det Hf(\mathbf{r}) = f_{xx}(\mathbf{r})\,f_{yy}(\mathbf{r}) - f_{xy}(\mathbf{r})^2,$$

que nous appelons hessien de f en $\mathbf{r}$ *(ou* discriminant de f en $\mathbf{r}$*). Alors :*

- *si* $D(\mathbf{r}_0) > 0$, *on a un point d'extremum local en* $\mathbf{r}_0$, *et*
  - *si* $f_{xx}(\mathbf{r}_0) > 0$, *alors* f *admet un minimum local en* $\mathbf{r}_0$,
  - *si* $f_{xx}(\mathbf{r}_0) < 0$, *alors* f *admet un maximum local en* $\mathbf{r}_0$;
- *si* $D(\mathbf{r}_0) < 0$, *alors* f *admet un point de selle en* $\mathbf{r}_0$;
- *si* $D(\mathbf{r}_0) = 0$, *on ne peut rien conclure.*

« Démonstration ». Nous mettons des guillemets autour du mot « Démonstration », car nous ne justifierons pas le fait qu'il suffit d'analyser l'approximation quadratique dans l'équation $(*)$. Pour alléger l'écriture, omettons l'argument $\mathbf{r}_0 = (x_0,y_0)$. Si $f_{xx}(\mathbf{r}_0) \neq 0$, alors,

[2] Il y a des résultats analogues pour plus de variables. Cependant, il vaut mieux les formuler en utilisant le langage de l'algèbre linéaire.

après complétion des carrés, on peut écrire

$$\begin{aligned} f_{xx}\,\Delta x^2 + 2f_{xy}\,\Delta x\Delta y + f_{yy}\,\Delta y^2 \\ &= f_{xx}\left(\Delta x + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}\Delta y\right)^2 + \left(f_{yy} - \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}}\right)\Delta y^2 \\ &= \frac{1}{f_{xx}}\left\{\left(f_{xx}\,\Delta x + f_{xy}\,\Delta y\right)^2 + \left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)\,\Delta y^2\right\}. \end{aligned}$$

De la même façon, si $f_{yy}(\mathbf{r}_0) \neq 0$,

$$\begin{aligned} f_{xx}\,\Delta x^2 + 2f_{xy}\,\Delta x\Delta y + f_{yy}\,\Delta y^2 \\ &= \frac{1}{f_{yy}}\left\{\left(f_{xy}\,\Delta x + f_{yy}\,\Delta y\right)^2 + \left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)\,\Delta x^2\right\}. \end{aligned}$$

Il faut remarquer que ceci ne tient plus si $f_{xx}(\mathbf{r}_0) = f_{yy}(\mathbf{r}_0) = 0$. Nous allons traiter ce cas plus loin. Qui plus est, remarquons que

- si $\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right) > 0$, alors f_{xx} et f_{yy} doivent être non nulles et du même signe. De plus, si Δx ou Δy sont non nuls,

  $$\begin{aligned} \left\{\left(f_{xx}\,\Delta x + f_{xy}\,\Delta y\right)^2 + \left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)\,\Delta y^2\right\} > 0 \quad \text{et} \\ \left\{\left(f_{xy}\,\Delta x + f_{yy}\,\Delta y\right)^2 + \left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)\,\Delta x^2\right\} > 0, \end{aligned}$$

  de sorte que, en vertu de $(*)$,

  - si $f_{xx}(\mathbf{r}_0) > 0$, alors $\mathbf{r}_0$ est un point de minimum local, et
  - si $f_{xx}(\mathbf{r}_0) < 0$, alors $\mathbf{r}_0$ est un point de maximum local ;

- si $\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right) < 0$ et f_{xx} est non nulle, alors

  $$\left\{\left(f_{xx}\,\Delta x + f_{xy}\,\Delta y\right)^2 + \left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)\,\Delta y^2\right\}$$

  est strictement positive lorsque $\Delta x \neq 0$ et $\Delta y = 0$, et est strictement négative lorsque $f_{xx}\,\Delta x + f_{xy}\,\Delta y = 0$ et $\Delta y \neq 0$, de sorte que $\mathbf{r}_0$ est un point de selle. De la même façon, $\mathbf{r}_0$ est un point de selle si $\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right) < 0$ et que f_{yy} est non nulle ;

- finalement, si $f_{xy} \neq 0$ et $f_{xx} = f_{yy} = 0$, alors

  $$f_{xx}\,\Delta x^2 + 2f_{xy}\,\Delta x\,\Delta y + f_{yy}\,\Delta y^2 = 2f_{xy}\,\Delta x\,\Delta y$$

  est strictement positive pour un signe de $\Delta x\,\Delta y$ et strictement négative pour l'autre signe de $\Delta x\,\Delta y$. Ainsi, $\mathbf{r}_0$ est un point de selle à nouveau.

■

On peut se demander pourquoi, dans la classification des points de maximum/minimum local du théorème 2.8.21, $f_{xx}(\mathbf{r}_0)$ apparaît, mais pas $f_{yy}(\mathbf{r}_0)$. La réponse est simplement que x vient avant y dans l'ordre alphabétique. On peut aussi bien utiliser $f_{yy}(\mathbf{r}_0)$. La raison pour ceci est que si $D(\mathbf{r}_0) > 0$ (comme dans le premier point du théorème), alors, puisque $D(\mathbf{r}_0) = f_{xx}(\mathbf{r}_0)\,f_{yy}(\mathbf{r}_0) - f_{xy}(\mathbf{r}_0)^2 > 0$, on doit nécessairement avoir $f_{xx}(\mathbf{r}_0)\,f_{yy}(\mathbf{r}_0) > 0$, de sorte que $f_{xx}(\mathbf{r}_0)$ et $f_{yy}(\mathbf{r}_0)$ doivent être toutes les deux du même signe.

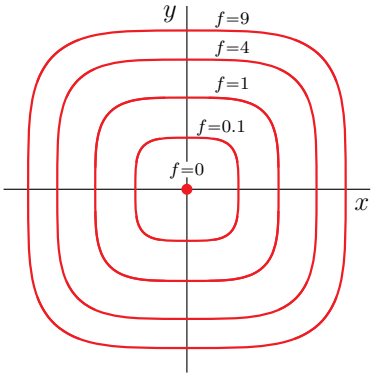
On peut aussi se demander pourquoi on ne peut rien conclure lorsque $D(\mathbf{r}_0) = 0$ et ce qui arrive dans ce cas. Le test de la dérivée seconde pour les fonctions d'une variable a été établi exactement de la même façon : on fait l'approximation par le polynôme de Taylor de degré 2 en $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$, puis on analyse le comportement du polynôme quadratique près de

$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$. Pour que ceci fonctionne, les apports à $f(\mathbf{r}) = f(x, y)$ des termes de degré 2 en $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$ doivent être plus importants que les contributions à $f(x, y)$ des termes de degré trois ou plus en $(x - 0)$ et $(y - y_0)$ lorsque $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$ sont petits. Si ce n'est pas le cas, par exemple lorsque les termes de la fonction $f(x, y)$ qui sont de degré 2 en $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$ ont des coefficients nuls, alors notre argument ne tiendra plus la route. C'est exactement ce qui arrive lorsque $D(\mathbf{r}_0) = 0$. Voici quelques exemples. Les fonctions

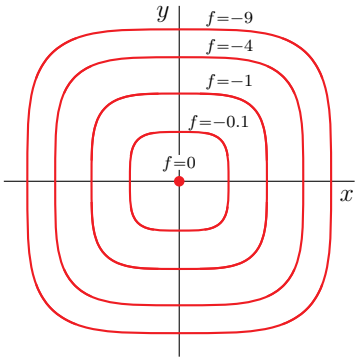
$$f_1(x, y) = x^4 + y^4, \qquad f_2(x, y) = -x^4 - y^4,$$
$$f_3(x, y) = x^3 + y^3, \qquad f_4(x, y) = x^4 - y^4$$

admettent toutes $(0, 0)$ comme seul point critique et, dans tous les cas, on a $D(0, 0) = 0$. La première fonction, f_1, admet un minimum, la deuxième, f_2, admet un maximum, tandis que la troisième et la quatrième admettent un point de selle.

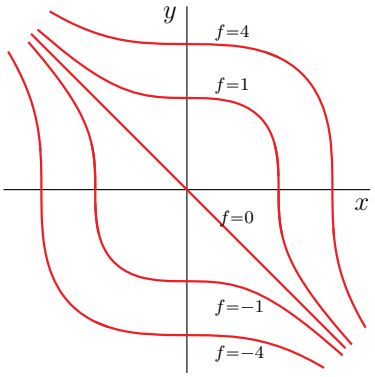
Voici des esquisses des diagrammes de courbes de niveau de ces 4 fonctions (pour les figures, elles ont toutes été nommées f).



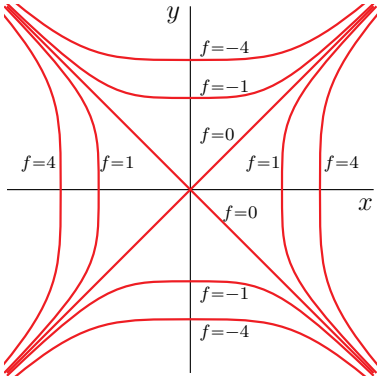
courbes de niveau de $f(x, y) = x^4 + y^4$



courbes de niveau de $f(x, y) = -x^4 - y^4$



courbes de niveau de $f(x, y) = x^3 + y^3$



courbes de niveau de $f(x, y) = x^4 - y^4$

Exemple 2.8.22 $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y$**.**

Trouver et classifier les points critiques de $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y$.

Solution. Prenons de l'avance — puisque nous devons calculer le gradient pour trouver les points critiques, et la matrice hessienne pour calculer le hessien et appliquer le test des dérivées secondes du théorème 2.8.21 — et calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 :

$$f = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y,$$
$$f_x = 6x^2 - 6y, \qquad f_{xx} = 12x, \qquad f_{xy} = -6,$$
$$f_y = -6x + 2y + 4, \qquad f_{yy} = 2, \qquad f_{yx} = -6.$$

Bien entendu, f_{xy} et f_{yx} coïncident. C'est néanmoins utile de calculer les deux, en guise de vérification.

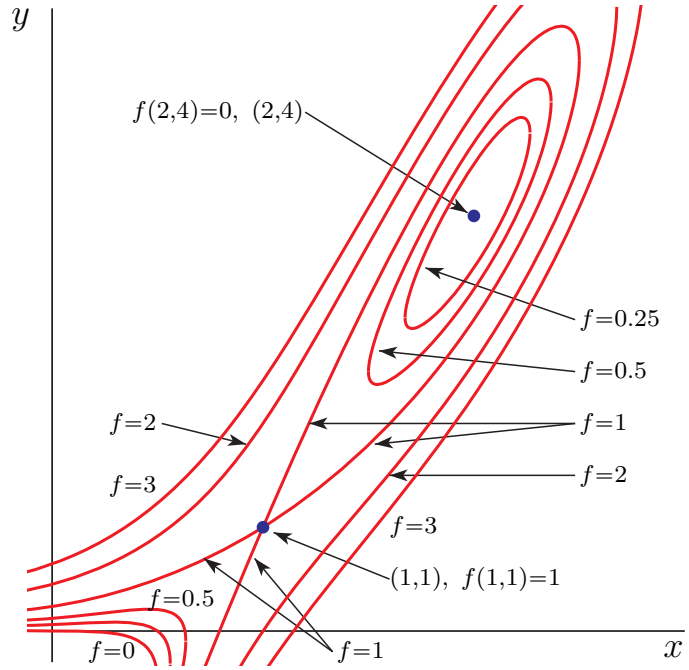
Nous avons déjà trouvé, dans l'exemple 2.8.8, que les points critiques sont $(1,1),\ (2,4)$. Leur classification est :

point critique	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f_{xx}	type
$(1,1)$	$12 \times 2 - (-6)^2 < 0$		point de selle
$(2,4)$	$24 \times 2 - (-6)^2 > 0$	24	min. local

Nous pouvons laisser l'entrée f_{xx} de la première rangée vide puisque

- nous savions déjà que $f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - f_{xy}^2(1,1) < 0$, et
- nous savions, du théorème 2.8.21, que $f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - f_{xy}^2(1,1) < 0$, ce qui est suffisant pour garantir que $(1,1)$ est un point de selle.

Voici les courbes de niveau $f(x,y)$.



Ces courbes ne sont pas nécessaires pour répondre à la question, mais elles peuvent donner une idée de l'aspect du graphe de f.

Exemple 2.8.23 $f(x,y) = xy(5x + y - 15)$.

Trouver et classifier les points critiques de $f(x,y) = xy(5x + y - 15)$.

Solution. Nous avons déjà trouvé les dérivées partielles

$$f_x(x,y) = y(10x + y - 15), \qquad f_y(x,y) = x(5x + 2y - 15)$$

de $f(x,y)$ dans l'exemple 2.8.10. De nouveau, pour classifier les points critiques, il nous faut les dérivées secondes. Elles sont :

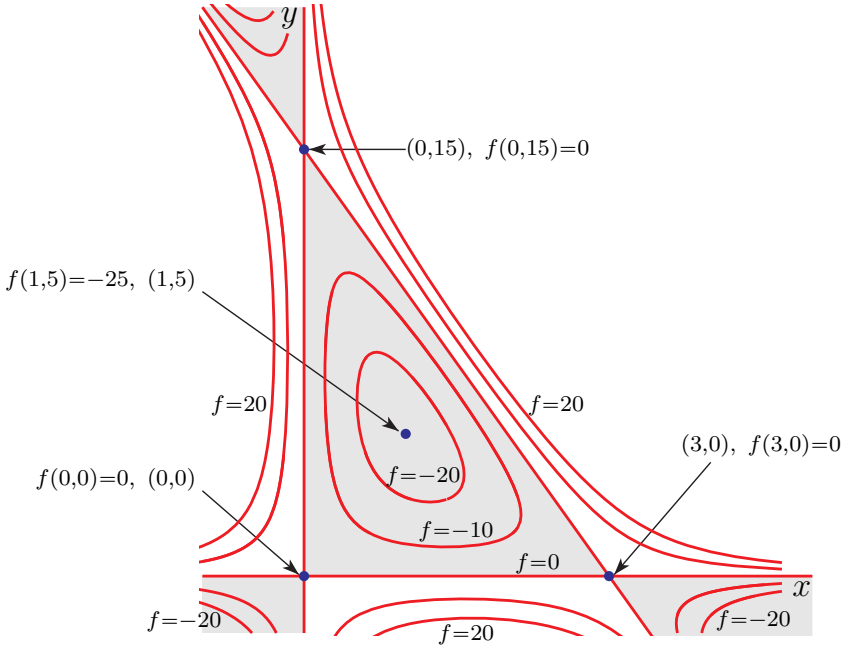
$$f_{xx}(x,y) = 10y,$$
$$f_{yy}(x,y) = 2x,$$

$$f_{xy}(x,y) = (1)(10x + y - 15) + y(1) = 10x + 2y - 15,$$
$$f_{yx}(x,y) = (1)(5x + 2y - 15) + x(5) = 10x + 2y - 15.$$

Nous avons, à nouveau, calculé f_{xy} et f_{yx} afin de nous prémunir d'erreurs mécaniques. Nous avons déjà trouvé, dans l'exemple 2.8.10, que les points critiques sont $(0,0)$, $(0,15)$, $(3,0)$ et $(1,5)$. La classification est :

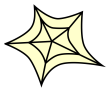
point critique	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f_{xx}	type
$(0,0)$	$0 \times 0 - (-15)^2 < 0$		point de selle
$(0,15)$	$150 \times 0 - 15^2 < 0$		point de selle
$(3,0)$	$0 \times 6 - 15^2 < 0$		point de selle
$(1,5)$	$50 \times 2 - 5^2 > 0$	50	min. local

Voici une esquisse des courbes de niveau de f. La fonction f prend des valeurs négatives dans les régions ombragées, et positives dans les autres régions.



De nouveau, ceci n'est pas nécessaire pour répondre à cette question, mais cela peut donner une idée de l'allure du graphe de f.

À vous de jouer 2.8.24



Soit la fonction $f(x,y) = x^2y + y^3 - 12y$. Utiliser le test des dérivées secondes pour compléter les énoncés suivants.

La fonction f admet (☐ aucun point critique ☐ un minimum ☐ un point critique non classifiable par le test ☐ un
La fonction f admet (☐ un point critique non classifiable par le test ☐ un point de selle ☐ un maximum ☐ aucun
La fonction f admet (☐ aucun point critique ☐ un minimum ☐ un point de selle ☐ un point critique non classifia
La fonction f admet (☐ aucun point critique ☐ un minimum ☐ un point de selle ☐ un point critique non classifia

Exemple 2.8.25

Trouver et classifier les points critiques de $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 - 4y^2 + 4$.

Solution. Nous connaissons la mécanique maintenant. Calculons les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} f &= x^3 + xy^2 - 3x^2 - 4y^2 + 4 \\ f_x &= 3x^2 + y^2 - 6x & f_{xx} &= 6x - 6 & f_{xy} &= 2y \\ f_y &= 2xy - 8y & f_{yy} &= 2x - 8 & f_{yx} &= 2y \end{aligned}$$

Les points critiques sont les solutions de $f_x = 0$ et $f_y = 0$, c'est-à-dire

$$f_x = 3x^2 + y^2 - 6x = 0, \tag{E1}$$
$$f_y = 2y(x-4) = 0. \tag{E2}$$

La seconde équation, $2y(x-4) = 0$, est vérifiée si et seulement si au moins une des deux équations $y = 0$ ou $x = 4$ l'est.

- Lorsque $y = 0$, l'équation (E1) force x à vérifier

  $$0 = 3x^2 + 0^2 - 6x = 3x(x-2),$$

  de sorte que $x = 0$ ou $x = 2$.

- Lorsque $x = 4$, l'équation (E1) force y à vérifier

  $$0 = 3 \times 4^2 + y^2 - 6 \times 4 = 24 + y^2,$$

  ce qui est impossible.

Ainsi, il y a deux points critiques : $(0,0)$, $(2,0)$. Voici le tableau qui donne la classification.

point critique	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f_{xx}	type
$(0,0)$	$(-6) \times (-8) - 0^2 > 0$	$-6 < 0$	max. local
$(2,0)$	$6 \times (-4) - 0^2 < 0$		point de selle

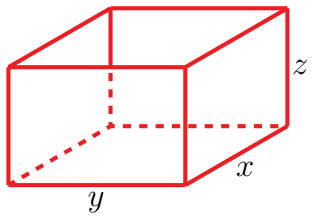
Exemple 2.8.26

Un fabricant veut produire des boîtes rectangulaires (sans couvercle) d'un certain volume, V, en utilisant le moins de matériel possible. Trouver les dimensions de la boîte.

Solution.

Soit x, y et z la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte, respectivement. La boîte a deux côtés d'aire xz, deux côtés d'aire yz et un fond d'aire xy. Ainsi, l'aire totale est

$$S = 2xz + 2yz + xy.$$



Cependant, les dimensions ne sont pas indépendantes. La contrainte d'avoir un volume V se traduit par

$$xyz = V.$$

Nous pouvons utiliser cette contrainte pour éliminer une variable. Puisque z se trouve à la

fin de l'alphabet, éliminons z en remplaçant $z = \frac{V}{xy}$. Nous devons donc trouver les valeurs de x et y qui minimisent la fonction

$$S(x,y) = \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} + xy.$$

Commençons par trouver les points critiques de S. Puisque

$$S_x(x,y) = -\frac{2V}{x^2} + y \qquad \text{et} \qquad S_y(x,y) = -\frac{2V}{y^2} + x,$$

(x,y) est un point critique si et seulement si

$$x^2 y = 2V, \tag{E1}$$
$$xy^2 = 2V. \tag{E2}$$

On résout (E1) pour y, ce qui donne $y = \frac{2V}{x^2}$. En remplaçant dans (E2), on obtient

$$x\frac{4V^2}{x^4} = 2V \implies x^3 = 2V \implies x = \sqrt[3]{2V} \quad \text{et} \quad y = \frac{2V}{(2V)^{2/3}} = \sqrt[3]{2V}.$$

Comme il n'y a qu'un point critique, on peut espérer qu'il donne lieu à un minimum[a]. Utilisons le test de la dérivée seconde. Les dérivées partielles requises sont

$$S_{xx}(x,y) = \frac{4V}{x^3}, \qquad S_{xx}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2,$$
$$S_{xy}(x,y) = 1, \qquad S_{xy}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 1,$$
$$S_{yy}(x,y) = \frac{4V}{y^3}, \qquad S_{yy}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2.$$

Alors,

$$S_{xx}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)\ S_{yy}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) - S_{xy}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)^2 = 3 > 0,$$
$$S_{xx}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2 > 0,$$

et, en vertu du théorème 2.8.21, $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ est un point de minimum local. Ainsi, les dimensions requises sont

$$x = y = \sqrt[3]{2V}, \qquad z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

Remarquons que, dans la solution, nous avons $x = y$. C'est une bonne chose : la fonction $S(x,y)$ est symétrique en x et y. Puisque la boîte n'a pas de couvercle, la symétrie ne dépend pas de z.

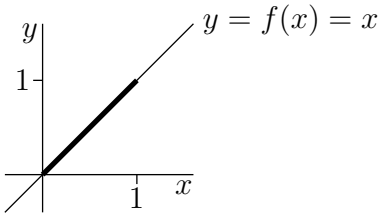
[a] En effet, on peut utiliser le fait que $0 < x < \infty$, que $0 < y < \infty$ et que $S \to \infty$ lorsque $x \to 0$ et $y \to 0$ et lorsque $x \to \infty$ et $y \to \infty$ pour prouver que le seul point critique donne un minimum global.

Maximums et minimums absolus

Un point de minimum ou de maximum local n'a aucune raison d'être un point de minimum ou de maximum global. En fait, il n'y a aucune raison pour qu'une fonction qui admet des minimums et des maximums locaux admette un minimum ou un maximum global, même pour des fonctions à une variable.

Commençons par faire un bref rappel de ce qui arrive pour les fonctions d'une variable définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour fixer les idées, supposons que nous voulons trouver les extremums d'une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$. Si une valeur extrémale est atteinte à une valeur $x = a$ à l'intérieur de l'intervalle (c'est-à-dire telle que $0 < a < 1$), alors a est aussi un point de maximum ou de minimum local. Si $f'(a)$ existe, alors on doit avoir $f'(a) = 0$, c'est-à-dire que a est un point critique pour f.



Cependant, si l'extremum global est atteint à un point de la frontière de l'intervalle, c'est-à-dire $a = 0$ ou $a = 1$, alors a n'a pas besoin d'être un point critique de f. Ceci arrive, par exemple, avec $f(x) = x$. La valeur maximale de $f(x)$ sur $0 \leqslant x \leqslant 1$ est 1 et est atteinte à $x = 1$, mais $f'(x) = 1$ ne s'annule jamais, de sorte que f n'a pas de point critique.

Ainsi, afin de trouver le maximum et le minimum d'une fonction $f(x)$ sur $[0, 1]$, on procède comme suit :

(a) Dresser une liste des points candidats $0 \leqslant a \leqslant 1$ où les maximums/minimums peuvent être atteints, en trouvant les valeurs de a où :
   (a) $0 < a < 1$ et $f'(a) = 0$, ou
   (b) $0 < a < 1$ et $f'(a)$ n'existe pas (c'est-à-dire les points singuliers de f), ou
   (c) a est un point du bord du domaine, c'est-à-dire $a = 0$ ou $a = 1$;

(b) Évaluer $f(a)$ à chacun des points a de la liste du point précédent. La valeur la plus grande est le maximum absolu ; la plus petite, le minimum absolu.

La procédure pour trouver le maximum et le minimum d'une fonction f de plusieurs variables sur un ensemble donné est similaire. Commençons par le cas d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables sur le disque $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Comme précédemment :

(a) Dresser la liste des points candidats $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ sur le disque où un maximum ou un minimum peut être atteint (voir notamment le théorème 2.8.3) :
   (a) $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ est un point à l'intérieur du disque (c'est-à-dire, dans notre exemple, que $x_0^2 + y_0^2 < 1$) et $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$, ou
   (b) $\mathbf{r}_0$ est un point intérieur, et l'une des dérivées partielles $f_x(\mathbf{r}_0)$ ou $f_y(\mathbf{r}_0)$ n'existe pas, ou
   (c) $\mathbf{r}_0$ est un point sur le bord du disque[3] et peut donner lieu à un maximum ou à un minimum (plus de détails plus bas) ;

(b) Puis, évaluer f sur chacun des points de la liste de candidats. La valeur la plus grande est le maximum global ; la plus petite, le minimum global.

Le bord d'un ensemble comme le disque est une courbe (le cercle). Cette courbe est de dimension 1. On peut trouver le maximum de $f(x, y)$ sur cette courbe en transformant $f(x, y)$ en une fonction d'une seule variable (sa restriction à la courbe) puis grâce aux techniques usuelles du calcul à une variable. Ceci est illustré dans les exemples ci-après.

[3] Il devrait être clair que la frontière, ou le bord, du disque est l'ensemble des points $\mathbf{r}$ tels que $\|\mathbf{r}\| = 1$, c'est-à-dire le cercle. Plus généralement, un point $\mathbf{r}$ est un point de la frontière d'un ensemble S s'il existe une suite de points de S qui converge vers $\mathbf{r}$ et qu'il existe aussi une suite de points du complément de S qui converge vers $\mathbf{r}$.

Exemple 2.8.27

Trouver le maximum et le minimum de $T(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$ sur la région définie par $x^2+y^2 \leqslant 1$ (c'est-à-dire le disque unité).

Solution. Suivons notre procédure. Trouvons d'abord les points critiques, puis les points de non-dérivabilité et finalement le bord du domaine.

Points critiques à l'intérieur du domaine : Pour trouver les points critiques à l'intérieur du domaine, on calcule le gradient $\boldsymbol{\nabla} T$ de T :

$$T_x(x,y) = (1-2x^2-2xy)e^{-x^2-y^2}, \qquad T_y(x,y) = (1-2xy-2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

Puisque l'exponentielle $e^{-x^2-y^2}$ ne s'annule jamais, les points critiques sont les solutions de

$$\begin{aligned} T_x = 0 \quad &\iff \quad 2x(x+y) = 1, \\ T_y = 0 \quad &\iff \quad 2y(x+y) = 1. \end{aligned}$$

- Puisque $2x(x+y)$ et $2y(x+y)$ sont non nuls, on peut diviser ces équations, ce qui donne $\frac{x}{y} = 1$, et donc $x = y$.
- On remplace dans une des deux équations, ce qui donne $2x(2x) = 1$, et donc $x = y = \pm\frac{1}{2}$.

Ainsi, les seuls points critiques sont $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Ils sont tous les deux à l'intérieur du domaine.

Points singuliers : Dans ce problème, il n'y a pas de point singulier. Les dérivées partielles de T existent partout.

Bord du domaine : Les points du bord du domaine sont ceux vérifiant $x^2+y^2 = 1$, c'est-à-dire les points du cercle unité. On peut utiliser le paramétrage familier du cercle (voir l'exemple 1.5.4), $x = \cos t$ et $y = \sin t$. Ceci rendra la formule pour T sur le bord du domaine plus simple :

$$T = (\cos t + \sin t)e^{-\cos^2 t - \sin^2 t} = (\cos t + \sin t)e^{-1}.$$

Il suffit donc d'étudier les variations de $T(t) = (\cos t + \sin t)e^{-1}$.

$$\frac{dT}{dt} = (-\sin t + \cos t)\, e^{-1}$$

Ainsi, $(\cos t + \sin t)e^{-1}$ atteint son maximum ou son minimum lorsque

- $\sin t = \cos t$,
- c'est-à-dire lorsque $x = y$ et $x^2+y^2 = 1$,
- ce qui, à son tour, force $x^2+x^2 = 1$, d'où $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En somme, nous avons les candidats suivants pour les maximums et minimums.

point	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$
valeur de T	$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frac{\sqrt{2}}{e} \approx 0.52$	$-\frac{\sqrt{2}}{e}$
	max.	min.		

La figure ci-contre montre le domaine, les courbes de niveau, les points critiques et les points candidats sur le bord. Il est conseillé de faire une figure comme celle-ci (les courbes de niveau en moins), afin de s'assurer de ne pas inclure d'éventuels points critiques qui se trouveraient à l'extérieur du domaine.

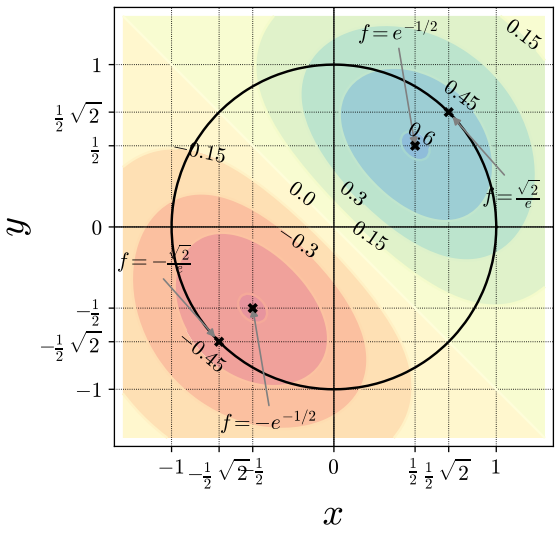


Figure 2.8.28 Les courbes de niveau, les points critiques et les valeurs extrémales de $(x + y)e^{-x^2-y^2}$.

Dans l'exemple précédent, nous avons analysé le comportement de f sur le bord du domaine grâce au paramétrage $x = \cos t$, $y = \sin t$ du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Il arrive souvent qu'un tel paramétrage ne mène pas à une expression aussi commode de la fonction considérée. Pire, certaines courbes peuvent ne pas avoir de paramétrage sympathique.

L'exemple qui suit montre une autre façon de traiter le bord du domaine.

Exemple 2.8.29

Trouver le maximum et le minimum de $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 - 4y^2 + 4$ sur le disque $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Solution. De nouveau, commençons par trouver les points critiques et les points singuliers, et analysons le bord du domaine.

Points critiques à l'intérieur : Si f prend son maximum ou son minimum en un point à l'intérieur du disque, c'est-à-dire vérifiant $x^2 + y^2 < 1$, alors ce point doit être un point critique de f ou un point singulier. Pour trouver les points critiques de f[a], nous devons calculer les dérivées partielles :

$$f_x = 3x^2 + y^2 - 6x, \qquad f_y = 2xy - 8y.$$

Les points critiques sont les solutions de

$$f_x = 3x^2 + y^2 - 6x = 0, \tag{E1}$$
$$f_y = 2y(x - 4) = 0. \tag{E2}$$

La seconde équation, $2y(x-4) = 0$, est satisfaite si et seulement si au moins une des égalités $y = 0$ ou $x = 4$ tient.

- Lorsque $y = 0$, l'équation (E1) force x à satisfaire

$$0 = 3x^2 + 0^2 - 6x = 3x(x - 2),$$

de sorte que $x = 0$ ou $x = 2$.

- Lorsque $x = 4$, l'équation (E1) force y à satisfaire

$$0 = 3 \times 4^2 + y^2 - 6 \times 4 = 24 + y^2,$$

ce qui est impossible.

Ainsi, il y a seulement deux points critiques : $(0,0),\ (2,0)$. Parmi ceux-ci, seul $(0,0)$ est un point à l'intérieur du domaine.

Points singuliers : Dans ce problème, il n'y a pas de point singulier.

Bord du domaine : Sur le bord du domaine, $x^2 + y^2 = 1$, on peut encore paramétrer le cercle $x = \cos t$ et $y = \sin t$. Cependant, on utilise une autre méthode pour illustrer différentes techniques[b]. Nous savons que (x, y) vérifie $x^2 + y^2 = 1$, d'où $y^2 = 1 - x^2$. Si l'on regarde la formule pour $f(x, y)$, on remarque qu'elle contient seulement des puissances paires de y[c], de sorte qu'on peut éliminer y en remplaçant $y^2 = 1 - x^2$ dans la formule

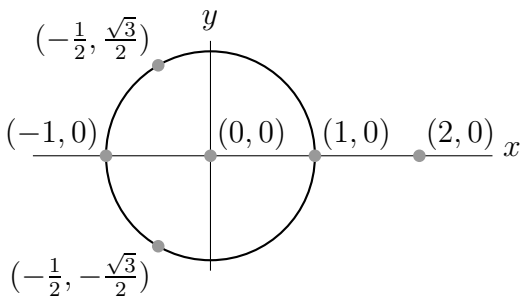
$$f = x^3 + x(1 - x^2) - 3x^2 - 4(1 - x^2) + 4 = x + x^2.$$

Le maximum et le minimum de $x + x^2$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$ doivent être atteints :

- lorsque $x = -1$ ($\Rightarrow y = f = 0$), ou
- lorsque $x = +1$ ($\Rightarrow y = 0,\ f = 2$), ou
- lorsque $0 = \frac{d}{dx}(x + x^2) = 1 + 2x$ ($\Rightarrow x = -\frac{1}{2},\ y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}},\ f = -\frac{1}{4}$).

Voici une esquisse montrant les points que nous avons identifiés jusqu'à présent.

Nous avons déjà mentionné que le point $(2,0)$ n'appartient pas au domaine qui nous intéresse.



Ainsi, en bout de ligne, nous avons les candidats suivants pour les maximum et minimum.

point	$(0,0)$	$(-1,0)$	$(1,0)$	$\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
valeur de f	4	0	2	$-\frac{1}{4}$
	max.			min.

Exemple 2.8.30

Trouver les valeurs maximale et minimale de $f(x, y) = xy - x^3y^2$ lorsque (x, y) parcourt le carré $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$.

Solution. Comme d'habitude, on étudie les points critiques, les points singuliers et le bord du domaine.

[a] Nous l'avons déjà fait à l'exemple 2.8.25 mais, pour le bénéfice du lectorat, faisons-le à nouveau.

[b] Même si vous avez du mal à croire qu'on « ne peut pas avoir trop d'outils », il est plutôt dangereux de se fier seulement à l'un d'eux.

[c] S'il y avait eu des puissances impaires, on pourrait considérer deux cas séparés, $y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, et remplacer $y = \sqrt{1 - x^2}$ dans le premier cas, puis $y = -\sqrt{1 - x^2}$ dans le second.

Points critiques à l'intérieur du domaine : Si f atteint son maximum ou son minimum à un point à l'intérieur du carré, c'est-à-dire vérifiant $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, alors ce point doit être un point critique ou un point singulier de f. Pour calculer les points critiques, on calcule les dérivées partielles :

$$f_x(x,y) = y - 3x^2y^2, \qquad f_y(x,y) = x - 2x^3y.$$

Les points critiques sont les solutions de

$$\begin{aligned} f_x = 0 &\iff y(1-3x^2y) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } 3x^2y = 1, \\ f_y = 0 &\iff x(1-2x^2y) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 2x^2y = 1. \end{aligned}$$

- Si $y = 0$, on ne peut avoir $2x^2y = 1$; ainsi, on doit avoir $x = 0$.
- Si $3x^2y = 1$, il est impossible d'avoir $x = 0$, de sorte qu'il faut $2x^2y = 1$. Après division, on obtient $1 = \frac{3x^2y}{2x^2y} = \frac{3}{2}$, ce qui est impossible.

Ainsi, le seul point critique sur le carré est $(0,0)$. En ce point, on a $f = 0$.

Points singuliers : Il n'y en a aucun.

Bord du domaine : La région est un carré ; son bord est composé de ses 4 côtés.

- Pour commencer, on regarde la partie du bord qui vérifie $x = 0$. Sur tout ce côté, la valeur de f est 0.
- On regarde maintenant la portion du bord correspondant à $y = 0$. À nouveau, sur cette portion du bord, la valeur de f est 0.
- On poursuit avec la portion du bord où $y = 1$, où l'on a $f(x,1) = x - x^3$. Pour trouver le maximum et le minimum de $f(x,y)$ sur cette portion, on doit trouver le maximum et le minimum de $x - x^3$ lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$.

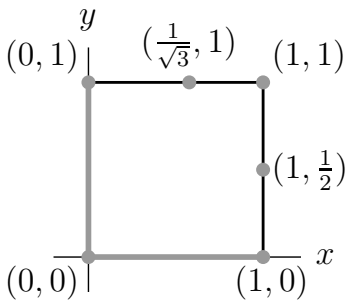
  Rappelons que, en général le maximum et le minimum d'une fonction continue $h(x)$ sur un intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ doivent être atteints soit à $x = a$, à $x = b$ ou à un point x où $h'(x) = 0$ ou $h'(x)$ n'existent pas. Dans notre cas, $\frac{d}{dx}(x - x^3) = 1 - 3x^2$, de sorte que les maximum et minimum pour $x - x^3$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$ doivent être atteints :

  - à $x = 0$, où f vaut 0, ou
  - à $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, où f vaut $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, ou
  - à $x = 1$, où f vaut 0.
- Finalement, on étudie la portion du bord du carré où $x = 1$, où l'on a $f(1,y) = y - y^2$. Puisque $\frac{d}{dy}(y - y^2) = 1 - 2y$, le seul point critique de $y - y^2$ se trouve à $y = \frac{1}{2}$. Ainsi, le maximum et le minimum pour $y - y^2$ avec $0 \leqslant y \leqslant 1$ doivent avoir lieu :

  - à $y = 0$, où f vaut 0, ou
  - à $y = \frac{1}{2}$, où f vaut $\frac{1}{4}$, ou
  - à $y = 1$, où f vaut 0.

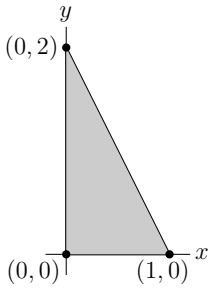
En bout de ligne, nous avons les candidats suivants pour le maximum et le minimum de f. Les valeurs extrémales sont indiquées.

point	$(0,0)$	$(0,0 \leqslant y \leqslant 1)$	$(0 \leqslant x \leqslant 1, 0)$	$(1,0)$	$(1,\frac{1}{2})$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$
valeur de f	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.385$
	min.	min.	min.	min.		min.	min.	max.



Exemple 2.8.31

Trouver le maximum et le minimum de $f(x,y) = xy + 2x + y$ lorsque (x,y) parcourt le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,2)$, tel qu'indiqué dans la figure ci-contre.



Solution. Comme d'habitude, on examine les points critiques, les points singuliers et le bord du domaine.

Points critiques à l'intérieur du domaine : Si f atteint son maximum ou son minimum à un point à l'intérieur du domaine, ce point doit être un point critique ou un point singulier de f. Les points critiques sont les solutions de

$$f_x(x,y) = y + 2 = 0, \qquad f_y(x,y) = x + 1 = 0.$$

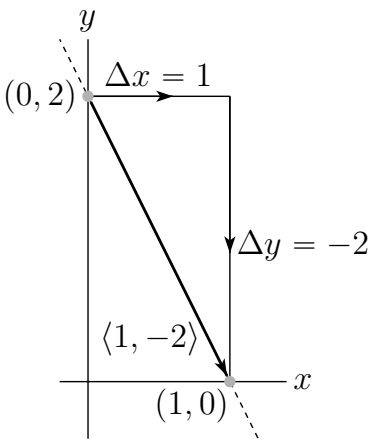
Ainsi, il y a exactement un point critique, à savoir $(-1,-2)$. Ce point se trouve à l'extérieur du domaine, il n'est donc pas un candidat au maxiumum ni au minimum.

Points singuliers : Il n'y en a aucun.

Bord du domaine : La région est un triangle (et son intérieur), de sorte que son bord est formé par trois segments.

- Pour commencer, regardons le segment joignant $(0,0)$ à $(0,2)$. Sur ce segment, on a $x = 0$, de sorte que $f(0,y) = y$. La plus petite valeur de f sur ce côté est $f = 0$ au point $(0,0)$, et la plus grande valeur de f sur ce côté est $f = 2$ au point $(0,2)$.
- Ensuite, considérons le côté joignant $(0,0)$ à $(1,0)$. Sur ce côté, $y = 0$, de sorte que $f(x,0) = 2x$. La plus petite valeur de f sur ce côté est $f = 0$ au point $(0,0)$, et la plus grande valeur de f sur ce côté est $f = 2$ au point $(1,0)$.
- Finalement, regardons le segment joignant $(0,2)$ à $(1,0)$. Notre première tâche est de trouver l'équation de la droite qui passe par $(0,2)$ et $(1,0)$. Prenons ceci comme prétexte pour faire une petite révision et trouvons cette équation de trois façons différentes.

- *Méthode 1 :* On sait qu'une droite non verticale du plan xy admet une équation de la forme $y = mx + b$, où b est l'ordonnée à l'origine y et où m est la pente. Dans notre cas, la droite croise l'axe des y à $y = 2$, et donc $b = 2$. La droite passe par $(0, 2)$ et $(1, 0)$, donc sa pente est $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{1-0} = -2$. Ainsi, le troisième côté du triangle se trouve sur la droite d'équation $y = 2 - 2x$ et vérifie en plus $0 \leqslant x \leqslant 1$.



- *Méthode 2 :* Toute droite du plan xy admet une équation $ax + by = c$. Dans ce cas, $(0, 0)$ *n'est pas* sur la droite, de sorte que $c \neq 0$, et l'on peut diviser l'équation par c, ce qui donne $\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y = 1$. Posons $\frac{a}{c} = A$ et $\frac{b}{c} = B$. Ainsi, puisque la droite ne passe pas par l'origine, elle admet une équation de la forme $Ax + By = 1$. Afin d'avoir que $(0, 2)$ se trouve sur la droite, $x = 0$, $y = 2$ doit être une solution de $Ax + By = 1$, c'est-à-dire $Ax\big|_{x=0} + By\big|_{y=2} = 1$, de sorte que $B = \frac{1}{2}$. Afin d'avoir que $(1, 0)$ se trouve sur la droite, $x = 1$, $y = 0$ doit être une solution de $Ax + By = 1$, c'est-à-dire $Ax\big|_{x=1} + By\big|_{y=0} = 1$, ce qui donne $A = 1$. Ainsi, l'équation de la droite est $x + \frac{1}{2}y = 1$, ou encore $y = 2 - 2x$.
- *Méthode 3 :* Le vecteur joignant $(0, 2)$ à $(1, 0)$ est $\begin{bmatrix} 1-0 \\ 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Il s'agit d'un vecteur directeur pour la droite. Un point sur celle-ci est $(0, 2)$. Ainsi, un paramétrage de cette droite est (voir équation (††))

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad x = t,\ y = 2 - 2t.$$

Chacune de ces trois méthodes[a] donne que le côté du triangle qui joint $(0, 2)$ à $(1, 0)$ est $y = 2 - 2x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$. Sur ce côté du triangle, nous avons

$$f(x, 2 - 2x) = x(2 - 2x) + 2x + (2 - 2x) = -2x^2 + 2x + 2.$$

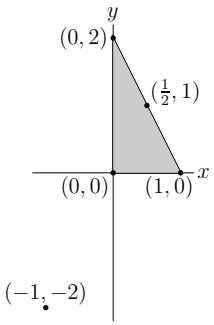
Posons $g(x) = -2x^2 + 2x + 2$. Le maximum et le minimum de $g(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, et donc le maximum et le minimum pour f sur l'hypoténuse du triangle, doivent être atteints :

- à $x = 0$, où l'on a $f(0, 2) = g(0) = 2$, ou
- à $x = 1$, où l'on a $f(1, 0) = g(1) = 2$, ou
- lorsque $0 = g'(x) = -4x + 2$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{2}$, $y = 2 - \frac{2}{2} = 1$, et où l'on a

$$f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{4} + \frac{2}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

En combinant ce qui précède, nous avons les candidats suivants pour les maximum et minimum de f.

point	$(0,0)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(\frac{1}{2},1)$
valeur de f	0	2	2	$\frac{5}{2}$
	min.			max.



Exemple 2.8.32

Trouver les points les plus hauts et les points les plus bas de la portion de la surface $z = \sqrt{x^2+y^2}$ se trouvant sur le carré $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

Solution. La fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ admet une interprétation géométrique simple : il s'agit de la distance séparant le point (x,y) de l'origine. Ainsi,

- le minimum de $f(x,y)$ est atteint au point sur le carré qui est le plus près de l'origine, c'est-à-dire l'origine elle-même. Ainsi, $(0,0,0)$ est le point le plus bas sur la surface, et sa hauteur est 0.
- le maximum de $f(x,y)$ est atteint aux points sur le carré se trouvant le plus loin de l'origine, c'est-à-dire les 4 coins du carré $(\pm 1, \pm 1)$. À ces points, $z = \sqrt{2}$. Ainsi, les points les plus hauts sur la surface sont $(\pm 1, \pm 1, \sqrt{2})$.

Même si nous avons déjà répondu à la question, il sera illustratif de voir ce qu'il serait arrivé si nous avions suivi notre protocole usuel. Les dérivées partielles de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ sont définies pour $(x,y) \neq (0,0)$ et sont

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- Il n'y a pas de point critique, puisque
  - $f_x = 0$ seulement pour $x = 0$, et
  - $f_y = 0$ seulement pour $y = 0$, mais
  - $(0,0)$ n'est pas un point critique puisque f_x et f_y ne sont pas définies en ce point.
- Il y a un point singulier, à savoir $(0,0)$. La valeur minimale de f est atteinte en ce point singulier.
- Le bord du carré est formé de ses 4 côtés. L'un d'eux est

  $$\{\ (x,y)\ \mid\ x = 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\ \}.$$

  Sur ce côté, $f = \sqrt{1+y^2}$. Étant donné que $\sqrt{1+y^2}$ croît avec $|y|$, la plus petite valeur de f sur ce côté est 1 (lorsque $y = 0$), et la plus grande est $\sqrt{2}$ (lorsque $y = \pm 1$). La même chose arrive pour les trois autres côtés du carré. La valeur maximale de f est atteinte aux 4 coins. Remarquons que f_x et f_y sont toutes les deux non nulles en ces points.

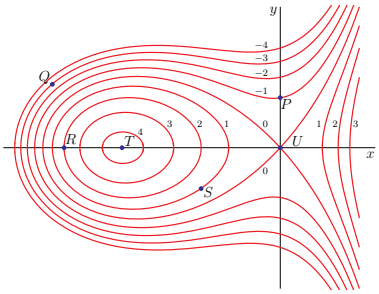
[a] Dans la troisième, on a changé le nom de x pour t.

Exercices

Pour se pratiquer.

1.

(a) Quelques courbes de niveau de la fonction $f(x, y)$ sont esquissées dans le plan xy ci-contre. Pour chacun des énoncés ci-dessous, encercler la lettre de ***tous*** les points dans le diagramme où la situation s'applique. Par exemple, si l'énoncé était « Ces points sont sur l'axe y », vous encercleriez P et U, mais aucune des autres lettres. Vous pouvez prendre pour acquis qu'un maximum local se produit au point T.



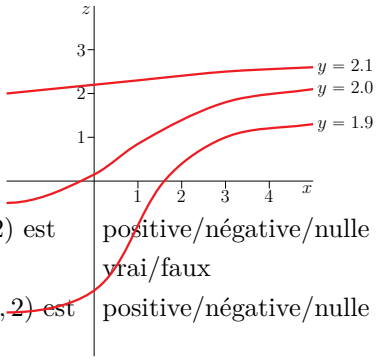
(i) ∇f est nul P R S T U

(ii) f a un point de selle P R S T U

(iii) la dérivée partielle f_y est positive P R S T U

(iv) la dérivée directionnelle de f dans la direction $-\mathbf{j}$ est négative P R S T U

(b) Le diagramme ci-contre montre trois « traces y » d'un graphe $z = F(x, y)$ esquissé sur les axes xz. (Autrement dit, les intersections de la surface $z = F(x, y)$ avec les trois plans ($y = 1.9$, $y = 2$, $y = 2.1$). Pour chaque énoncé ci-dessous, encercler le bon mot.



(i) la dérivée partielle de premier ordre $F_x(1, 2)$ est positive/négative/nulle

(ii) F a un point critique en $(2, 2)$ vrai/faux

(iii) la dérivée partielle de deuxième ordre $F_x(1, 2)$ est positive/négative/nulle

2. Soit $z = f(x, y) = (y^2 - x^2)^2$.

(a) Faire une esquisse raisonnablement précise des courbes de niveau dans le plan xy de $z = f(x, y)$ pour $z = 0$, 1 et 16. Assurez-vous de montrer les unités sur les axes de coordonnées.

(b) Vérifiez que $(0, 0)$ est un point critique pour $z = f(x, y)$, et déterminez de la partie (a) ou directement de la formule pour $f(x, y)$ si $(0, 0)$ est un minimum local, un maximum local ou un point de selle.

(c) Pouvez-vous utiliser le test de la dérivée seconde afin de déterminer si le point critique $(0, 0)$ est un minimum local, un maximum local ou un point de selle ? Donnez des raisons pour votre réponse.

3. Utilisez le test de la dérivée seconde pour trouver toutes les valeurs de la constante c pour lesquelles la fonction $z = x^2 + cxy + y^2$ admet un point de selle en $(0, 0)$.

4. Trouvez et classifiez tous les points critiques de la fonction

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6.$$

5. Trouvez tous les points critiques pour $f(x,y) = x(x^2+xy+y^2-9)$. Également, trouvez les points parmi ces points qui donnent des maximums locaux pour $f(x,y)$, qui donnent des minimum locaux, et qui donnent des points de selles.

6. Trouvez et classifiez tous les points critiques de $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$.

7. Trouvez tous les points de selles, les minimums locaux et maximums locaux de la fonction

$$f(x,y) = x^3 + x^2 - 2xy + y^2 - x.$$

8. Pour la surface

$$z = f(x,y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 - 4y^2 + 4$$

Trouvez et classifiez (maximum local, minimum local ou point de selle) tous les points critiques de $f(x,y)$.

9. Trouvez la valeur du maximum et minimum absolu de la fonction $f(x,y) = 5 + 2x - x^2 - 4y^2$ sur la région rectangulaire

$$R = \left\{ \ (x,y) \ \middle| \ -1 \leqslant x \leqslant 3, \ -1 \leqslant y \leqslant 1 \ \right\}$$

10. Soit la fonction $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

(a) Montrez que f admet trois points critiques et déterminez-les.

(b) Pour chacun de ces points critiques, dites s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point de selle. Justifiez.

Pour mieux comprendre.

11. Trouvez la valeur maximale et minimale de $f(x,y) = xy - x^3y^2$ lorsque (x,y) se trouve dans le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

12. La température à tous les points dans le disque $x^2 + y^2 \leqslant 1$ est donnée par $T(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$. Trouvez la température maximale et minimale dans le disque.

13.

(a) Pour la fonction $z = f(x,y) = x^3 + 3xy + 3y^2 - 6x - 3y - 6$. Trouvez et classifiez (maximum local, minimum local ou point de selle) tous les points critiques de $f(x,y)$.

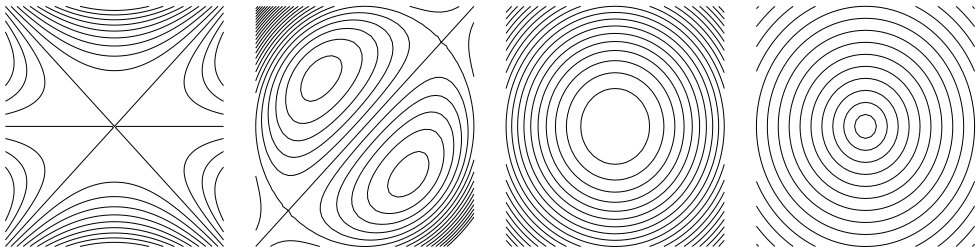
(b) Les images ci-dessous illustrent les ensembles de niveau de $f(x,y) = c$ des fonctions de la liste aux hauteurs $c = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 1.9, 2$. Étiquettez les images avec la fonction correspondante et identifier les points critiques dans chaque image. (Notez que dans certains cas, les points critiques peuvent ne pas être déjà identifiés dans l'image dessinée. Dans ces cas, vous devez les ajouter à l'image.)

(i) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(x - y) + 1$.

(ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(iii) $f(x,y) = y(x+y)(x-y) + 1$.

(iv) $f(x,y) = x^2 + y^2$.



14. Considérez la fonction

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y$$

(a) Trouvez et classifiez tous les points critiques de $f(x,y)$.

(b) Trouvez la valeur maximale et minimale de $f(x,y)$ dans le triangle dont les sommets sont $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

15. Une plaque en métal est en forme de demi-disque borné par l'axe x et la moitié supérieure de $x^2 + y^2 = 4$. La température au point (x,y) est donnée par $T(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - y$. Trouvez le point le plus froid sur la plaque, en expliquant vos étapes soigneusement. (Note : $\ln 2 \approx 0.693$, $\ln 5 \approx 1.609$)

16. La température $T(x,y)$ à un point du plan xy est donnée par

$$T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

(a) Trouvez la valeur maximale et minimale de $T(x,y)$ sur le disque D défini par $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

(b) Supposons qu'une fourmi vit sur le disque D. Si la fourmi est initiallement au point $(1,1)$, dans quelle direction doit-elle se déplacer afin que la température croît le plus vite possible ?

(c) Supposons que la fourmi se déplace à une vitesse $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Quel est le taux de variation de la température lorsqu'elle passe par $(1,1)$?

(d) Supposons que la fourmi est contrainte à rester sur la courbe $y = 2 - x^2$. Où devrait-elle aller si elle veut être le plus au chaud possible ?

17. Considérez la fonction

$$f(x,y) = 3kx^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 4$$

où $k > 0$ est une constante. Trouvez et classifiez tous les points critiques de $f(x,y)$ comme étant un minimum local, un maximum local, un point de selle ou un point de type indéterminé. Distinguer prudemment les cas $k < \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$ et $k > \frac{1}{2}$.

18.

(a) Montrez que la fonction $f(x,y) = 2x + 4y + \frac{1}{xy}$ admet exactement un point critique dans le premier quadrant $x > 0$, $y > 0$, et trouvez sa valeur en ce point.

(b) Utilisez le test de la dérivée seconde pour classifier les points critiques de la partie (a).

(c) Ainsi, expliquer pourquoi l'inégalité $2x + 4y + \frac{1}{xy} \geqslant 6$ est valide pour tous les nombres réels positifs x et y.

19. Soient a et b deux nombres réels non nuls. On considère la fonction

$$\varphi(x, y) = (2ax - x^2)(2by - y^2).$$

(a) Vérifiez que $(0, 0)$ est un point critique de φ, quelles que soient les valeurs de a et b.

(b) Montrez que φ admet quatre autres points critiques (qui dépendent de a et de b) et déterminez-les.

(c) Donnez la nature de chacun des cinq points critiques de φ.

Pour aller plus loin.

20. Si t_0 est un minimum ou maximum local de la fonction lisse $f(t)$ d'une variable (t parcourt les nombres réels), alors $f'(t_0) = 0$. Il existe une condition nécessaire analogue pour déterminer si $\mathbf{x}_0$ est le minimum ou maximum local d'une fonction lisse $g(\mathbf{x})$ ***restreint*** aux points sur la droite $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$. Le test devrait faire intervenir la fonction $g(\mathbf{x})$.

2.9 Multiplicateurs de Lagrange

Dans la dernière section, nous avons dû résoudre un certain nombre de problèmes de la forme « Quelle est la valeur maximale de la fonction f sur la courbe $\mathcal{C}$? ». Dans ces exemples, la courbe $\mathcal{C}$ était suffisamment simple pour que nous puissions réduire le problème au problème plus simple de recherche du maximum d'une fonction d'une variable. Pour des problèmes plus compliqués, cette réduction pourrait ne pas être possible. Dans cette section, nous introduisons une autre méthode pour résoudre de tels problèmes. Tout d'abord, un peu de terminologie.

Définition 2.9.1

Un problème de la forme

- « Trouver le maximum ou le minimum d'une fonction $f(x, y)$ pour (x, y) sur la courbe $g(x, y) = 0$ »

est un type de *problème d'optimisation avec une contrainte*. La fonction qui doit être maximisée/minimisée, f, est appelée la *fonction objectif*. La fonction g, qui définit la courbe d'intérêt, est la *fonction de contrainte*.

Ces problèmes sont assez courants. Comme nous l'avons dit plus haut, nous les avons déjà rencontrés dans la dernière section sur les maximums et les minimums absolus, lorsque nous cherchions les valeurs extrêmes d'une fonction sur le bord d'un domaine. En économie, les « fonctions d'utilité » sont utilisées pour modéliser l'« utilité relative », ou « désirabilité » ou « préférence », de divers choix économiques. Par exemple, une fonction d'utilité $U(w, \kappa)$ pourrait spécifier le niveau relatif de satisfaction qu'une personne obtiendrait en achetant une quantité w de vin et κ de café. Si elle veut dépenser 100$ et que le vin coûte 20$ par unité et que le café coûte 5$ par unité, alors elle souhaiterait maximiser $U(w, \kappa)$ tout en respectant la contrainte $20w + 5\kappa = 100$.

Jusqu'à présent, nous avons toujours résolu ce genre de problèmes avec contrainte :

- en isolant y à partir de $g(x, y) = 0$ pour avoir y en fonction de x (ou réciproquement), ou

- en paramétrant la courbe $g(x,y)=0$, c'est-à-dire en écrivant les points sur la courbe sous la forme $(x(t),y(t))$ pour certaines fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Par exemple, nous avons utilisé $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$ pour paramétrer le cercle $x^2+y^2=1$ dans l'exemple 2.8.27.

Cependant, très souvent, la fonction $g(x,y)$ est tellement compliquée qu'on ne peut pas résoudre explicitement $g(x,y)=0$ pour y en fonction de x ni pour x en fonction de y et, en plus, on ne peut pas paramétrer $g(x,y)=0$. Parfois, on pourrait résoudre $g(x,y)=0$ pour y en fonction de x, mais la solution résultante peut être si compliquée qu'il peut être vraiment difficile, ou même virtuellement impossible, de travailler avec elle. Ce type de traitement peut devenir encore plus difficile dans les dimensions supérieures lorsque, par exemple, on souhaite optimiser une fonction $f(x,y,z)$ soumise à une contrainte $g(x,y,z)=0$.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange : une contrainte

Il existe une autre procédure, appelée la méthode des « multiplicateurs de Lagrange »[1], qui vient à notre secours dans ces scénarios. Voici la version tridimensionnelle de la méthode. Il y a des analogues pour d'autres dimensions.

Théorème 2.9.2 Multiplicateurs de Lagrange.

Soit $f(x,y,z)$ et $g(x,y,z)$ des fonctions de classe C^1 dans une région $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^3$ qui contient la surface $\mathcal{S}$ donnée par l'équation $g(x,y,z)=0$. De plus, supposons que $\boldsymbol{\nabla} g(x,y,z)\neq\mathbf{0}$ sur $\mathcal{S}$.

Si f restreinte à la surface $\mathcal{S}$ admet un extremum local au point $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, se trouvant sur $\mathcal{S}$, alors il existe un scalaire λ tel que

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)=\lambda\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{r}_0)&=\lambda\, g_x(\mathbf{r}_0),\\ f_y(\mathbf{r}_0)&=\lambda\, g_y(\mathbf{r}_0),\\ f_z(\mathbf{r}_0)&=\lambda\, g_z(\mathbf{r}_0).\end{aligned}$$

Le scalaire λ est appelé un multiplicateur de Lagrange.

Démonstration. Écrivons $\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ et supposons que $\mathbf{r}_0=x_0\,\mathbf{i}+y_0\,\mathbf{j}+z_0\,\mathbf{k}$ est un point sur $\mathcal{S}$ tel que $f(\mathbf{r})\geqslant f(\mathbf{r}_0)$ pour tous les points $\mathbf{r}$ sur $\mathcal{S}$ qui sont près de $\mathbf{r}_0$. En d'autres termes, $\mathbf{r}_0$ est un point de minimum local pour f sur $\mathcal{S}$. Naturellement, l'argument pour les maximums locaux sera identique.

Imaginons que nous nous promenons sur la surface $\mathcal{S}$ avec le temps (disons t) allant de $t=-1$ à $t=+1$, de sorte que la position à $t=0$ est exactement $\mathbf{r}_0$. Notre position est donnée par un chemin $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$.

Posons

$$F(t)=f\circ\mathbf{r}\,(t)=f\,(x(t),y(t),z(t))\,,$$

de sorte que $F(t)$ est la valeur de f observée au temps t de notre balade. Alors, pour t près de 0, $\mathbf{r}(t)$ est près de $\mathbf{r}_0=(x(0),y(0),z(0))$, et

$$F(0)=f\circ\mathbf{r}(0)=f(\mathbf{r}_0)\leqslant f\circ\mathbf{r}(t)=F(t)$$

[1] Joseph-Louis Lagrange est en fait né Giuseppe Lodovico Lagrangia à Turin, en Italie, en 1736. Il s'installe à Berlin en 1766, puis à Paris en 1786. Il a fini par obtenir la nationalité française, et la communauté mathématique française affirme qu'il était un mathématicien français, tandis que la communauté italienne continue à affirmer qu'il était un mathématicien italien.

pour tout t suffisamment près de zéro, c'est-à-dire que F admet un minimum local à $t = 0$ et que, par conséquent, $F'(0) = 0$.

En vertu de la règle de dérivation des fonctions composées, vue au théorème 2.5.1, nous avons

$$\begin{aligned} 0 = F'(0) &= (f \circ \mathbf{r})'(0) = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}_0' \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \perp \mathbf{r}_0'. \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ est orthogonal au vecteur vitesse lors du passage par $\mathbf{r}_0$. Ceci est vrai pour tout chemin contenu dans $\mathcal{S}$ qui passe par $\mathbf{r}_0$ à $t = 0$. Il en résulte que $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ est orthogonal à tout vecteur tangent à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}_0$.

Par ailleurs, nous savons, en vertu du théorème 2.6.22, que $\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0)$ est aussi orthogonal à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}_0$. Ainsi, $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ et $\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0)$ doivent être des vecteurs colinéaires, c'est-à-dire que

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) = \lambda \boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0)$$

pour un certain scalaire λ. ■

Ainsi, pour trouver le maximum et le minimum de $f(x, y, z)$ parmi les points d'une surface $\mathcal{S}$ donnée par $g(x, y, z) = 0$, avec l'hypothèse supplémentaire que f et g ont des dérivées partielles continues et que $\boldsymbol{\nabla} g \neq \mathbf{0}$, on doit :

(a) Dresser la liste des points candidats (x, y, z) en résolvant les équations

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}) = \lambda \boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}) \qquad \text{et} \qquad g(\mathbf{r}) = 0.$$

Il faut noter qu'il y a quatre équations en tout et quatre inconnues, à savoir λ et les trois composantes de $\mathbf{r}$.

(b) Évaluer f à chacun des points de la liste de candidats. La valeur la plus grande est le maximum ; la plus petite, le minimum.

Une autre façon d'écrire le système d'équations ci-haut est d'écrire

$$L_x(a, b, c, \lambda) = L_y(a, b, c, \lambda) = L_z(a, b, c, \lambda) = L_\lambda(a, b, c, \lambda) = 0,$$

où $L(x, y, z, \lambda)$ est la fonction auxiliaire

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\, g(x, y, z).$$

Observation 2.9.3

Nous avons formulé et prouvé le théorème 2.9.2 pour les fonctions à trois variables, c'est-à-dire l'optimisation d'une fonction f sur une surface $g = 0$. Le même résultat tient lorsque la fonction objectif ainsi que la fonction de contrainte sont des fonctions de deux variables : ceci revient à maximiser/minimiser une quantité $f(x, y)$ sur une courbe $g(x, y) = 0$. Nous verrons d'autres généralisations plus tard.

Voyons quelques exemples.

Exemple 2.9.4

Trouver le maximum et le minimum de $x^2 - 10x - y^2$ sur l'ellipse d'équation $x^2 + 4y^2 = 16$.

Solution. Dans ce problème, la fonction objectif est $f(x, y) = x^2 - 10x - y^2$, et la fonction de contrainte est $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 16$. Afin d'appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous calculons les gradients $\boldsymbol{\nabla} f$ et $\boldsymbol{\nabla} g$.

$$f_x = 2x - 10 \qquad f_y = -2y \qquad g_x = 2x \qquad g_y = 8y$$

Ainsi, on doit trouver les solutions de

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= \lambda(2x), \\ -2y &= \lambda(8y), \\ x^2 + 4y^2 - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Après réarrangement, on obtient

$$(\lambda - 1)x = -5, \tag{E1}$$
$$(4\lambda + 1)y = 0, \tag{E2}$$
$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0. \tag{E3}$$

De (E2), nous avons $\lambda = -\frac{1}{4}$ ou $y = 0$.

- Si $\lambda = -\frac{1}{4}$, (E1) donne $-\frac{5}{4}x = -5$, et donc $x = 4$, et alors (E3) donne $y = 0$.
- Si $y = 0$, alors (E3) donne $x = \pm 4$ (et même si l'on aurait pu utiliser (E1) pour trouver λ, nous n'en avons pas vraiment besoin).

Ainsi, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, le théorème 2.9.2 (la version 2D en fait), donne que les seuls candidats possibles pour les points de maximum et de minimum de f sont $(4, 0)$ et $(-4, 0)$. Pour compléter le problème, on calcule la valeur de f en ces points.

point	$(4, 0)$	$(-4, 0)$
valeur de f	-24	56
	min.	max.

Ainsi, la valeur maximale de $x^2 - 10x - y^2$ sur l'ellipse est 56, et la valeur minimale est -24.

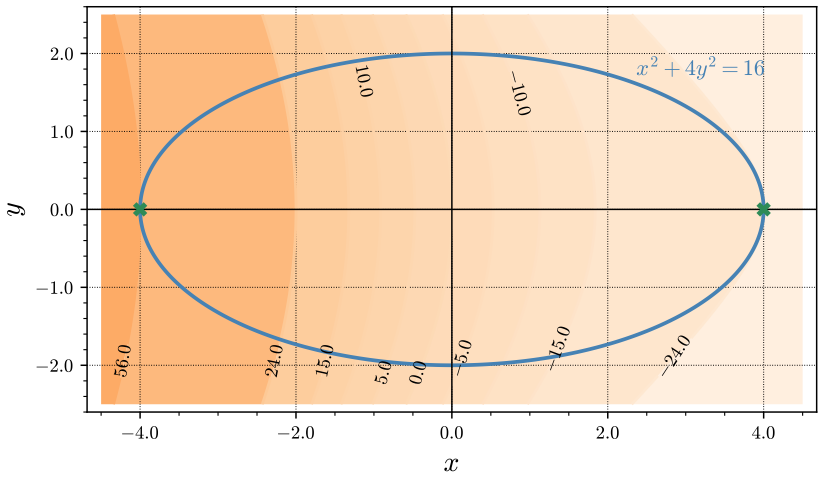


Figure 2.9.5 Les courbes de niveau de la fonction objectif $f(x, y) = x^2 - 10x - y^2$, sur fond orange. La contrainte $x^2 + 4y^2 = 16$ est l'ellipse en bleu, et les points où f atteint ses extrema sur l'ellipse sont marqués en vert.

À vous de jouer 2.9.6

Trouver le maximum et le minimum de $f(x,y) = 5x + y$ sur l'ellipse $x^2 + 9y^2 = 1$

maximum : _____

minimum : _____

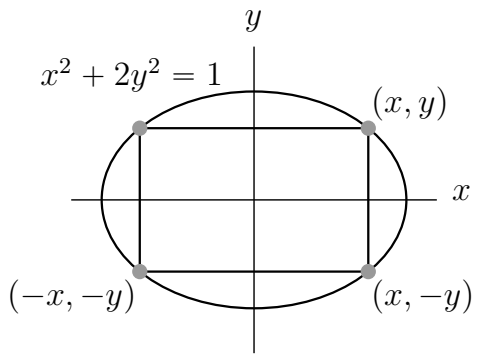
Dans les exemples précédents, la fonction objectif et la fonction de contrainte étaient données explicitement. Ce ne sera pas toujours le cas. Le prochain exemple montre comment utiliser la géométrie pour trouver les deux fonctions.

Exemple 2.9.7

Trouver l'aire du plus grand rectangle (avec des côtés parallèles aux axes) qui peut être inscrit dans l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$.

Solution.

Ce problème étant de nature nettement géométrique, commençons par faire une figure. Soit (x,y) les coordonnées du point du rectangle du premier quadrant. Les quatre coins sont alors $(\pm x, \pm y)$, de sorte que ses côtés mesurent $2x$ et $2y$.



Par ailleurs, la fonction objectif est $f(x,y) = 4xy$. La fonction de contrainte du problème est $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$. De nouveau, pour utiliser les multiplicateurs de Lagrange, nous calculons quelques dérivées partielles :

$$f_x = 4y, \qquad f_y = 4x, \qquad g_x = 2x, \qquad g_y = 4y.$$

Ainsi, nous devons trouver les solutions de

$$4y = \lambda(2x), \tag{E1}$$
$$4x = \lambda(4y), \tag{E2}$$
$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0. \tag{E3}$$

L'équation (E1) donne $y = \frac{1}{2}\lambda x$. En remplaçant dans l'équation (E2), nous obtenons

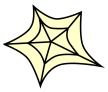
$$4x = 2\lambda^2 x \qquad \text{ou} \qquad 2x\left(2 - \lambda^2\right) = 0.$$

Ainsi, (E2) est vérifiée si $x = 0$ ou $\lambda = \sqrt{2}$ ou $\lambda = -\sqrt{2}$.

- Si $x = 0$, alors (E1) donne $y = 0$ aussi. Mais $(0,0)$ ne satisfait pas l'équation (E3).
- Si $\lambda = \sqrt{2}$, alors
  - (E2) donne $x = \sqrt{2}y$, et alors
  - (E3) donne $2y^2 + 2y^2 = 1$ ou $y^2 = \frac{1}{4}$, de sorte que
  - $y = \pm\frac{1}{2}$ et $x = \sqrt{2}y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Si $\lambda = -\sqrt{2}$, alors

- (E2) donne $x = -\sqrt{2}y$, et alors
- (E3) donne $2y^2 + 2y^2 = 1$ ou $y^2 = \frac{1}{4}$, et donc
- $y = \pm\frac{1}{2}$ et $x = -\sqrt{2}y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nous avons à présent les quatre points candidats (x, y), à savoir $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. Ils sont les quatre coins d'un rectangle. Nous avons dit que nous voulions que (x, y) soit le coin du premier quadrant, il s'agit de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.



À vous de jouer 2.9.8

Trouver le volume de la plus grande boîte rectangulaire ayant des arêtes parallèles aux axes de coordonnées qui peut être inscrite dans l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$$

Suggestion : Utilisez la symmetrie pour ramener le problème au premier octant (c'est à dire $x, y, z \geq 0$), de sorte que $V = 8xyz$.

Volume maximal : _____

Exemple 2.9.9

Trouver les extrémités des demi-axes de l'ellipse $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$. Il s'agit des points sur l'ellipse qui sont le plus loin et le plus près de l'origine.

Solution. Soit (x, y) un point sur $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$. Ce point est à l'extrémité du demi-axe le plus grand lorsqu'il maximise la distance au centre de l'ellipse, qui coïncide avec l'origine. Le point se trouve à l'extrémité du petit demi-axe lorsque cette distance est minimisée. Nous devons donc maximiser et minimiser la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ avec la contrainte

$$g(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4 = 0.$$

Notons cependant que de maximiser ou de minimiser $\sqrt{x^2 + y^2}$ est équivalent[a] à maximiser ou à minimiser son carré, $\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$. Ainsi, nous pouvons choisir la fonction objectif

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

ce que nous ferons afin de rendre les calculs plus simples. De nouveau, utilisons les multiplicateurs de Lagrange. Pour cela, calculons les dérivées partielles

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad g_x(x, y) = 6x - 2y, \quad g_y(x, y) = -2x + 6y.$$

Nous devons trouver les solutions de

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda(6x - 2y), \\ 2y &= \lambda(-2x + 6y), \\ 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

En divisant ces deux équations par 2 et en factorisant, on obtient

$$(1 - 3\lambda)x + \lambda y = 0, \tag{E1}$$

$$\lambda x + (1-3\lambda)y = 0, \tag{E2}$$
$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4 = 0. \tag{E3}$$

Pour commencer, concentrons-nous sur les deux premières équations. Supposons que la valeur de λ est connue et que nous voulons trouver x et y.

Le système d'équations $(1+3\lambda)x - \lambda y = 0$, $-\lambda x + (1+3\lambda)y = 0$ admet une solution évidente, à savoir $x = y = 0$. Cependant, cette solution n'est pas acceptable, car il ne s'agit pas d'un point sur l'ellipse. On sait, grâce aux cours d'algèbre linéaire, qu'un système homogène d'équations linéaires admet une solution non nulle si et seulement si le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

$$\det \begin{bmatrix} 1-3\lambda & \lambda \\ \lambda & 1-3\lambda \end{bmatrix} = (1-3\lambda)^2 - \lambda^2 = (1-2\lambda)(1-4\lambda) = 0$$
$$\implies \lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

On peut diviser par λ, et (E1) donne

$$y = -\frac{1-3\lambda}{\lambda}x.$$

En remplaçant ceci dans (E2), on obtient

$$\lambda x - \frac{(1-3\lambda)^2}{\lambda}x = 0.$$

À nouveau, x ne peut pas être nul, car, dans ce cas, $y = -\frac{1-3\lambda}{\lambda}x$ donnerait $y = 0$, et $(0,0)$ n'est toujours pas sur l'ellipse.

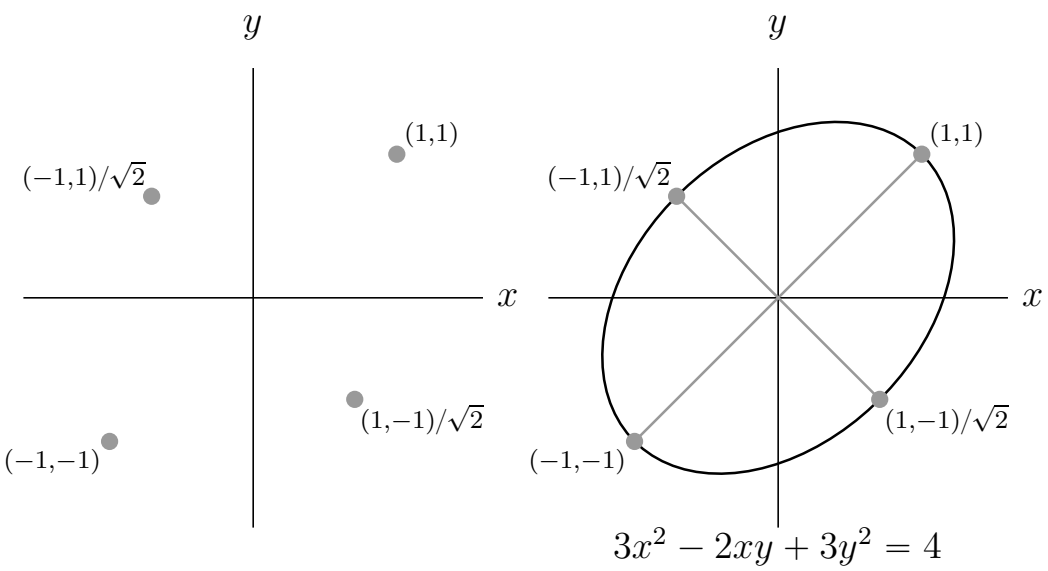
Ainsi, on peut diviser $\lambda x - \frac{(1-3\lambda)^2}{\lambda}x = 0$ par x, ce qui donne

$$\lambda - \frac{(1-3\lambda)^2}{\lambda} = 0 \iff (1-3\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$$
$$\iff 8\lambda^2 - 6\lambda + 1 = (2\lambda-1)(4\lambda-1) = 0.$$

Nous avons que λ doit être $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$. Remplacer ces valeurs dans (E1) ou (E2) donne

$$\begin{aligned}
\lambda = \frac{1}{2} \quad &\implies -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \implies x = y \\
&\overset{(E3)}{\implies} 3x^2 - 2x^2 + 3x^2 = 4 \implies x = \pm 1, \\
\lambda = \frac{1}{4} \quad &\implies \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = 0 \implies x = -y \\
&\overset{(E3)}{\implies} 3x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 4 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Ici, « $\overset{(E3)}{\implies}$ » signifie que l'on utilise (E3). Nous avons maintenant $(x,y) = \pm(1,1)$ (de $\lambda = \frac{1}{2}$) et $(x,y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (de $\lambda = \frac{1}{4}$). La distance de $(0,0)$ à $\pm(1,1)$, à savoir $\sqrt{2}$, est supérieure à la distance de $(0,0)$ à $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, à savoir 1. Ainsi, les extrémités du petit demi-axe sont $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, et celles du grand demi-axe sont $\pm(1,1)$. Ces points sont esquissés dans la figure de gauche ci-bas. Une fois ces points trouvés, il devient aisé de dessiner l'ellipse[b].



Exemple 2.9.10

Trouver les valeurs de $w \geqslant 0$, $\kappa \geqslant 0$ qui maximisent la fonction d'utilité

$$U(w,\kappa) = 6w^{\frac{2}{3}}\kappa^{\frac{1}{3}} \qquad \text{avec la contrainte} \qquad 4w + 2\kappa = 12.$$

Solution. La contrainte $4w+2\kappa = 12$ est suffisamment simple pour exprimer κ en termes de w. On peut alors remplacer $\kappa = 6 - 2w$ dans $U(w,\kappa)$ et maximiser $U(w, 6-2w) = 6w^{\frac{2}{3}}(6-2w)^{\frac{1}{3}}$ avec les technique du calcul différentiel à une variable.

Cependant, afin de pratiquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on va présenter une solution avec celle-ci. On a $U(w,\kappa) = 6w^{\frac{2}{3}}\kappa^{\frac{1}{3}}$, et la fonction de contrainte est $g(w,\kappa) = 4w + 2\kappa - 12$. Les dérivées partielles sont

$$U_w = 4w^{-\frac{1}{3}}\kappa^{\frac{1}{3}}, \qquad U_\kappa = 2w^{\frac{2}{3}}\kappa^{-\frac{2}{3}}, \qquad g_w = 4, \qquad g_\kappa = 2.$$

Les valeurs $w = 0$ et $\kappa = 0$ donnent une utilité de 0, qui ne sera certainement pas un maximum. Il suffit alors de considérer les maximums locaux. Nous devons résoudre

$$4w^{-\frac{1}{3}}\kappa^{\frac{1}{3}} = 4\lambda, \tag{E1}$$
$$2w^{\frac{2}{3}}\kappa^{-\frac{2}{3}} = 2\lambda, \tag{E2}$$
$$4w + 2\kappa - 12 = 0. \tag{E3}$$

Alors,

- l'équation (E1) donne $\lambda = w^{-\frac{1}{3}}\kappa^{\frac{1}{3}}$;
- En remplaçant ceci dans (E2), on obtient $w^{\frac{2}{3}}\kappa^{-\frac{2}{3}} = \lambda = w^{-\frac{1}{3}}\kappa^{\frac{1}{3}}$, et alors $w = \kappa$;
- Puis, en remplaçant $w = \kappa$ dans (E3), on obtient $6\kappa = 12$.

Ainsi, $w = \kappa = 2$, et l'utilité maximale est $U(2,2) = 12$.

[a] Car la fonction $S(z) = z^2$ est strictement croissante pour $z \geqslant 0$. Ainsi, pour $a, b \geqslant 0$, le fait d'avoir « $a < b$ » équivaut à avoir « $S(a) < S(b)$ ».

[b] Si l'on incline la tête de sorte à ce que la droite par $(1,1)$ et $(-1,-1)$ apparaisse horizontale.

Exemple 2.9.11

Trouver le point sur la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ qui est le plus éloigné de $(1,2,3)$.

Solution. Comme précédemment, on simplifie les calculs en considérant le carré de la distance comme fonction objectif

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$$

avec la contrainte

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0.$$

Puisque

$$\begin{aligned} &f_x(x,y,z)=2(x-1), && f_y(x,y,z)=2(y-2), && f_z(x,y,z)=2(z-3),\\ &g_x(x,y,z)=2x, && g_y(x,y,z)=2y, && g_z(x,y,z)=2z, \end{aligned}$$

nous devons résoudre

$$2(x-1)=\lambda(2x) \iff x=\frac{1}{1-\lambda}, \tag{E1}$$

$$2(y-2)=\lambda(2y) \iff y=\frac{2}{1-\lambda}, \tag{E2}$$

$$2(z-3)=\lambda(2z) \iff z=\frac{3}{1-\lambda}, \tag{E3}$$

$$0=x^2+y^2+z^2-1. \tag{E4}$$

En remplaçant (E1), (E2) et (E3) dans (E4), on obtient

$$\frac{1+4+9}{(1-\lambda)^2}-1=0 \implies (1-\lambda)^2=14 \implies 1-\lambda=\pm\sqrt{14}.$$

On peut alors remplacer les deux valeurs de λ dans les expressions pour x, y, z en termes de λ pour obtenir les points $\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ et $-\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$.

Le vecteur allant du point $\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ au point $(1,2,3)$, à savoir $\left(1-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)(\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k})$, est clairement de norme plus petite que le vecteur allant de $-\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ à $(1,2,3)$, c'est-à-dire $\left(1+\frac{1}{\sqrt{14}}\right)(\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k})$. Ainsi, le point le plus proche est $\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$, et le point le plus éloigné est $-\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$.

Deux contraintes

Dans cette section, on considère l'exemple d'un problème de la forme « maximiser (ou minimiser) $f(x,y,z)$ avec les deux contraintes $g(x,y,z)=0$ et $h(x,y,z)=0$ ». La méthode des multiplicateurs de Lagrange, vue au théorème 2.9.2, s'adapte à ce contexte comme suit.

Théorème 2.9.12 Deux contraintes.

Soit $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ et $h(x,y,z)$ des fonctions de classe C^1 dans une région de $\mathbb{R}^3$ qui contient une courbe $\mathcal{C}$ donnée par l'équation

$$g(x,y,z)=h(x,y,z)=0,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est l'intersection des deux surfaces $g(x,y,z)=0$ et $h(x,y,z)=0$. Sup-

posons que[a] $\boldsymbol{\nabla} g \times \boldsymbol{\nabla} h \neq \mathbf{0}$ *sur* $\mathcal{C}$. *Si* f *restreinte à* $\mathcal{C}$ *admet une valeur extrémale au point* $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ *de* $\mathcal{C}$, *alors il existe deux nombres réels* λ *et* μ *tels que*

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) = \lambda \boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0) + \mu \boldsymbol{\nabla} h(\mathbf{r}_0),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{r}_0) &= \lambda\, g_x(\mathbf{r}_0) + \mu\, h_x(\mathbf{r}_0), \\ f_y(\mathbf{r}_0) &= \lambda\, g_y(\mathbf{r}_0) + \mu\, h_y(\mathbf{r}_0), \\ f_z(\mathbf{r}_0) &= \lambda\, g_z(\mathbf{r}_0) + \mu\, h_z(\mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

On peut, bien entendu, formuler ce théorème avec une fonction auxiliaire, comme avant :

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda\, g(x, y, z) - \mu\, h(x, y, z).$$

Il s'agit d'une fonction de cinq variables : les trois variables originales, x, y et z, et les deux variables auxiliaires, λ et μ.

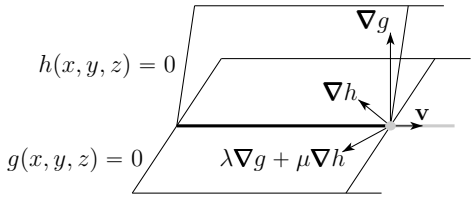
Formule 2.9.13 Multiplicateurs de Lagrange avec deux contraintes.

Sous les hypothèses du théorème 2.9.12, soit $L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda\, g(x, y, z) - \mu\, h(x, y, z)$. *Si* f *restreinte à la courbe* $\mathcal{C}$ *admet une valeur extrémale au point* $\mathbf{r}_0$, *alors il existe deux nombres réels* λ *et* μ *tels que*

$$\begin{aligned} 0 = L_x(x_0, y_0, z_0, \lambda, \mu) &= f_x(\mathbf{r}_0) - \lambda g_x(\mathbf{r}_0) - \mu h_x(\mathbf{r}_0), \\ 0 = L_y(x_0, y_0, z_0, \lambda, \mu) &= f_y(\mathbf{r}_0) - \lambda g_y(\mathbf{r}_0) - \mu h_y(\mathbf{r}_0), \\ 0 = L_z(x_0, y_0, z_0, \lambda, \mu) &= f_z(\mathbf{r}_0) - \lambda g_z(\mathbf{r}_0) - \mu h_z(\mathbf{r}_0), \\ 0 = L_\lambda(x_0, y_0, z_0, \lambda, \mu) &= g(\mathbf{r}_0), \\ 0 = L_\mu(x_0, y_0, z_0, \lambda, \mu) &= h(\mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

Ainsi, résoudre ce système de cinq équations donne les points candidats pour les extremums locaux. Nous verrons un exemple sous peu.

Preuve du théorème 2.9.12. Avant de voir un exemple, justifions la validité de cette approche. Supposons donc que le minimum est atteint à $\mathbf{r}_0$, le point gris dans la figure ci-contre. Comme précédemment, imaginons que nous commençons à nous déplacer en partant de $\mathbf{r}_0$ le long de la courbe $g = h = 0$. La trajectoire est la droite grise de la figure.



Soit $\mathbf{v}$ le vecteur vitesse lors du passage à $\mathbf{r}_0$, il est donc tangent à la courbe $g = h = 0$. Comme f admet un minimum local en $\mathbf{r}_0$, f doit être croissante en quittant $\mathbf{r}_0$, de sorte que la dérivée directionnelle dans la direction de notre mouvement est positive :

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}_0) = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v} \geqslant 0.$$

Recommençons, mais, cette fois, en allant dans la direction opposée avec le vecteur vitesse $-\mathbf{v}$. De nouveau, f doit être croissante lorsque l'on quitte $\mathbf{r}_0$, de sorte que la dérivée directionnelle est positive :

$$D_{-\mathbf{v}} f(\mathbf{r}_0) = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0) \cdot (-\mathbf{v}) \geqslant 0.$$

[a] Ceci revient à dire que les deux vecteurs normaux aux surfaces $g = 0$ et $h = 0$ au point (x, y, z) ne sont pas parallèles. Ceci assure que les deux surfaces ne sont pas tangentes en (x, y, z), de sorte qu'elles se coupent en formant une courbe.

Comme $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{v}$ et $-\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{v}$ sont positifs ou nuls, nous devons avoir

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{v}=0, \qquad (*)$$

et ceci tient pour tout vecteur $\mathbf{v}$ qui est tangent à la courbe $g=h=0$ en $\mathbf{r}_0$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des vecteurs $\mathbf{v}$ qui sont tangents à la courbe $g=h=0$ en $\mathbf{r}_0$ et soit $\mathcal{T}^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à ces vecteurs tangents. Ainsi, $(*)$ dit que $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$ doit faire partie de $\mathcal{T}^\perp$.

Nous allons maintenant trouver les vecteurs de $\mathcal{T}^\perp$. Nous pouvons facilement deviner deux de ces vecteurs, à savoir $\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0)$ et $\boldsymbol{\nabla} h(\mathbf{r}_0)$. Tout vecteur qui est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs sera également orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{T}$.

Par ailleurs, les vecteurs de $\mathcal{T}$ forment en fait une droite (la tangente à $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}_0$). Ainsi, $\mathcal{T}^\perp$, l'ensemble orthogonal à $\mathcal{T}$, est un plan. Lorsque λ et μ parcourent les réels, les vecteurs $\lambda\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0)+\mu\boldsymbol{\nabla} h(\mathbf{r}_0)$ décrivent un plan. Ainsi, nous pouvons conclure que tout vecteur de $\mathcal{T}^\perp$, et en particulier $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)$, doit s'écrire sous la forme $\lambda\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0)+\mu\boldsymbol{\nabla} h(\mathbf{r}_0)$.

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}_0)=\lambda\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{r}_0)+\mu\boldsymbol{\nabla} h(\mathbf{r}_0)$$

■

Exemple 2.9.14

Soit $\mathcal{C}$ la courbe intersection des surfaces d'équations $z^2=x^2+y^2$ et $x-2z=3$. Trouver la distance (la plus courte) de l'origine à $\mathcal{C}$.

Solution. De nouveau, nous simplifions les calculs en considérant le carré de la distance comme fonction objectif

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

avec les contraintes

$$0=g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2, \qquad 0=h(x,y,z)=x-2z-3.$$

Puisque

$$\begin{aligned} f_x&=2x, & f_y&=2y, & f_z&=2z,\\ g_x&=2x, & g_y&=2y, & g_z&=-2z,\\ h_x&=1, & h_y&=0, & h_z&=-2, \end{aligned}$$

la méthode des multiplicateurs de Lagrange nous impose de trouver les solutions de

$$\begin{aligned} 2x&=\lambda(2x)+\mu(1), && && \text{(E1)}\\ 2y&=\lambda(2y)+\mu(0) && \iff && (1-\lambda)y=0, && \text{(E2)}\\ 2z&=\lambda(-2z)+\mu(-2), && && \text{(E3)}\\ z^2&=x^2+y^2, && && \text{(E4)}\\ x-2z&=3. && && \text{(E5)} \end{aligned}$$

Puisque l'équation (E2) se factorise, nous commençons par le faire. Nous devons donc avoir $y=0$ ou $\lambda=1$.

Cas $\lambda=1$: Lorsque $\lambda=1$, les autres équations se réduisent à

$$\begin{aligned} 0&=\mu, && \text{(E1)}\\ 0&=4z+2\mu, && \text{(E3)}\\ z^2&=x^2+y^2, && \text{(E4)}\\ x-2z&=3, && \text{(E5)} \end{aligned}$$

donc

- l'équation (E1) donne $\mu = 0$;
- Puis, en remplaçant $\mu = 0$ dans (E3), on obtient $z = 0$;
- Puis, remplacer $z = 0$ dans (E5) donne $x = 3$;
- Finalement, remplacer $z = 0$ et $x = 3$ dans (E4) donne $0 = 9 + y^2$, ce qui est absurde.

Ainsi, il est impossible d'avoir $\lambda = 1$.

Cas $y = 0$: Lorsque $y = 0$, les autres équations se réduisent à

$$\begin{aligned} 2(1-\lambda)x &= \mu, && \text{(E1)}\\ (1+\lambda)z &= -\mu, && \text{(E3)}\\ z^2 &= x^2, && \text{(E4)}\\ x - 2z &= 3. && \text{(E5)} \end{aligned}$$

Les simplifications ne sont pas aussi faciles qu'au cas $\lambda = 1$. Cependant, au moins, l'équation (E4) donne $z = \pm x$. Nous devons donc considérer ces deux possibilités.

Sous-cas $y = 0$, $z = x$: Lorsque $y = 0$ et $z = x$, les équations deviennent

$$\begin{aligned} 2(1-\lambda)x &= \mu, && \text{(E1)}\\ (1+\lambda)x &= -\mu, && \text{(E3)}\\ -x &= 3. && \text{(E5)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (E5) nous dit que $x = -3$, et donc $(x, y, z) = (-3, 0, -3)$. Nous ne nous soucions pas des valeurs de λ et μ, mais puisque $-6(1-\lambda) = \mu$ et $-3(1+\lambda) = -\mu$, nous obtenons

$$-9 + 3\lambda = 0 \implies \lambda = 3,$$

puis, après substitution, $\mu = 12$.

Sous-cas $y = 0$, $z = -x$: Lorsque $y = 0$ et $z = -x$, les équations deviennent

$$\begin{aligned} 2(1-\lambda)x &= \mu, && \text{(E1)}\\ (1+\lambda)x &= \mu, && \text{(E3)}\\ 3x &= 3. && \text{(E5)} \end{aligned}$$

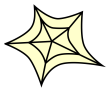
Ainsi, l'équation (E5) donne $x = 1$, de sorte que $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. De nouveau, même si elles ne sont pas nécessaires, on calcule les valeurs de λ et μ. Comme $2(1-\lambda) = \mu$ et $(1+\lambda) = \mu$, on soustrait la seconde équation de la première pour obtenir

$$1 - 3\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{3},$$

ce qui à son tour donne $\mu = \frac{4}{3}$.

Conclusion : Nous avons deux candidats pour les points de maximum et de minimum local, à savoir $(-3, 0, -3)$ et $(1, 0, -1)$. Le premier se trouve à distance $3\sqrt{2}$ de l'origine, ce qui donne le maximum ; le second se trouve à distance $\sqrt{2}$, ce qui donne le minimum. En particulier, la distance est $\sqrt{2}$.

À vous de jouer 2.9.15



Trouvez les valeurs maximale et minimale de la fonction $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ sous les contraintes $x^2 + 2z^2 = 324$ et $x + y - z = 1$.

La valeur maximale est _____, atteinte en (_____, _____, _____).

La valeur minimale est _____, atteinte en (_____, _____, _____).

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Utilisez la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les valeurs maximales et minimales des fonctions suivantes, sous les contraintes données :

(a) $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ sous la contrainte $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.

(b) $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $4x^2 + 8y^2 = 16$.

(c) $f(x, y) = 4x^3 + y^2$ sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 1$.

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.

(e) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $(x - 1)^2 + 4y^2 = 4$.

(f) $f(x, y) = 4xy$, avec $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ comme contrainte.

(g) $f(x, y, z) = x + 3y - z$, avec la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(h) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, avec la contrainte $xyz = 4$.

(i) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur l'hyperbole définie par la contrainte $xy = 1$.

(j) $f(x, y, z) = yz + xy$, avec les contraintes $xy = 1$ et $z^2 + z^2 = 1$.

(k) $f(x, y, z) = x + y + z$, avec les contraintes $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

2.

(a) Est-ce que la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ admet un maximum ou un minimum sur la courbe $xy = 1$? Expliquez.

(b) Trouvez tous les maximums et minimums de $f(x, y)$ sur la courbe $xy = 1$.

3. Trouvez les valeurs maximales et minimales de la fonction $f(x, y, z) = x + y - z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. Utilisez la méthode des Multiplicateurs de Lagrange pour trouver la valeur minimale de $z = x^2 + y^2$ sujet à $x^2y = 1$. À quel(s) point(s) se trouve(nt) le(s) minimum(s)?

5. Utilisez la méthode des Multiplicateurs de Lagrange pour trouver les valeurs maximale et minimale de $f(x, y) = xy$ sujet à la contrainte $x^2 + 2y^2 = 1$.

Pour mieux comprendre.

6. Utilisez les Multiplicateurs de Lagrange pour trouver les valeurs maximale et minimale de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{20}z^2$ sur la courbe d'intersection du plan $x + 2y + z = 10$ et du paraboloïde $x^2 + y^2 - z = 0$.

7.

(a) Utilisez les Multiplicateurs de Lagrange pour trouver les valeurs extrêmes de

$$f(x, y, z) = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2$$

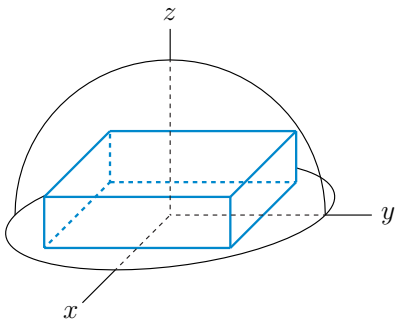
sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

(b) Trouvez le point sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ qui est le plus loin du point $(2, -2, 4)$.

8. Une boîte fermée rectangulaire avec un volume de 96 mètres cubes est construite avec deux matériaux. Le matériel pour le dessus coûte deux fois plus par mètre carré que le matériel utilisé pour les côtés et le dessous. Utilisez la méthode des Multiplicateurs de Lagrange pour trouver les dimensions de la boîte la moins chère.

9.

Trouvez les dimensions de la boîte ayant un volume maximal dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées et qui est contenue dans la région $0 \leqslant z \leqslant 48 - 4x^2 - 3y^2$.



10. Utilisez les Multiplicateurs de Lagrange pour trouver la distance minimale de l'origine à tous les points de l'intersection des surfaces

$$g(x, y, z) = x - z - 4 = 0 \qquad \text{et} \qquad h(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$$

11. La température dans le plan est donnée par $T(x, y) = e^y \left(x^2 + y^2\right)$.

(a) i Donnez le système d'équations qui doit être résolu afin de trouver le point où la température est la plus élevée et où elle est la plus faible sur le cercle $x^2 + y^2 = 100$ par la méthode des Multiplicateurs de Lagrange.

ii Trouvez les points le plus chaud et le plus froid sur le cercle en résolvant ce système.

(b) i Donnez le système d'équations qui doit être résolu afin de trouver les points critiques de $T(x, y)$.

ii Trouvez les points critiques en résolvant ce système.

(c) Trouvez le point le plus froid sur le disque solide $x^2 + y^2 \leqslant 100$.

12. Déterminez la distance du plan $x + 2y + 2z = 3$ à l'origine

(a) à l'aide d'un argument géométrique ;

(b) en ramenant le problème à un problème d'optimisation à deux variables ;

(c) à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Pour aller plus loin.

13. Soit $f(x,y)$ ayant des dérivées partielles continues. Considérez le problème de trouver un minimum et maximum local de $f(x,y)$ sur la courbe $xy=1$.

- Définissez $g(x,y)=xy-1$. D'après la méthode des Multiplicateurs de Lagrange, si (x,y) est un minimum ou maximum local de $f(x,y)$ sur la courbe $xy=1$, alors il existe un nombre réel λ tel que

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y)=\lambda \boldsymbol{\nabla} g(x,y), \quad g(x,y)=0. \tag{E1}$$

- Sur la courbe $xy=1$, on a $y=\frac{1}{x}$ et $f(x,y)=f\left(x,\frac{1}{x}\right)$. Définissez $F(x)=f\left(x,\frac{1}{x}\right)$. Si $x\neq 0$ est un minimum ou maximum local de $F(x)$, on a que

$$F'(x)=0. \tag{E2}$$

Montrez que (E1) est équivalent à (E2), dans le sens que

il existe λ tel que (x,y,λ) vérifie (E1)

si et seulement si

$x\neq 0$ vérifie (E2) et $y=\dfrac{1}{x}$.

Chapitre 3

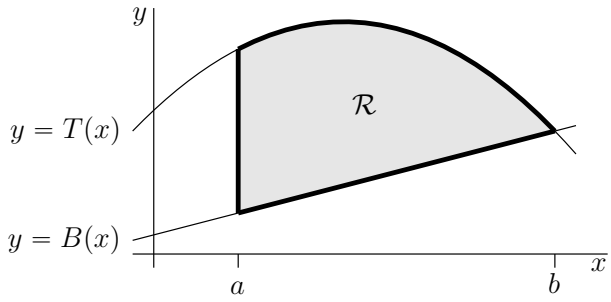
Intégrales multiples

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux intégrales des fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Nous commençons par définir les intégrales doubles, en coordonnées rectangulaires, puis en coordonnées polaires, puis nous donnons plusieurs exemples d'applications. Par la suite, ce sont les intégrales triples qui sont considérées, avec les coordonnées cylindriques et sphériques. Finalement, nous étudions la formule de changement de variables pour les intégrales multiples.

3.1 Intégrales doubles

Tranches verticales

Supposons que nous voulons calculer la masse d'une plaque d'épaisseur constante et très mince qui remplit la région $\mathcal{R}$ dans le plan Oxy. Supposons de plus que la densité de la plaque, disons en kilogrammes par mètre carré, dépend de la position. Appelons cette densité $f(x, y)$.

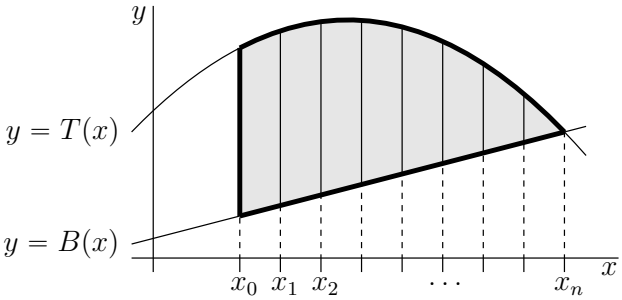


Pour simplifier, nous supposerons que $\mathcal{R}$ est la région entre la courbe inférieure $y = B(x)$ et la courbe supérieure $y = T(x)$, avec x allant de a à b, c'est-à-dire :

$$\mathcal{R} = \left\{ \ (x, y) \ \middle| \ a \leqslant x \leqslant b, \ B(x) \leqslant y \leqslant T(x) \ \right\}.$$

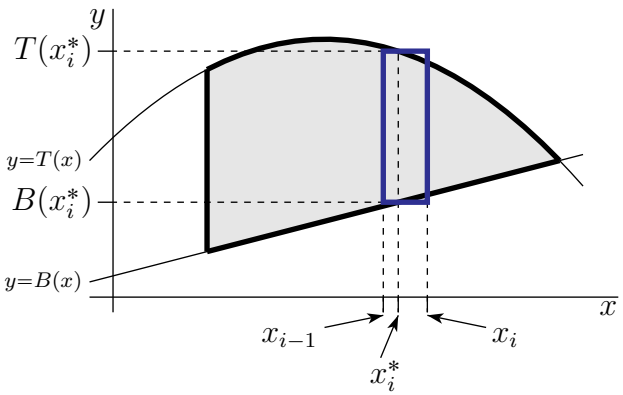
Nous allons exprimer la masse comme une intégrale double. À titre d'échauffement, rappelons la procédure afin de calculer l'aire de la région $\mathcal{R}$.

- Choisissons un nombre naturel n (que nous ferons tendre vers l'infini).
- Divisons ensuite $\mathcal{R}$ en n tranches verticales minces, chacune de largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Posons $x_i = a + i\,\Delta x$, l'abscisse de l'extrémité droite de la tranche i.



-

Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, la $i^{\text{ième}}$ tranche s'étend de $x = x_{i-1}$ à $x = x_i$. Nous approximons son aire par celle d'un rectangle. Nous choisissons un nombre x_i^* entre x_{i-1} et x_i, et nous approchons la tranche par un rectangle dont l'extrémité supérieure se trouve à $y = T(x_i^*)$ et dont l'extrémité inférieure se trouve à $y = B(x_i^*)$.



Le rectangle$_i^*$ est illustré en bleu dans la figure ci-contre.

- Ainsi, l'aire de la $i^{\text{ième}}$ tranche est approximativement $\big[T(x_i^*) - B(x_i^*)\big]\Delta x$.
- Nous obtenons de cette façon une approximation de l'aire totale de la région $\mathcal{R}$ par une somme de Riemann :

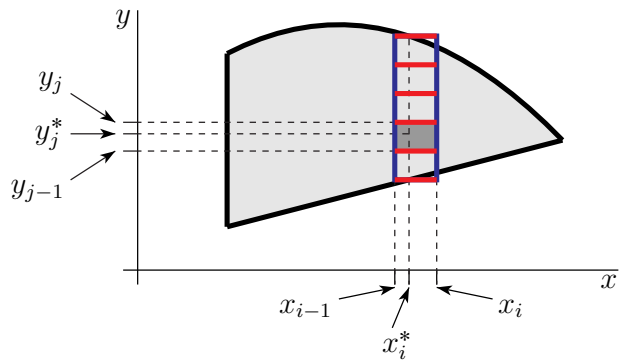
$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^{n} \big[T(x_i^*) - B(x_i^*)\big]\Delta x.$$

- En évaluant la limite lorsque $n \to \infty$ (de sorte que la largeur des rectangles tendent vers zéro), nous obtenons une intégrale définie, et la valeur exacte de l'aire de la région $\mathcal{R}$ est :

$$\text{Aire} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big[T(x_i^*) - B(x_i^*)\big]\Delta x = \int_a^b \big[T(x) - B(x)\big]\,dx.$$

Nous pouvons étendre cette procédure pour trouver la masse de notre plaque plutôt que son aire. Nous devons simplement remplacer notre approximation $\big[T(x_i^*) - B(x_i^*)\big]\Delta x$ de l'aire de la $i^{\text{ième}}$ tranche par une approximation de sa masse. Pour cela,

- nous choisissons un nombre naturel m (que nous ferons tendre vers l'infini), puis
- nous divisons la $i^{\text{ième}}$ tranche en m petits rectangles, chacun de largeur Δx et de hauteur $\Delta y = \frac{1}{m}\big[T(x_i^*) - B(x_i^*)\big]$. Posons $y_j = B(x_i^*) + j\,\Delta y$, l'ordonnée de l'extrémité supérieure du $j^{\text{ième}}$ rectangle.



- À ce moment, nous pouvons approcher la densité à l'intérieur de chaque rectangle par une constante (en supposant que la fonction de densité est continue, la densité ne varie pas trop brusquement sur un des petits rectangles). Pour chaque $j = 1, 2, \ldots, m$, le $j^{\text{ième}}$ rectangle s'étend de $y = y_{j-1}$ à $y = y_j$. Nous choisissons au hasard un nombre y_j^* entre y_{j-1} et y_j, puis nous approximons la densité pour ce $j^{\text{ième}}$ rectangle de la $i^{\text{ième}}$ tranche par la constante $f\left(x_i^*, y_j^*\right)$.
- Ainsi, la masse du $j^{\text{ième}}$ rectangle dans la $i^{\text{ième}}$ tranche est approximativement donnée par $f\left(x_i^*, y_j^*\right)\,\Delta x\,\Delta y$.

- De cette façon, la somme de Riemann ci-après fournit une approximation de la masse de la $i^{\text{ième}}$ tranche.

$$\text{Masse } i^{\text{ième}}\text{tranche} \approx \sum_{j=1}^{m} f\left(x_i^*, y_j^*\right)\, \Delta x\, \Delta y$$

  Il faut noter que les nombres y_j^* dépendent de i et de m.

- En évaluant la limite lorsque $m \to \infty$ (de sorte que la hauteur des rectangles tendent vers zéro), nous transformons la somme de Riemann en une intégrale définie :

$$\text{Masse } i^{\text{ième}} \text{ tranche} \approx \Delta x \int_{B(x_i^*)}^{T(x_i^*)} f\left(x_i^*, y\right)\, dy = F(x_i^*)\, \Delta x,$$

  où

$$F(x) = \int_{B(x)}^{T(x)} f\left(x, y\right)\, dy.$$

  Remarquons que, bien que nous ayons débuté avec une fonction de densité $f(x, y)$ de deux variables, x et y, en évaluant cette intégrale définie par rapport à la variable y, nous obtenons comme résultat $F(x)$, une fonction de x seulement.

- Finalement, en évaluant la limite lorsque $n \to \infty$ (de sorte que la largeur des tranches tendent vers zéro), nous obtenons

$$\text{Masse} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \int_{B(x_i^*)}^{T(x_i^*)} f\left(x_i^*, y\right)\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\, \Delta x.$$

  Nous sommes de retour au contexte familier des fonctions d'une variable. La somme de Riemann $\sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\, \Delta x$ est une approximation de l'intégrale $\int_a^b F(x)\, dx$. Ainsi,

$$\text{Masse} = \int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_{B(x)}^{T(x)} f\left(x, y\right)\, dy \right] dx.$$

Cette expression est notre première intégrale double. Il existe d'autres notations courantes pour cette intégrale.

Définition 3.1.1

Soit $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b,\ B(x) \leqslant y \leqslant T(x) \right\}$, où $B(x)$ et $T(x)$ sont des fonctions continues, et soit f une fonction continue sur $\mathcal{R}$. On note

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f\left(x, y\right)\, dx\, dy &= \int_a^b \left[\int_{B(x)}^{T(x)} f\left(x, y\right)\, dy \right] dx \\ &= \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f\left(x, y\right)\, dy\, dx = \int_a^b dx \int_{B(x)}^{T(x)} dy\, f\left(x, y\right) \end{aligned}$$

Les trois dernières intégrales sont dites des intégrales itérées, pour des raisons évidentes.

Notons que :

- Pour évaluer l'intégrale

$$\int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f\left(x, y\right)\, dy\, dx,$$

- nous évaluons d'abord l'intégrale à l'intérieur $\int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\,dy$ en intégrant $f(x,y)$ par rapport à y de $y = B(x)$ à $y = T(x)$ et en traitant x comme une constante. Nous intégrons en utilisant les techniques d'intégration à une variable vues en calcul intégral. Le résultat de cette intégrale est une fonction de x seulement, nommons-la $F(x)$.
- Nous évaluons ensuite l'intégrale extérieure $\int_a^b F(x)\,dx$, dont l'intégrande est la réponse à l'intégrale intérieure. Encore une fois, cette intégrale est évaluée en utilisant les techniques d'intégration à une variable, donc en intégrant $F(x)$ par rapport à x de $x = a$ à $x = b$.

Nous utiliserons cette notation.

- Pour évaluer l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_{B(x)}^{T(x)} dy\, f(x,y)\,,$$

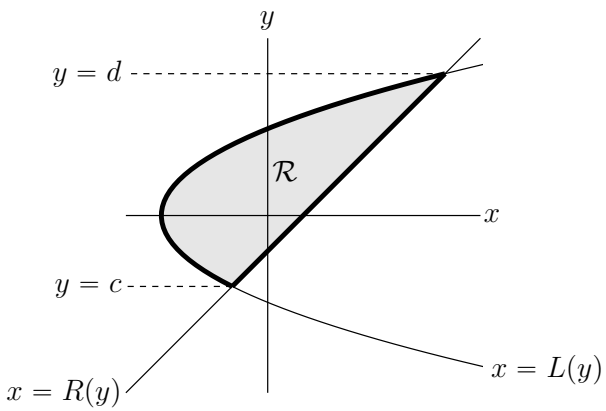
- nous évaluons d'abord l'intégrale à l'intérieur $\int_{B(x)}^{T(x)} dy\, f(x,y)$ en intégrant $f(x,y)$ par rapport à y de $B(x)$ à $T(x)$.
- Puis, nous évaluons l'intégrale extérieure $\int_a^b F(x)\,dx$, pour laquelle l'intégrande est le résultat de l'intégrale intérieure et dont les bornes d'intégration vont de $x = a$ à $x = b$.

Cette façon d'écrire est aussi courante, elle met l'accent sur le point de vue qui considère l'intégration comme un opérateur.

À ce stade-ci, nous pouvons nous demander si nous devons toujours utiliser des tranches verticales ou si nous devons toujours intégrer par rapport à y en premier. La réponse à ces deux questions est « non ». Cela nous amène dès lors à considérer les tranches horizontales.

Tranches horizontales

Nous avons constaté, lors du calcul d'aire de régions dans le plan Oxy, qu'il est souvent plus avantageux d'utiliser des tranches horizontales que des tranches verticales. Il en va de même lors de la mise en place d'intégrales doubles. Nous répétons donc la procédure de la section précédente, mais en commençant par des tranches horizontales plutôt que verticales.

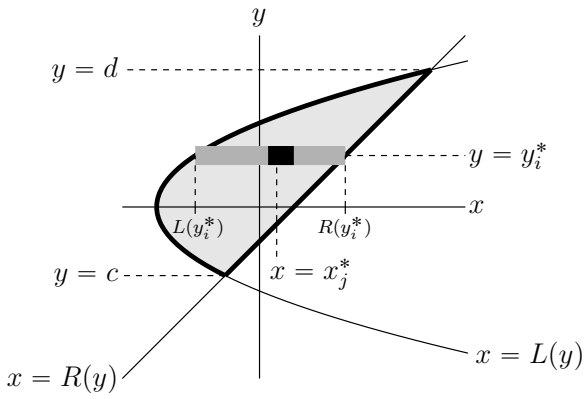


Cette procédure sera utile avec des régions de la forme

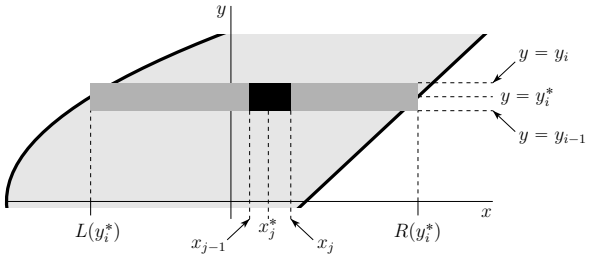
$$\mathcal{R} = \{\ (x,y)\ \big|\ c \leqslant y \leqslant d,\ L(y) \leqslant x \leqslant R(y)\ \}.$$

Ici, dans la région $\mathcal{R}$, $L(y)$ (L pour « left ») est la plus petite valeur de x lorsque l'ordonnée est y. $R(y)$ (R pour « right ») est la plus grande valeur de x lorsque l'ordonnée est y. Supposons que nous souhaitons évaluer la masse d'une plaque qui remplit la région $\mathcal{R}$ et que la densité de la plaque est $f(x,y)$. Nous suivons essentiellement la même procédure que celle que nous avons utilisée avec les coupes verticales, mais en interchangeant les rôles de x et y.

- Choisissons un nombre naturel n (que nous ferons tendre vers l'infini), puis
- divisons l'intervalle $c \leqslant y \leqslant d$ en n petits sous-intervalles, chacun de largeur $\Delta y = \frac{d-c}{n}$. Chaque sous-intervalle définit une mince tranche horizontale de la région (voir la figure ci-dessous).
- Nous nous approchons de la $i^{\text{ième}}$ tranche par un mince rectangle horizontal (le rectangle gris foncé dans la figure ci-dessous). Sur cette tranche, l'ordonnée varie dans un très petit intervalle. Nous choisissons un nombre y_i^* dans cet intervalle. Nous nous approchons donc de la $i^{\text{ième}}$ tranche par un rectangle dont l'extrémité gauche est à $x = L(y_i^*)$ et dont l'extrémité droite est à $x = R(y_i^*)$.
- Si nous voulions calculer l'aire de la région $\mathcal{R}$, il faudrait approximer l'aire de la $i^{\text{ième}}$ tranche par $\big[R(y_i^*) - L(y_i^*)\big]\Delta y$, soit l'aire du rectangle de largeur $\big[R(y_i^*) - L(y_i^*)\big]$ et de hauteur Δy.
- Pour calculer la masse, similairement à ce que nous avons fait auparavant,
  - choisissons un autre nombre naturel m (que nous ferons tendre vers l'infini), puis
  - divisons la $i^{\text{ième}}$ tranche en m petits rectangles dont chacun a une hauteur de Δy et une largeur de $\Delta x = \frac{1}{m}\big[R(y_i^*) - L(y_i^*)\big]$.
  - Pour chaque $j = 1, 2, \ldots, m$, l'abscisse du $j^{\text{ième}}$ rectangle varie dans un petit intervalle. Choisissons un nombre x_j^* dans cet intervalle (voir le petit rectangle noir de la figure ci-contre).



Voici une vue agrandie de la $i^{\text{ième}}$ tranche.



  - Sur le $j^{\text{ième}}$ rectangle de la $i^{\text{ième}}$ tranche, nous approximons la densité par $f\left(x_j^*, y_i^*\right)$. Par conséquent, sa masse est approximativement donnée par $f\left(x_j^*, y_i^*\right)\, \Delta x\, \Delta y$.
  - Ainsi, l'approximation de la masse de la $i^{\text{ième}}$ tranche horizontale au moyen de la somme de Riemann est

$$\text{Masse } i^{\text{ième}} \text{ tranche} \approx \sum_{j=1}^{m} f\left(x_j^*, y_i^*\right)\, \Delta x\, \Delta y.$$

  - En évaluant la limite lorsque $m \to \infty$ (de sorte que les largeurs des rectangles tendent vers zéro), nous transformons la somme de Riemann en une intégrale définie :

$$\text{Masse } i^{\text{ième}} \text{ tranche} \approx \Delta y \int_{L(y_i^*)}^{R(y_i^*)} f\left(x, y_i^*\right)\, dx = F(y_i^*)\, \Delta y,$$

où

$$F(y) = \int_{L(y)}^{R(y)} f\,(x,y)\; dx.$$

Remarquons que l'intégration par rapport à la variable x élimine celle-ci : $F(y)$ est une fonction de y seulement.

- Finalement, en évaluant la limite lorsque $n \to \infty$ (de sorte que la largeur de la tranche tendent vers zéro), nous obtenons

$$\text{Masse} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta y \int_{L(y_i^*)}^{R(y_i^*)} f\,(x,y_i^*)\; dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(y_i^*)\,\Delta y.$$

Or, la somme de Riemann $\sum_{i=1}^{n} F(y_i^*)\,\Delta y$ est une approximation de l'intégrale $\int_c^d F(y)\,dy$. Ainsi,

$$\text{Masse} = \int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_{L(y)}^{R(y)} f\,(x,y)\; dx \right] dy.$$

Les notations standards de la définition 3.1.1 s'appliquent aussi à cette intégrale.

Définition 3.1.2

Soit $\mathcal{R} = \left\{ \; (x,y) \;\middle|\; c \leqslant y \leqslant d,\; L(y) \leqslant x \leqslant R(y) \; \right\}$, où $L(y)$ et $R(y)$ sont des fonctions continues, et soit f une fonction continue sur $\mathcal{R}$. On note

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f\,(x,y)\; dx\,dy &= \int_c^d \left[\int_{L(y)}^{R(y)} f\,(x,y)\; dx \right] dy \\ &= \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f\,(x,y)\; dx\,dy. \end{aligned}$$

Notons que :

- Pour évaluer l'intégrale

$$\int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f\,(x,y)\; dx\,dy,$$

  - nous évaluons d'abord l'intégrale à l'intérieur $\int_{L(y)}^{R(y)} f\,(x,y)\; dx$ en intégrant $f(x,y)$ par rapport à x de $x = L(y)$ à $x = R(y)$. Le résultat de cette intégrale est une fonction de y seulement. Nommons-la $F(y)$.
  - puis nous évaluons l'intégrale extérieure $\int_c^d F(y)\,dy$, dont l'intégrande est le résultat de l'intégrale intérieure.

- Il peut arriver que l'écriture suivante soit utilisée dans certains textes

$$\int_c^d dy \int_{L(y)}^{R(y)} dx\, f\,(x,y)\,,$$

mais nous ne le ferons pas, autant que possible.

- Pour ce calcul, nous évaluons en premier l'intégrale $\int_{L(y)}^{R(y)} dx\, f(x,y)$ en utilisant les bornes d'intégration qui se trouvent à la gauche de dx. « dx » est écrit directement à côté de $\int_{L(y)}^{R(y)}$ pour mettre en évidence que les bornes d'intégration $L(y)$ et $R(y)$ sont pour l'intégrale par rapport à x. Cette intégrale définie est habituellement écrite $\int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx$. Le résultat de l'intégrale intérieure est de nouveau une fonction de y seulement, que nous nommons $F(y)$.
- Puis, nous évaluons l'intégrale à l'extérieur $\int_c^d dy\, F(y)$, dont l'intégrande est le résultat de l'intégrale intérieure et dont les bornes d'intégration sont à la gauche de dy.

En résumé, nous avons maintenant deux intégrales qui calculent la masse de la même plaque dans le plan Oxy.

Théorème 3.1.3

Soit $\mathcal{R}$ une région dans le plan Oxy et soit $f(x,y)$ une fonction continue sur $\mathcal{R}$.

(a) Si $\mathcal{R} = \{\ (x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ B(x) \leqslant y \leqslant T(x)\ \}$, où $B(x)$ et $T(x)$ sont des fonctions continues, et si la densité de masse dans $\mathcal{R}$ est donnée par $f(x,y)$, alors la masse de $\mathcal{R}$ est

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\ dy\right] dx &= \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\ dy\, dx \\ &= \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\ dy\, dx.\end{aligned}$$

(b) Si $\mathcal{R} = \{\ (x,y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ L(y) \leqslant x \leqslant R(y)\ \}$, où $L(y)$ et $R(y)$ sont des fonctions continues, et si la densité de masse dans $\mathcal{R}$ est donnée par $f(x,y)$, alors la masse de $\mathcal{R}$ est

$$\begin{aligned}\int_c^d \left[\int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx\right] dy &= \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx\, dy \\ &= \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Nous avons, implicitement, dans le théorème 3.1.3, que si

$$\begin{aligned}&\{\ (x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ B(x) \leqslant y \leqslant T(x)\ \} \\ =&\{\ (x,y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ L(y) \leqslant x \leqslant R(y)\ \}\end{aligned}$$

et que si $f(x,y)$ est continue, alors

$$\int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\ dy\, dx = \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx\, dy.$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Fubini[1]. Il sera abordé en détail plus loin.

[1] En l'honneur du mathématicien italien Guido Fubini (1879-1943).

Définition 3.1.4

Les intégrales du théorème 3.1.3 sont notées

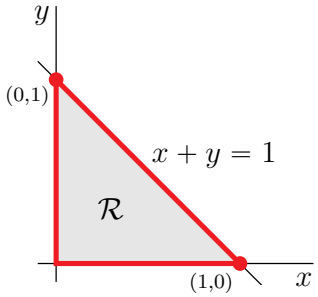
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy \text{ ou } \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dydx \text{ ou } \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA.$$

Le symbole dA représente l'aire d'une partie infinitésimale de $\mathcal{R}$.

Voyons un exemple simple. Nous en verrons des plus complexes dans une section ultérieure.

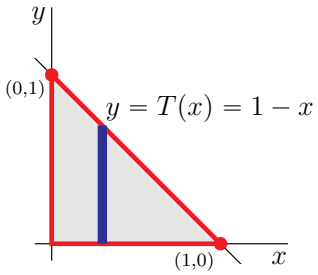
Exemple 3.1.5

Soit $\mathcal{R}$ la région triangulaire située au-dessus de l'axe des x, à droite de l'axe des y et à gauche de la droite $x+y=1$. Trouver la masse de $\mathcal{R}$ si la densité est donnée par $f(x,y)=y$.



Solution. Nous ferons ce calcul de deux façons : avec les tranches verticales, ensuite avec les tranches horizontales.

Solution avec des tranches verticales. Nous allons écrire une intégrale double pour calculer la masse en utilisant des rectangles verticaux. Remarquons, dans la figure ci-contre,



- que les points le plus à gauche dans $\mathcal{R}$ ont comme abscisse $x=0$ et que le point le plus à droite de $\mathcal{R}$ a $x=1$.
- De plus, si nous choisissons un x fixe entre 0 et 1, le point (x,y) de $\mathcal{R}$ avec la plus petite valeur de y a $y=0$, et celui avec la plus grande valeur de y a $y=1-x$.

Ainsi,

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 = a \leqslant x \leqslant b = 1,\ 0 = B(x) \leqslant y \leqslant T(x) = 1-x \right\}$$

et, en vertu de la partie (a) du théorème 3.1.3,

$$\text{Masse} = \int_a^b \left[\int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} y\,dy \right] dx.$$

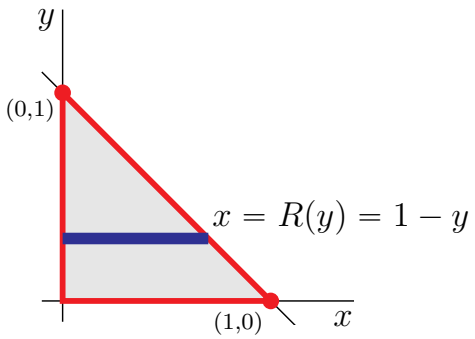
On a que l'intégrale intérieure est

$$\int_0^{1-x} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} = \frac{1}{2}(1-x)^2,$$

de sorte que la masse vaut

$$\text{Masse} = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Solution avec des tranches horizontales. Faisons maintenant le calcul dans l'autre ordre d'intégration, soit en utilisant des rectangles horizontaux. De nouveau, commençons par une esquisse.



On remarque, dans la figure ci-dessus, que

- les points les plus bas dans $\mathcal{R}$ ont comme ordonnée $y = 0$ et que le point le plus haut a $y = 1$.
- De plus, pour chaque valeur de y fixe entre 0 et 1, le point (x, y) de $\mathcal{R}$ avec la valeur la plus petite de x a $x = 0$, et celui avec la valeur la plus grande de x a $x = 1 - y$.

Ainsi,

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 = c \leqslant y \leqslant d = 1,\ 0 = L(y) \leqslant x \leqslant R(y) = 1 - y \right\}$$

et, en vertu de la partie (b) du théorème 3.1.3,

$$\text{Masse} = \int_c^d \left[\int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-y} y\, dx \right] dy.$$

On a que l'intégrale intérieure est

$$\int_0^{1-y} y\ dx = [xy]_0^{1-y} = y - y^2$$

puisque l'intégration par rapport à y considère x comme une constante. Par conséquent,

$$\text{Masse} = \int_0^1 \left[y - y^2 \right] dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Les intégrales doubles vérifient les mêmes propriétés de base que les intégrales simples, telles qu'énumérées dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.6 Propriétés des intégrales doubles.

Soit A, B, C des nombres réels. Sous les hypothèses du théorème 3.1.3,

$$\iint_{\mathcal{R}} (f(x,y) + g(x,y))\ dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA + \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA, \tag{a}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} (f(x,y) - g(x,y))\ dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA - \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA, \tag{b}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} C f(x,y)\, dA = C \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA. \tag{c}$$

Il en résulte que

$$\iint_{\mathcal{R}} (Af(x,y) + Bg(x,y))\, dA = A \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA + B \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA. \tag{d}$$

Cette dernière propriété démontre la linéarité des intégrales.

$$\iint_{\mathcal{R}} dA = Aire(\mathcal{R}) \tag{e}$$

Si une région $\mathcal{R}$ dans le plan Oxy est l'union de deux régions $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ qui ne se coupent pas (sauf peut-être en leurs frontières), alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x,y)\, dA + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x,y)\, dA. \tag{f}$$



Dans le cas particulier (mais pas si inhabituel) où $\mathcal{R}$ est un rectangle

$$\mathcal{R} = \{\ (x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\ \}$$

et où l'intégrande est un produit $f(x,y) = g(x)h(y)$,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA &= \int_a^b \int_c^d g(x)h(y)\, dydx \\
&= \int_a^b g(x) \left[\int_c^d h(y)\ dy \right] dx, \\
&\qquad \text{car } g(x) \text{ est constante quand on intègre par rapport à } y, \\
&= \left[\int_a^b g(x)\ dx \right] \left[\int_c^d h(y)\ dy \right], \\
&\qquad \text{car } \int_c^d h(y)\, dy \text{ est une constante lorsqu'on intègre par rapport à } x.
\end{aligned}$$

Cela mérite d'être énoncé dans un théorème.

Théorème 3.1.7

Si le domaine d'intégration $\mathcal{R}$ est un rectangle, c'est-à-dire de la forme

$$\mathcal{R} = \{\ (x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\ \},$$

et que l'intégrande est un produit $f(x,y) = g(x)h(y)$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA = \left[\int_a^b g(x)\, dx \right] \left[\int_c^d h(y)\, dy \right].$$

On peut donc affirmer avec ces hypothèses qu'une intégrale double est le produit de deux intégrales simples.

Exemple 3.1.8

Soit $\mathcal{R} = [0,2] \times [0,1]$. Calculer la valeur de $\iint_{\mathcal{R}} \frac{yx^3}{2+y^2}\, dA$.

Solution. Notons que l'intégrande, à savoir la fonction $f(x,y) = \frac{x^3 y}{2+y^2}$, peut s'écrire comme produit

$$f(x,y) = g(x)\, h(y) \text{ avec } g(x) = x^3, h(y) = \frac{y}{2+y^2}.$$

De plus, le domaine d'intégration est un rectangle. Il vient donc que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \frac{x^3 y}{2+y^2}\, dA &= \left[\int_0^2 x^3\, dx\right]\left[\int_0^1 \frac{y}{2+y^2}\, dy\right] \\ &= \frac{1}{4}x^4\Big|_{x=0}^{x=2} \times \frac{1}{2}\ln(2+y^2)\Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{4}(16-0)\cdot\frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln(3/2).\end{aligned}$$

À vous de jouer 3.1.9



Évaluez l'intégrale itérée $I = \int_0^1 \int_{1-y}^{1+y} (18y^2 + 10x)\, dxdy$

Comme pour les intégrales à une variable, il n'est pas toujours nécessaire de connaître la valeur exacte d'une intégrale double. Nous nous intéressons plutôt à trouver des bornes à sa valeur. Le théorème suivant fournit quelques outils simples pour obtenir de telles bornes. Ces propriétés des intégrales à plusieurs variables sont analogues à celles des intégrales à une variable.

Théorème 3.1.10 Inégalités pour les intégrales.

Sous les hypothèses du théorème 3.1.3 :

(a) Si $f(x,y) \geqslant 0$ pour tout (x,y) dans $\mathcal{R}$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA \geqslant 0;$$

(b) S'il existe des constantes m et M telles que $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$ pour tout (x,y) dans $\mathcal{R}$, alors

$$m \cdot Aire(\mathcal{R}) \leqslant \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA \leqslant M \cdot Aire(\mathcal{R});$$

(c) Si $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\mathcal{R}$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA \leqslant \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA;$$

(d) On a

$$\left|\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA\right| \leqslant \iint_{\mathcal{R}} |f(x,y)|\, dA.$$

Volumes

Voyons maintenant quelques applications des intégrales doubles que nous venons de définir. Le problème du calcul de l'aire de la région sous une courbe et au-dessus de l'axe des x dans le plan, avec des intégrales simples, se transforme en celui du calcul du volume du solide sous une surface et au-dessus du plan Oxy, avec des intégrales doubles. Cette fois, au lieu d'interpréter la fonction $f(x,y)$ comme une densité, on l'interprète comme la hauteur d'un solide se trouvant au-dessus d'une région $\mathcal{R}$ du plan Oxy.

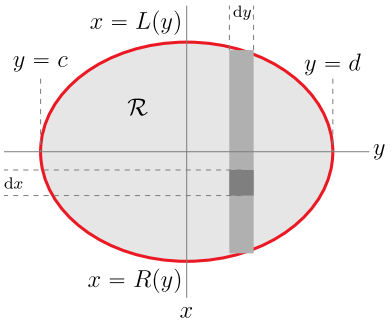
Voyons comment cela s'applique dans la partie (b) du théorème 3.1.3. Le cas de la partie (a) se traitera de la même façon. Supposons un solide $\mathcal{V}$ défini au-dessus de la région suivante,

$$\mathcal{R} = \big\{\ (x,y)\ \big|\ c \leqslant y \leqslant d,\ L(y) \leqslant x \leqslant R(y)\ \big\},$$

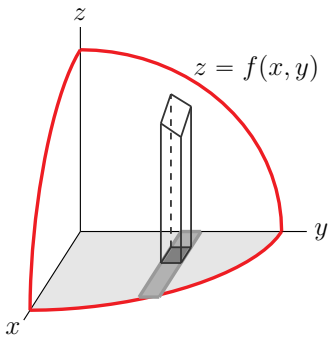
et tel que

$$\mathcal{V} = \big\{\ (x,y,z)\ \big|\ (x,y) \in \mathcal{R},\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\ \big\}.$$

La région $\mathcal{R}$ (qui est aussi la région vue au-dessus du solide $\mathcal{V}$) est illustrée dans la figure de gauche, et la portion de $\mathcal{V}$ dans le premier octant est illustrée dans la figure de droite.



vue d'en haut



Afin de calculer le volume de $\mathcal{V}$, nous allons

- choisir un nombre naturel n et découper $\mathcal{R}$ en rectangles de largeur $\Delta y = \frac{d-c}{n}$;
- diviser le rectangle i en m sous-rectangles, chacun de largeur Δy et de hauteur $\Delta x = \frac{1}{m} \cdots$;
- calculer, approximativement, le volume de la portion de $\mathcal{V}$ qui se trouve au-dessus de chaque rectangle ;
- calculer la limite lorsque $m \to \infty$, puis la limite lorsque $n \to \infty$.

Étant donné que nous avons déjà fait ce type de raisonnement à deux reprises, nous sauterons quelques étapes à notre raisonnement :

- Il faut découper la région $\mathcal{R}$ en rectangles de largeur infinitésimale dy.
- Il faut diviser chaque rectangle en sous-rectangles « infinitésimaux » de largeur dy et de hauteur dx. Voir la figure de gauche ci-dessus.
- Le volume de la portion de $\mathcal{V}$ qui se trouve au-dessus du sous-rectangle centré en (x,y) est approximativement égal à $f(x,y)\,dx\,dy$. Voir la figure de droite ci-dessus.
- Ainsi, le volume de la portion de $\mathcal{V}$ qui se trouve au-dessus du rectangle centré en y est approximativement égal à[2] $dy \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx$.
- Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

[2] Pensez à la portion de $\mathcal{V}$ qui se trouve au-dessus de ce rectangle comme à une fine tranche de pain. Ainsi, le facteur dy dans l'expression $dy \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx$ est l'épaisseur de la tranche. Le facteur $\int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx$ est l'aire de la surface transversale $\big\{\ (x,z)\ \big|\ L(y) \leqslant x \leqslant R(y),\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\ \big\}$, c.-à-d. l'aire de la surface de la tranche de pain.

Formule 3.1.11

Soit f une fonction continue définie sur une région $\mathcal{R}$ du plan et $\mathcal{V} = \{ (x,y,z) \mid (x,y) \in \mathcal{R},\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \}$.

(a) Si $\mathcal{R}$ est donnée par $\mathcal{R} = \{ (x,y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ L(y) \leqslant x \leqslant R(y) \}$, alors

$$\textit{Volume}(\mathcal{V}) = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

(b) Si $\mathcal{R}$ est donnée par $\mathcal{R} = \{ (x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ B(x) \leqslant y \leqslant T(x) \}$, alors

$$\textit{Volume}(\mathcal{V}) = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Exemples

Maintenant que nous avons vu beaucoup de formules et de théorie, il est temps de mettre tout cela en pratique. Commençons par un exemple de calcul de masse, puis poursuivons avec un exemple de calcul de volume. Vous remarquerez dans les deux cas que les calculs mathématiques sont vraiment similaires. Seulement l'interprétation du résultat change.

Exemple 3.1.12 Masse.

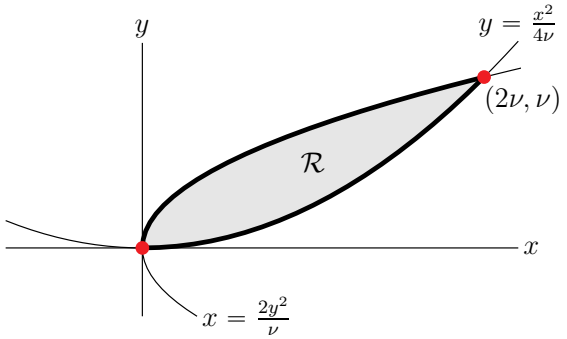
Soit $\nu > 0$ une constante et $\mathcal{R}$ la région au-dessus de la courbe $x^2 = 4\nu y$ et à la droite de la courbe $y^2 = \frac{1}{2}\nu x$. Trouver la masse de $\mathcal{R}$ si sa densité est $f(x,y) = xy$.

Solution. Pour illustrer les méthodes, nous présentons deux solutions : avec des tranches verticales, puis avec des tranches horizontales. Pour commencer, esquissons la région $\mathcal{R}$. Notons d'abord que, puisque $y \geqslant \frac{x^2}{4\nu}$ et $x \geqslant \frac{2y^2}{\nu}$, les valeurs de x et de y sont positives sur $\mathcal{R}$. Les deux courbes se coupent aux points (x,y) vérifiant les équations

$$x = \frac{2y^2}{\nu} \text{ et } y = \frac{x^2}{4\nu} \implies x = \frac{2y^2}{\nu} = \frac{2}{\nu}\left(\frac{x^2}{4\nu}\right)^2 = \frac{x^4}{8\nu^3}$$
$$\iff \left(\frac{x^3}{8\nu^3} - 1\right) x = 0.$$

Cette équation admet deux solutions réelles, soit $x = 0$ et $x = 2\nu$.

Ainsi, la parabole $y = \frac{x^2}{4\nu}$, dont l'ouverture est vers le haut, et la parabole $x = \frac{2y^2}{\nu}$, dont l'ouverture est vers la droite, se coupent en $(0,0)$ et $(2\nu,\nu)$.

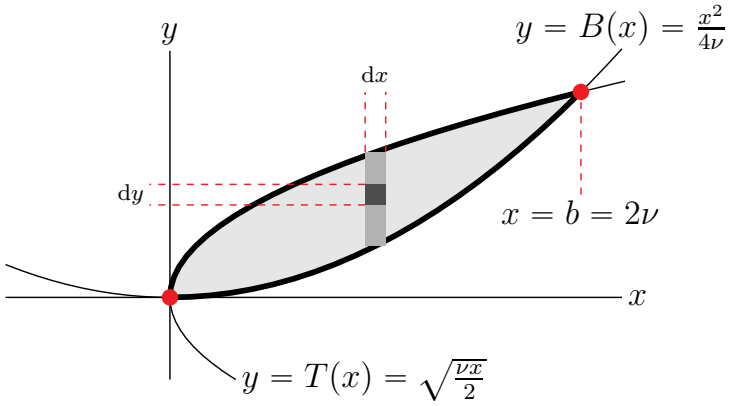


Solution avec des tranches verticales. Écrivons maintenant une intégrale double qui calcule la masse en utilisant des tranches verticales. Nous allons utiliser le raisonnement

abrégé vu à la section précédente sur les volumes. Déduisons de la figure ci-dessus que

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 = a \leqslant x \leqslant b = 2\nu,\ \frac{x^2}{4\nu} = B(x) \leqslant y \leqslant T(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{2}} \right\}.$$

- Découpons $\mathcal{R}$ en rectangles verticaux de largeur infinitésimale dx.
- Divisons chaque rectangle en sous-rectangles de hauteur infinitésimale dy et de largeur dx. Voir la figure ci-dessous.



- La masse du sous-rectangle centré en (x,y) est approximativement égale à $f(x,y)\,dx\,dy = xy\,dx\,dy$.
- Ainsi, la masse du rectangle centré en x est approximativement égale à $\left[\int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$ (l'intégrale par rapport à y additionne les masses de tous les sous-rectangles sur un même rectangle vertical).
- Nous concluons que

$$\text{Masse}(\mathcal{R}) = \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\,dy\;dx = \int_0^{2\nu} \int_{x^2/(4\nu)}^{\sqrt{\nu x/2}} xy\,dy\;dx.$$

Ici, l'intégrale par rapport à x additionne les masses de chacun des rectangles verticaux.

Rappelons que lorsque nous intégrons par rapport à y, x est une constante, de sorte que nous pouvons factoriser la constante x à l'extérieur de l'intégrale par rapport à y.

$$\begin{aligned}\int_{x^2/(4\nu)}^{\sqrt{\nu x/2}} xy\;dy &= x \int_{x^2/(4\nu)}^{\sqrt{\nu x/2}} y\;dy \\ &= x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2/(4\nu)}^{\sqrt{\nu x/2}} = \frac{\nu x^2}{4} - \frac{x^5}{32\nu^2},\end{aligned}$$

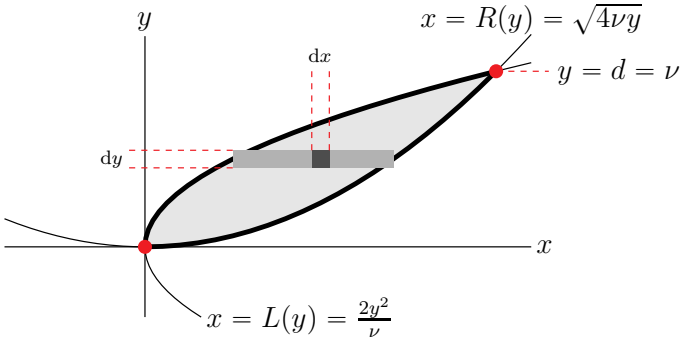
et alors

$$\begin{aligned}\text{Masse}(\mathcal{R}) &= \int_0^{2\nu} \left[\frac{\nu x^2}{4} - \frac{x^5}{32\nu^2}\right] dx \\ &= \frac{\nu(2\nu)^3}{3\times 4} - \frac{(2\nu)^6}{6\times 32\nu^2} = \frac{\nu^4}{3}.\end{aligned}$$

Avec des tranches horizontales. Déduisons de la figure au début de cet exemple que

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 = c \leqslant y \leqslant d = \nu,\ \frac{2y^2}{\nu} = L(y) \leqslant x \leqslant R(y) = \sqrt{4\nu y} \right\}.$$

- Découpons $\mathcal{R}$ en rectangles horizontaux de hauteur infinitésimale dy.
- Divisons chaque rectangle en sous-rectangles de hauteur dy et de largeur infinitésimale dx. Voir la figure ci-dessous.



- La masse du sous-rectangle centré en (x,y) est approximativement égale à $f(x,y)\,dx\,dy = xy\,dx\,dy$.
- Ainsi, la masse du rectangle horizontal centré en y est approximativement $\left[\int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx\right] dy$ (l'intégrale par rapport à x additionne les masses de chacun des sous-rectangles sur un même rectangle horizontal).
- Nous concluons que

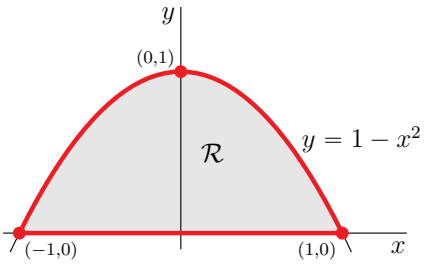
$$\text{Masse}(\mathcal{R}) = \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\,dx\ dy = \int_0^\nu \int_{2y^2/\nu}^{\sqrt{4\nu y}} xy\ dx\ dy.$$

Ici, l'intégrale par rapport à y additionne les masses de chacun des rectangles horizontaux. Lorsque nous intégrons par rapport à x, y est constante. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\text{Masse}(\mathcal{R}) &= \int_0^\nu y \left[\int_{2y^2/\nu}^{\sqrt{4\nu y}} dx\ x\right] dy \\
&= \int_0^\nu y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{2y^2/\nu}^{\sqrt{4\nu y}} dy \\
&= \int_0^\nu \left[2\nu y^2 - \frac{2y^5}{\nu^2}\right] dy \\
&= \frac{2\nu(\nu)^3}{3} - \frac{2\nu^6}{6\nu^2} = \frac{\nu^4}{3}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.1.13 Volume.

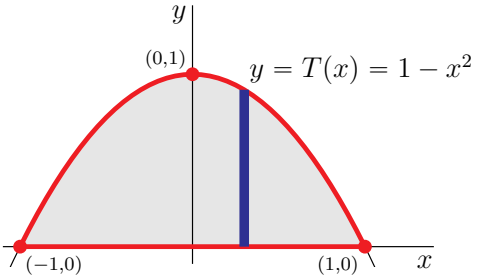
Soit $\mathcal{R}$ la région du plan Oxy qui se trouve au-dessus de l'axe des x et sous la parabole $y = 1-x^2$. Calculer le volume du solide au-dessus de la région $\mathcal{R}$ et sous la surface d'équation $z = x^2\sqrt{1-y}$.



Solution. Nous allons présenter en détail la solution avec des tranches verticales. Pour les tranches horizontales, nous nous contenterons de poser l'intégrale.

Avec les tranches verticales. Nous pouvons déduire de la figure ci-contre que :

- le point le plus à gauche de $\mathcal{R}$ a pour abscisse $x = -1$ et que celui le plus à droite a $x = 1$;
- pour chaque valeur de x fixe entre -1 et 1, le point (x, y) dans $\mathcal{R}$ avec la plus petite ordonnée a $y = 0$ et que celui avec la plus grande ordonnée vérifie $y = 1 - x^2$.



Ainsi,

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; -1 = a \leqslant x \leqslant b = 1,\ 0 = B(x) \leqslant y \leqslant T(x) = 1 - x^2 \right\}$$

et, d'après la formule b,

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\ dy\,dx = \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} x^2\sqrt{1-y}\ dy\ dx \\ &= 2\int_0^1 \int_0^{1-x^2} x^2\sqrt{1-y}\ dy\,dx, \end{aligned}$$

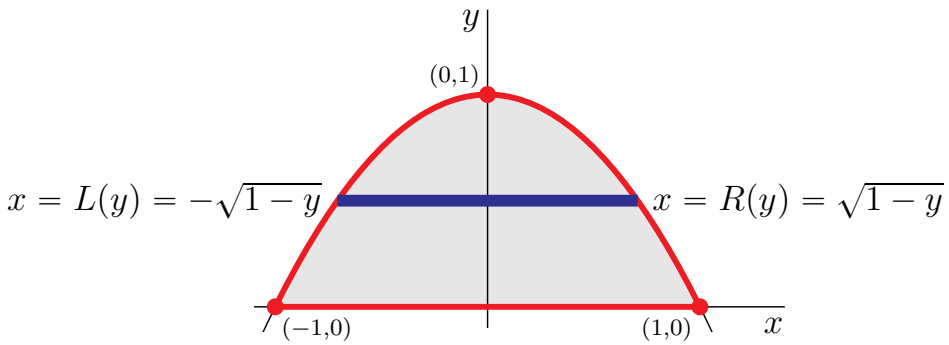
car l'intégrale $F(x) = \int_0^{1-x^2} x^2\sqrt{1-y}\ dy$ est une fonction paire de x. Or, pour $x \geqslant 0$, l'intégrale intérieure est

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x^2} x^2\sqrt{1-y}\ dy &= x^2 \int_0^{1-x^2} \sqrt{1-y}\ dy = x^2 \left[-\frac{2}{3}(1-y)^{3/2} \right]_0^{1-x^2} \\ &= \frac{2}{3}x^2\left(1-x^3\right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\text{Volume} = 2\int_0^1 \frac{2}{3}x^2\left(1-x^3\right)\ dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

Avec les tranches horizontales. Avec cette méthode, nous obtenons la figure ci-dessous.



La région d'intégration est

$$\mathcal{R} = \{\ (x,y) \mid 0 = c \leqslant y \leqslant d = 1, \\ -\sqrt{1-y} = L(y) \leqslant x \leqslant R(y) = \sqrt{1-y}\ \}.$$

Donc, d'après la formule a,

$$\text{Volume} = \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f\,(x,y)\ dx\,dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} x^2\sqrt{1-y}\ dx\,dy.$$

Nous vous laissons le soin de vérifier que le résultat est le même que celui obtenu précédemment.

Remarque 3.1.14

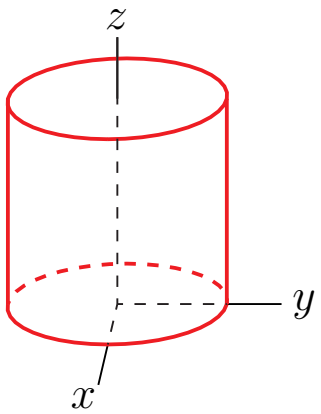
Il est important de noter que, dans les figures que nous avons faites, nous avons concentré notre attention sur la région d'intégration. L'intégrande $f(x,y)$ n'a joué aucun rôle dans cette figure, nous l'avons considéré seulement lors de l'évaluation des intégrales.

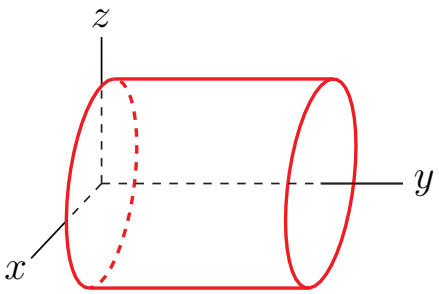
Exemple 3.1.15 Volume.

Calculer le volume de la partie commune aux deux cylindres $x^2+y^2=a^2$ et $x^2+z^2=a^2$.

Solution. La première étape est de bien visualiser le solide spécifié. Remarquons que :

- La variable z n'apparaît pas dans l'équation $x^2+y^2=a^2$, de sorte que, pour toute valeur z_0, la partie du cylindre $x^2+y^2=a^2$ dans le plan $z=z_0$ est le cercle $x^2+y^2=a^2$, $z=z_0$. Ainsi, le cylindre $x^2+y^2=a^2$ est formé d'une infinité de cercles de rayon a superposés les uns par-dessus les autres. La partie du cylindre $x^2+y^2=a^2$ qui se trouve au-dessus du plan Oxy est illustrée dans la figure de gauche ci-dessous.
- La variable y n'apparaît pas dans $x^2+z^2=a^2$. Ainsi, pour toute valeur constante y_0, la partie du cylindre $x^2+z^2=a^2$ dans le plan $y=y_0$ est le cercle $x^2+z^2=a^2$, $y=y_0$. Ainsi, le cylindre $x^2+z^2=a^2$ est formé d'une infinité de cercles superposés horizontalement, les uns à côté des autres. La partie du cylindre $x^2+z^2=a^2$ qui se trouve à la droite du plan Oxz est illustrée dans la figure de droite ci-dessous.

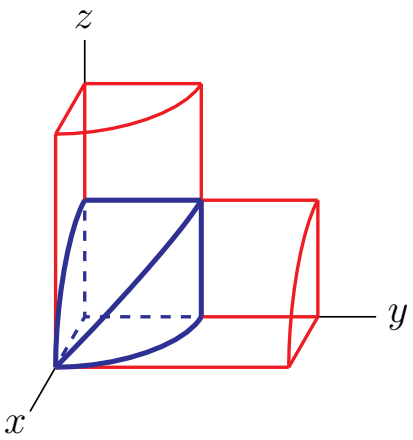


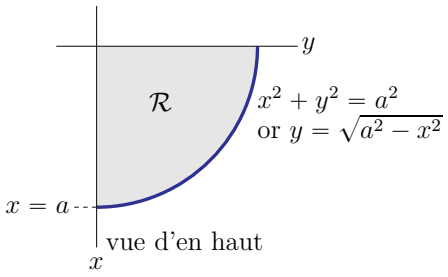


Nous devons calculer le volume de partie commune à ces deux cylindres.

- Les équations $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + z^2 = a^2$ restent inchangées si nous substituons x par $-x$. En conséquence, les deux cylindres, et donc le solide qui nous intéresse, sont symétriques par rapport au plan Oyz. En particulier, le volume de la partie du solide dans l'octant $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ est le même que celui de la partie se trouvant dans le premier octant $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. De la même façon, les équations ne changent pas si y est remplacée par $-y$, ou si z est remplacée par $-z$. Notre solide est donc également symétrique par rapport au plan Oxz et par rapport au plan Oxy. Ainsi, le volume du solide est le même dans chacun des huit octants.
- Nous allons donc calculer le volume du solide dans le premier octant seulement, puis multiplier par huit.

La partie du solide qui se trouve dans le premier octant est illustrée dans la figure de gauche ci-dessous. Un point (x, y, z) se trouve dans le premier cylindre si et seulement si $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.





Ce point se trouve dans le second cylindre si et seulement si $x^2 + z^2 \leqslant a^2$. Ainsi, la partie du solide qui se trouve dans le premier octant est

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x^2 + z^2 \leqslant a^2 \right\}.$$

Notons que, dans $\mathcal{V}_1$, $z^2 \leqslant a^2 - x^2$, de sorte que $z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}$. Ainsi,

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2} \right\}.$$

Une vue d'en haut de la partie du solide dans le premier octant est illustrée dans la figure de droite ci-dessus. On voit notamment que x varie de 0 à a et que, pour chaque x fixe, y varie de 0 à $\sqrt{a^2-x^2}$. On peut donc redéfinir

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; (x,y) \in \mathcal{R},\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \right\},$$

où

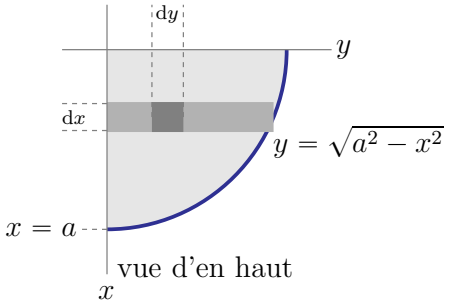
$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2} \right\} \quad \text{et} \quad f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2}.$$

Remarquons aussi que $f(x,y)$ ne dépend pas de y. Cela facilitera les calculs suivants.

Nous pouvons calculer le volume de $\mathcal{V}_1$ avec notre démarche habituelle.

- On découpe $\mathcal{R}$ en rectangles horizontaux, de largeur infinitésimale dx.

  On divise chaque rectangle en sous-rectangles de hauteur infinitésimale dy et de largeur dx. Voir la figure ci-contre.



- Le volume de la partie de $\mathcal{V}_1$ au-dessus du sous-rectangle centré en (x,y) est approximativement égal à

$$f(x,y)\,dx\,dy = \sqrt{a^2-x^2}\;dx\,dy.$$

- Ainsi, le volume de la partie de $\mathcal{V}_1$ au-dessus du rectangle centré en x est approximativement

$$\left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\;dy\right] dx.$$

- On conclut que

$$\text{Volume}(\mathcal{V}_1) = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\;dy\;\;dx.$$

  En gardant à l'esprit que l'intégration par rapport à y considère x comme une constante, calculons le volume.

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{V}_1) &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx \\
&= \int_0^a \left(a^2-x^2\right)\;dx \\
&= \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a \\
&= \frac{2a^3}{3}
\end{aligned}$$

  Ainsi, le volume total du solide recherché est

$$\text{Volume}(\mathcal{V}) = 8\,\text{Volume}(\mathcal{V}_1) = \frac{16a^3}{3}.$$

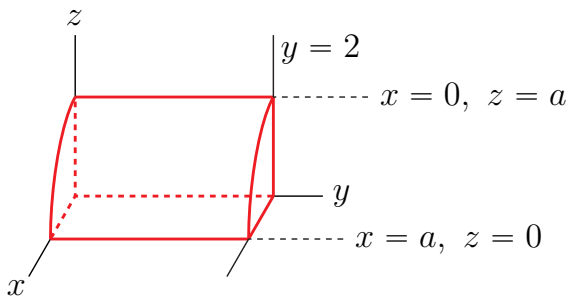
Exemple 3.1.16 Interprétation géométrique.

Évaluer $\displaystyle\int_0^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy$.

Solution.

Cette intégrale représente le volume d'un solide commun, de sorte qu'elle peut être évaluée sans le calcul d'une intégrale. L et l'intégrande est

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}.$$



Par conséquent, l'intégrale représente le volume du solide compris entre le plan Oxy et la surface $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, avec $(x, y) \in \mathcal{R}$. On peut réécrire l'équation de la surface comme $x^2 + z^2 = a^2$, qui représente, comme cela a été vu dans l'exemple 3.1.15, un cylindre de rayon a dont l'axe est l'axe des y. Nous cherchons le volume de la partie de ce cylindre qui se trouve au-dessus de $\mathcal{R}$, comme illustré dans la figure ci-contre.

Les sections du solide que coupe tout plan vertical $y = y_0$ sont toutes des quarts de cercle de rayon a, de sorte que leur aire est égale à $\frac{1}{4}\pi a^2$. L'intégrale intérieure $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ donne précisément cette aire. Ainsi, lorsque y varie de 0 à 2,

$$\int_0^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy = \frac{1}{4}\pi a^2 \times 2 = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Exemple 3.1.17 exemple 3.1.16, démarche complexe.

Il est possible, mais fastidieux, d'évaluer l'intégrale $\int_0^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy$ de l'exemple 3.1.16 avec les techniques d'intégration des fonctions à une variable. Faisons ce calcul à titre de révision.

L'intégrale à l'intérieur est $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. La stratégie habituelle afin d'éliminer des expressions contenant des racines carrées dans l'intégrande, comme $\sqrt{a^2 - x^2}$, est d'effectuer une substitution trigonométrique. Dans ce cas-ci, le changement de variables approprié est de poser

$$x = a \sin\theta, \qquad dx = a \cos\theta\, d\theta.$$

La borne d'intégration inférieure $x = 0$, soit $a \sin\theta = 0$, équivaut à $\theta = 0$, et la borne supérieure $x = a$, soit $a \sin\theta = a$, équivaut à $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\underbrace{a^2 - a^2 \sin^2\theta}_{a^2 \cos^2\theta}}\, a \cos\theta\, d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta.$$

La méthode usuelle pour évaluer cette intégrale fait appel à l'identité trigonométrique

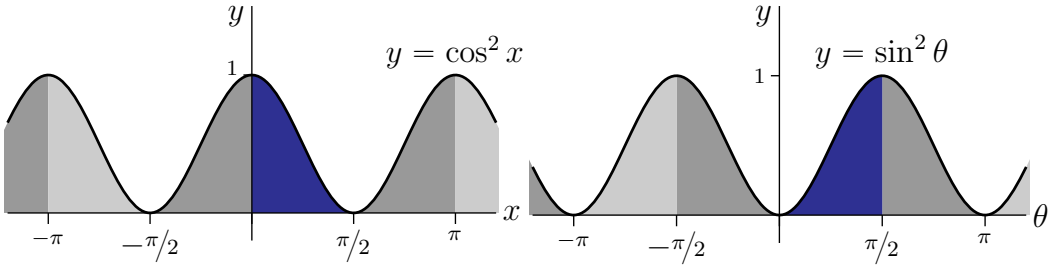
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1, \qquad \text{qu'on réécrit} \qquad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2},$$

et alors

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \big[1 + \cos(2\theta)\big]\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{\pi a^2}{4}.$$

Remarquons cependant qu'il existe une autre méthode efficace, quoiqu'un peu recherchée, pour évaluer cette intégrale. Regardons les figures ci-dessous.



Nous observons que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dans tous les cas, nous avons que l'intégrale intérieure est égale à

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

et que l'intégrale de départ est égale à

$$\int_0^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy = \frac{\pi a^2}{4}\int_0^2 dy = \frac{\pi a^2}{2},$$

comme obtenu dans l'exemple 3.1.16.

Exemple 3.1.18 Ordre d'intégration.

Soit $\mathcal{R}$ la région du plan dont l'aire est donnée par

$$\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy\, dx.$$

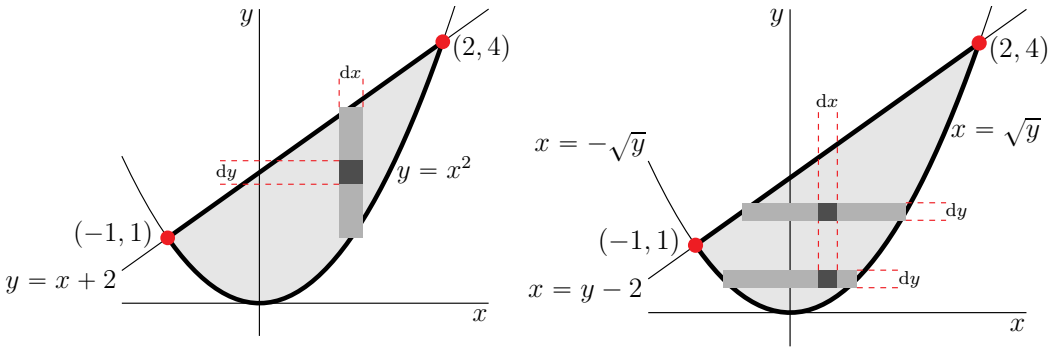
Esquisser $\mathcal{R}$ et exprimer l'aire en échangeant l'ordre d'intégration

Solution. L'étape critique lorsqu'on change l'ordre d'intégration est d'illustrer la région dans le plan Oxy. À partir de l'intégrale donnée, nous voyons que, sur le domaine d'intégration,

- x varie de -1 à 2 et que,

- pour chaque x fixe, y varie de la parabole $y = x^2$ à la droite $y = x + 2$.

Cette intégrale itérée correspond aux découpes verticales de la figure de gauche ci-dessous.



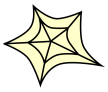
Pour inverser l'ordre d'intégration, on doit considérer dans la même région et faire des découpes en rectangles horizontaux, comme illustré dans la figure de droite ci-dessus.

Nous faisons face à un nouveau problème : l'expression de la valeur de x à l'extrémité gauche d'un rectangle dépend de si son ordonnée y est inférieure ou supérieure à $y = 1$. Plus précisément, nous avons que, sur le domaine d'intégration,

- y varie de 0 à 4 et que,
- pour chaque y fixe tel que $0 \leqslant y \leqslant 1$, x varie de $x = -\sqrt{y}$ à $x = +\sqrt{y}$ et que,
- pour chaque y fixe tel que $1 \leqslant y \leqslant 4$, x varie de $x = y - 2$ à $x = +\sqrt{y}$.

Ainsi,

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{1}^{4}\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy.$$



À vous de jouer 3.1.19

Lors de l'évaluation d'une intégrale double sur une région D, une somme d'intégrales itérées a été obtenue, comme suit :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^7\int_0^{(1/7)y} f(x,y)\,dxdy + \int_7^8\int_0^{8-y} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Esquissez la région D et exprimez l'intégrale double comme une intégrale itérée dans l'autre ordre d'intégration.

$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx$

$a =$ _____ $b =$ _____

$g_1(x) =$ _____ $g_2(x) =$ _____

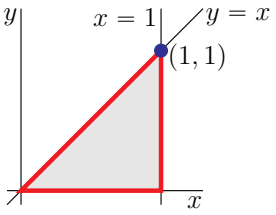
Le but de l'exemple qui suit est de montrer que, malgré que les deux ordres d'intégration doivent donner le même résultat, ils ne sont pas toujours de difficulté semblable.

Exemple 3.1.20

Évaluer l'intégrale de $\frac{\sin x}{x}$ sur la région du plan Oxy qui se situe au-dessus de l'axe des abscisses, à la droite de la droite $y = x$ et à la gauche de $x = 1$.

Solution. Voici une esquisse du domaine.

Nous allons essayer d'évaluer l'intégrale donnée de deux façons : une fois avec les tranches horizontales (ce qui sera impossible) et une autre fois avec les tranches verticales (la façon la plus simple).



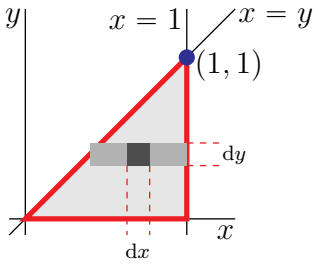
Solution avec des tranches horizontales. Afin de poser l'intégrale en utilisant des tranches horizontales, comme dans la figure ci-dessous, nous observons que, sur notre domaine d'intégration,

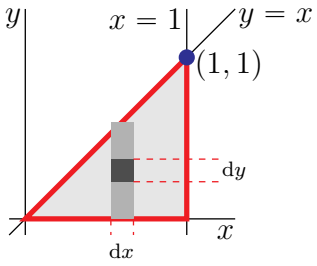
- y varie de 0 à 1 et que,
- pour chaque y fixe, x varie de $x = y$ à $x = 1$.

Ainsi, l'intégrale itérée est

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy.$$

Le problème est que l'intégrande $\frac{\sin x}{x}$ ne possède pas de primitive élémentaire. Il est impossible d'évaluer $\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ sans faire appel à des méthodes numériques ou à des développements en séries.





Solution avec des tranches verticales. Afin de poser l'intégrale en utilisant des tranches verticales, comme dans la figure de droite ci-dessus, nous observons que, sur le domaine d'intégration,

- x varie de 0 à 1 et que,
- pour chaque x fixe, y varie de 0 à $y = x$.

Donc, l'intégrale itérée est

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx.$$

Cette fois-ci, parce que la variable x est considérée comme une constante dans l'intégrale intérieure, le calcul de cette intégrale devient simple.

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \left[\int_0^x dy\right] dx = \int_0^1 \sin x\, dx = 1 - \cos(1)$$

Voici un dernier exemple afin de rappeler certaines techniques d'intégration de fonctions à une variable.

Exemple 3.1.21

Calculer le volume du solide situé sous la surface $z = 1 - 3x^2 - 2y^2$ et au-dessus du plan Oxy.

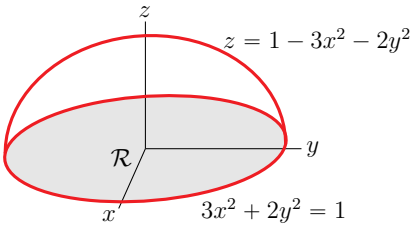
Solution. Avant de se précipiter dans l'intégration, il est important de se représenter une esquisse de ce solide et de cette surface. Pour chaque constante z_0, la partie de la surface $z = 1-3x^2-2y^2$ qui est projetée dans le plan horizontal $z = z_0$ est l'ellipse $3x^2+2y^2 = 1-z_0$. La plus large de ces ellipses est celle qui se trouve dans le plan Oxy lorsque $z_0 = 0$, soit l'ellipse d'équation $3x^2+2y^2 = 1$. Au fur et à mesure que z_0 augmente, l'ellipse se contracte jusqu'au point unique $(0, 0, 1)$, soit lorsque $z_0 = 1$. Ainsi, la surface est composée d'une superposition d'ellipses, et le solide $\mathcal{V}$ est donné par

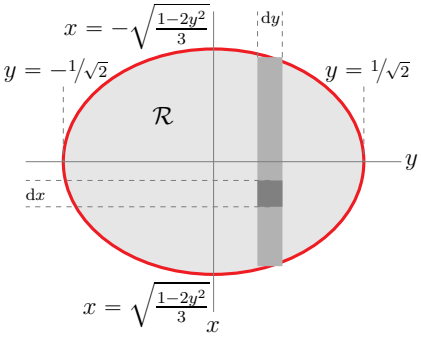
$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; 3x^2 + 2y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - 3x^2 - 2y^2 \right\}.$$

Ceci est illustré dans la figure de gauche ci-dessous. La vue d'en haut de la région

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 3x^2 + 2y^2 \leqslant 1 \right\}$$

est illustrée dans la figure de droite.





vue d'en haut

En considérant que la relation $z = 1 - 3x^2 - 2y^2$ exprimée en fonction de x est presque identique à celle exprimée en fonction de y (seulement les coefficients 2 et 3 sont interchangés), l'utilisation de la méthode des tranches verticales nous amènera à une intégration de même difficulté qu'avec la méthode des tranches horizontales. Nous pouvons donc choisir n'importe laquelle des méthodes ; choisissons celle avec les tranches verticales.

L'ellipse dans $\mathcal{R}$ coupe l'axe des y aux points où $x = 0$ et où y vérifie l'équation $3(0)^2 + 2y^2 = 1$, donc $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, dans $\mathcal{R}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ et, pour chaque y de la région, $3x^2 \leqslant 1-2y^2$, ou bien $-\sqrt{\frac{1-2y^2}{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{1-2y^2}{3}}$. Par conséquent, en utilisant des rectangles verticaux comme dans la figure de droite ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{V}) &= \iint_{\mathcal{R}} \left(1 - 3x^2 - 2y^2\right)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_{-\sqrt{\frac{1-2y^2}{3}}}^{\sqrt{\frac{1-2y^2}{3}}} \left(1 - 3x^2 - 2y^2\right)\, dx \right] dy \\
&= 4 \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_{0}^{\sqrt{\frac{1-2y^2}{3}}} \left(1 - 3x^2 - 2y^2\right)\, dx \right] dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[(1-2y^2)x - x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{1-2y^2}{3}}}\, dy \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1-2y^2}{3}}\left[(1-2y^2) - \frac{1-2y^2}{3}\right] dy \\
&= 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1-2y^2}{3}\right]^{3/2} dy.
\end{aligned}
$$

Nous évaluons cette intégrale en utilisant la substitution trigonométrique et en posant $2y^2 = \sin^2\theta$, c'est-à-dire

$$
y = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, \qquad dy = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\, d\theta.
$$

On obtient :

$$
\text{Volume}(\mathcal{V}) = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}}^{dy}\left[\frac{\cos^2\theta}{3}\right]^{3/2} d\theta = \frac{8}{\sqrt{54}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta.
$$

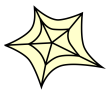
Ensuite, pour intégrer $\cos^4\theta$, nous utilisons l'identité trigonométrique suivante :

$$
\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \frac{\cos(2\theta)+1}{2} \\
\implies \cos^4\theta &= \frac{(\cos(2\theta)+1)^2}{4} = \frac{\cos^2(2\theta)+2\cos(2\theta)+1}{4} \\
&= \frac{\frac{\cos(4\theta)+1}{2}+2\cos(2\theta)+1}{4} \\
&= \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(4\theta).
\end{aligned}
$$

Finalement, en considérant que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta)\, d\theta = 0$, on obtient

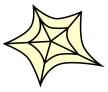
$$
\text{Volume}(\mathcal{V}) = \frac{8}{\sqrt{54}}\,\frac{3}{8}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}.
$$

À vous de jouer 3.1.22



Associez les intégrales suivantes avec la description des solides dont elles calculent le volume. Entrez la lettre de la description à la gauche de l'intégrale correspondante.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{4}^{4+\sqrt{4-x^2}} 4x+3y\, dydx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{1-3y^2}} \sqrt{1-4x^2-3y^2}\, dxdy$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1-x^2-y^2\, dydx$
4. $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} 4x^2+3y^2\, dxdy$



5. $\displaystyle\int_0^2\int_{-2}^2 \sqrt{4-y^2}\,dydx$

A. Solide sous un plan, sur une moitié d'un disque

B. La moitié d'une barre cylindrique.

C. Solide borné par un paraboloide circulaire et un plan.

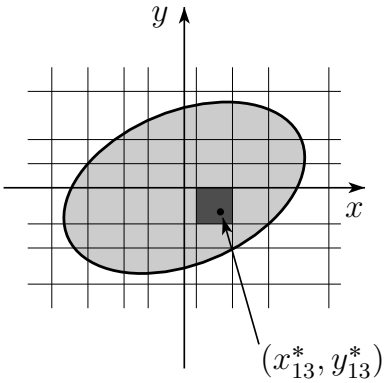
D. Solide sous un paraboloide elliptique, sur une région plane bornée par deux paraboles

E. Le huitième d'un ellipsoide.

Quelques compléments au sujet de la définition de l'intégrale double

En principe, l'intégrale $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dA$, où $\mathcal{R}$ est une région bornée du plan $\mathbb{R}^2$, est définie comme suit.

- Subdivisons $\mathcal{R}$ en traçant des droites parallèles aux axes de coordonnées.
- Numérotons les sous-rectangles obtenus de 1 à n (ce sont presque tous des rectangles, sauf ceux qui se trouvent à la frontière de $\mathcal{R}$). Notons que n, dans ce contexte, est le nombre total de sous-rectangles, pas le nombre de rectangles verticaux ou horizontaux comme précédemment.



- Posons ΔA_i, l'aire du sous-rectangle numéro i.
- Soit (x_i^*, y_i^*) un point d'échantillon sélectionné au hasard dans le sous-rectangle i.
- Considérons la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$. Rappelons que la somme tient compte de tous les sous-rectangles dans la région.

Répétons cette procédure en redécoupant $\mathcal{R}$ afin d'obtenir des sous-rectangles de plus en plus petits. Si, au fur et à mesure que les dimensions des sous-rectangles tendent vers 0, cette somme s'approche d'une valeur limite unique (peu importe le choix de la subdivision de la région et des points (x_i^*, y_i^*)), alors nous définissons

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dA\ = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i.$$

Théorème 3.1.23

Si $f(x,y)$ est continue sur une région $\mathcal{R}$ donnée par $a \leqslant x \leqslant b$ et $B(x) \leqslant y \leqslant T(x)$ avec des fonctions continues $B(x)$ et $T(x)$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dA\ = \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\ dy\,dx.$$

De la même façon, si $\mathcal{R}$ est donnée par $c \leqslant y \leqslant d$ et $L(y) \leqslant x \leqslant R(y)$ avec des fonctions

continues $L(y)$ et $R(y)$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dA\ = \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx\ dy.$$

La preuve de ce théorème n'est pas particulièrement difficile, mais elle dépasse le cadre de ce texte. Une conséquence importante de ce théorème est donnée ci-après.

Théorème 3.1.24 Fubini.

Si $f(x,y)$ est continue sur une région $\mathcal{R}$ donnée par

$$\left\{\begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ B(x) \leqslant y \leqslant T(x) \end{array}\right\} \qquad et \qquad \left\{\begin{array}{c} c \leqslant y \leqslant d \\ L(y) \leqslant x \leqslant R(y) \end{array}\right\}$$

pour des fonctions continues $B(x)$, $T(x)$, $L(y)$ et $R(y)$, alors

$$\int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x,y)\ dy\,dx \qquad et \qquad \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x,y)\ dx\,dy$$

existent et sont égales.

Les hypothèses de ces deux théorèmes peuvent être atténuées légèrement, mais pas trop. Par exemple, il faut que f « ne soit pas trop discontinue ». En effet, si

$$\mathcal{R} = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ \right\},$$
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x,y \text{ sont tous deux rationnels} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors l'intégrale $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dA$ n'existe pas. Effectivement, si tous les x_i^* et y_i^* sont choisis rationnels, alors

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \text{Aire}(\mathcal{R}).$$

Mais si l'on choisit des nombres irrationnels pour tous les x_i^* et y_i^*, alors

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^n 0\,\Delta A_i = 0.$$

Ainsi, la valeur de la limite de $\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i$ dépend du choix des points d'échantillon (x_i^*, y_i^*). L'intégrale $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dA$ n'existe donc pas.

Voici un exemple encore plus pathologique[3].

Exemple 3.1.25

Dans cet exemple, nous atténuons l'une des hypothèses du théorème de Fubini, soit la continuité de la fonction f. Nous allons construire un exemple dans lequel les deux intégrales des deux ordres d'intégration existent, mais ***ne sont pas égales***. Plus précisément, choisissons $\mathcal{R} = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ \right\}$ et définissons une fonction continue sur $\mathcal{R}$, sauf à

[3] Pour les mathématicien(ne)s, « pathologique » signifie « cool » ou « amusant ».

l'origine.

Pour commencer, soit $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, une suite de nombres réels tels que

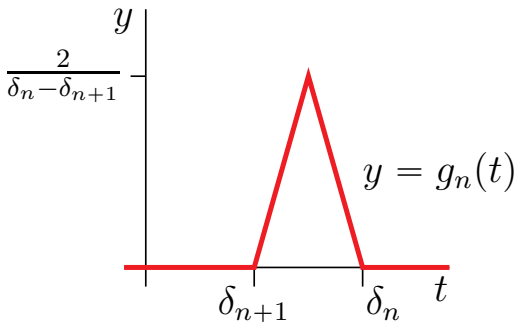
$$1 = \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots > \delta_n \to 0.$$

Par exemple, $\delta_n = \frac{1}{n}$ ou $\delta_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ sont des choix valables. Pour chaque entier positif n, posons l'intervalle $I_n =]\delta_{n+1}, \delta_n] = \{\ t \mid \delta_{n+1} < t \leqslant \delta_n\ \}$ et posons $g_n(t)$ une fonction non négative et continue vérifiant

- $g_n(t) = 0$ si $t \notin I_n$, et
- $\int_{I_n} g(t)\,dt = 1$.

Il existe plusieurs exemples d'une telle fonction, par exemple

$$g_n(t) = \left(\frac{2}{\delta_n - \delta_{n+1}}\right)^2 \begin{cases} \delta_n - t & \text{si } \frac{1}{2}(\delta_{n+1} + \delta_n) \leqslant t \leqslant \delta_n \\ t - \delta_{n+1} & \text{si } \delta_{n+1} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(\delta_{n+1} + \delta_n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$



Voici un résumé de ce qui a été fait jusqu'à maintenant.

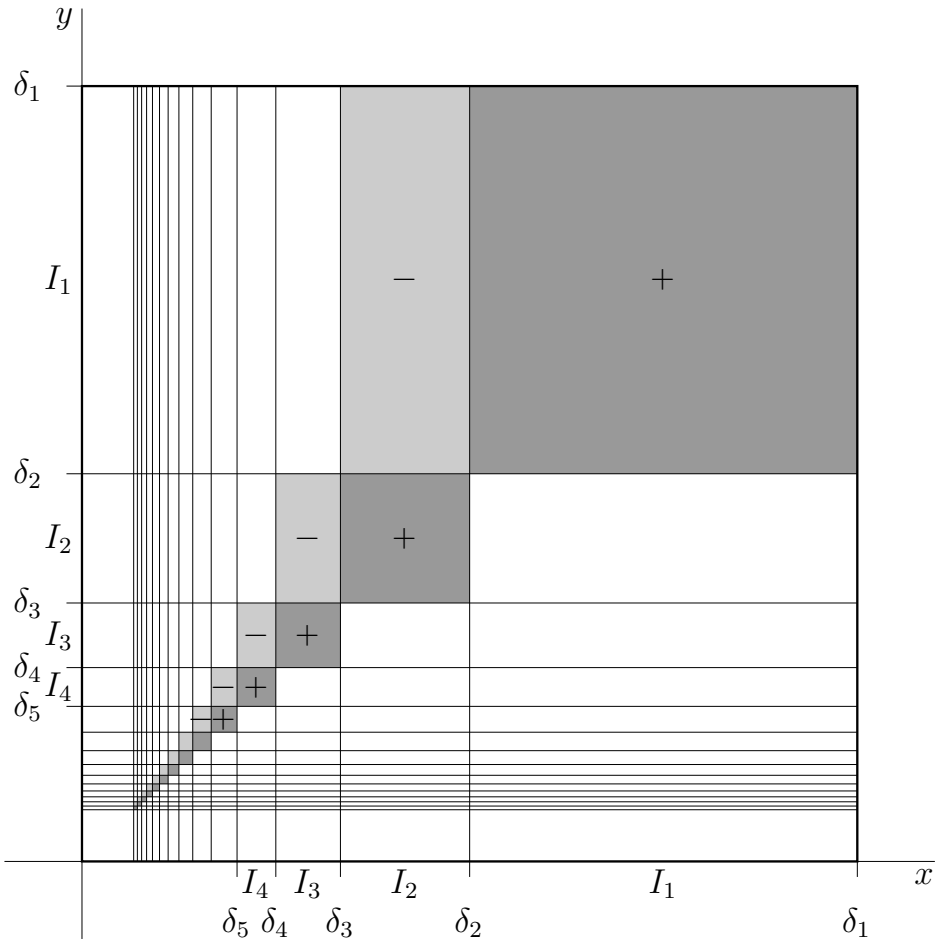
- On a subdivisé l'intervalle $0 < x \leqslant 1$ en une infinité de sous-intervalles I_n. À mesure que n augmente, les sous-intervalles deviennent de plus en plus petits, et I_n s'approche de plus en plus près de zéro.
- On a défini, pour chaque n, une fonction non négative et continue g_n qui s'annule lorsque t est à l'extérieur de I_n et dont l'intégrale sur I_n vaut 1.

Maintenant, définissons l'intégrande $f(x, y)$ en fonction de ces sous-intervalles I_n et de ces fonctions g_n.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \\ g_m(x)g_n(y) & \text{si } x \in I_m,\ y \in I_n \text{ et } m = n \\ -g_m(x)g_n(y) & \text{si } x \in I_m,\ y \in I_n \text{ et } m = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut imaginer $]0,1]\times]0,1]$ comme l'union de plusieurs petits rectangles de dimensions $I_m \times I_n$, telle qu'illustrée dans la figure ci-dessous. Sur la majorité de ces rectangles, $f(x, y)$ vaut 0. Les exceptions sont les rectangles gris foncé de dimensions $I_n \times I_n$ sur la « diagonale » de la figure ainsi que les rectangles gris pâle de dimensions $I_{n+1} \times I_n$ à la gauche de la « diagonale ».

Sur chaque rectangle gris foncé, $f(x,y) \geqslant 0$, et le graphe de $f(x,y)$ est le graphe de $g_n(x)g_n(y)$ qui ressemble à une pyramide. Sur chaque rectangle gris pâle, $f(x,y) \leqslant 0$, et le graphe de $f(x,y)$ est celui de $-g_{n+1}(x)g_n(y)$ qui ressemble plutôt à une pyramide inversée.



Maintenant, fixons un y tel que $0 \leqslant y \leqslant 1$ et calculons $\int_0^1 f(x,y)\ dx$. Ainsi, nous intégrons f le long d'une droite parallèle à l'axe des abscisses. Si $y = 0$, alors $f(x,y) = 0$ pour tout x, de sorte que $\int_0^1 f(x,y)\,dx = 0$. Si $0 < y \leqslant 1$, alors il existe exactement un entier positif n tel que $y \in I_n$ et $f(x,y) = 0$, sauf lorsque x se trouve dans I_n ou dans I_{n+1}. Ainsi, pour $y \in I_n$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,dx &= \sum_{m=n,n+1} \int_{I_m} f(x,y)\,dx \\ &= \int_{I_n} g_n(x)g_n(y)\,dx - \int_{I_{n+1}} g_{n+1}(x)g_n(y)\,dx \\ &= g_n(y)\int_{I_n} g_n(x)\,dx - g_n(y)\int_{I_{n+1}} g_{n+1}(x)\,dx \\ &= g_n(y) - g_n(y) = 0.\end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé à deux reprises le fait que $\int_{I_m} g(t)\,dt = 1$ pour tout m. Ainsi, $\int_0^1 f(x,y)\,dx = 0$ pour tout y, et donc $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\ dx\,dy\right] = 0$.

Finalement, nous fixons un x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et nous évaluons $\int_0^1 f(x,y)\ dy$. Cette

fois, nous intégrons f le long d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Si $x = 0$, alors $f(x, y) = 0$ pour tout y, donc $\int_0^1 f(x, y)\, dy = 0$. Si $0 < x \leqslant 1$, alors il existe un unique entier positif m tel que $x \in I_m$. Si $m \geqslant 2$, alors $f(x, y)$ est nulle, sauf lorsque y est dans I_m ou dans I_{m-1}. Mais si $m = 1$, alors $f(x, y)$ est nulle, sauf pour $y \in I_1$. (Voir la figure ci-dessus de nouveau !) Ainsi, pour $x \in I_m$, avec $m \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,dy &= \sum_{n=m,m-1} \int_{I_n} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{I_m} g_m(x)g_m(y)\,dy - \int_{I_{m-1}} g_m(x)g_{m-1}(y)\,dy \\ &= g_m(x)\int_{I_m} g_m(y)\,dy - g_m(x)\int_{I_{m-1}} g_{m-1}(y)\,dy \\ &= g_m(x) - g_m(x) = 0.\end{aligned}$$

Mais, pour $x \in I_1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_{I_1} f(x,y)\,dy = \int_{I_1} g_1(x)g_1(y)\,dy = g_1(x)\int_{I_1} g_1(y)\,dy \\ = g_1(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \delta_2 \\ g_1(x) & \text{si } x \in I_1 \end{cases},$$

de sorte que

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\ dy\right] dx = \int_{I_1} g_1(x)\,dx = 1.$$

La conclusion est que, pour la fonction $f(x, y)$ définie ci-dessus, qui existe pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et qui est continue partout, sauf en $(0, 0)$, nous avons

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ dx\,dy = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ dy\,dx = 1.$$

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Évaluez les intégrales doubles suivantes *sans* les calculer en termes d'intégrales itérées. Interprétez plutôt chaque intégrale comme étant, par exemple, une aire ou un volume.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\int_{-4}^{1} dy\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx\,dy$

(c) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-x^2-y^2}\ dx\,dy$

2. Soit $f(x, y) = 12x^2y^3$. Évaluez les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^3 f(x,y)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 f(x,y)\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^3 f(x,y)\,dx\,dy$

(d) $\displaystyle\int_0^3\int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^3\int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy$

3. Pour chacun des cas suivants, évaluez l'intégrale double donnée

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

en la considérant comme une intégrale itérée.

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$ et R est le rectangle $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$, où $a>0$ et $b>0$

(b) $f(x,y)=x-3y$ et R est le triangle avec sommets $(0,0),\ (a,0),\ (0,b)$

(c) $f(x,y)=xy^2$ et R est la région finie dans le premier cadran bornée par la courbe $y=x^2$ et $x=y^2$

(d) $f(x,y)=x\cos y$ et R est la région finie dans le premier cadran bornée par les axes de coordonnées et la courbe $y=1-x^2$

(e) $f(x,y)=\frac{x}{y}e^y$ et R est la région $0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant x$

(f) $f(x,y)=\frac{xy}{1+x^4}$ et R est le triangle avec les sommets $(0,0),\ (0,1),\ (1,1)$

4. Combinez la somme des deux intégrales doubles itérées

$$\int_0^1\int_0^y f(x,y)\ dx\,dy+\int_1^2\int_0^{2-y} f(x,y)\ dx\,dy$$

en une seule intégrale double itérée avec l'ordre d'intégration inversé.

5. Considérez l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 e^{x/y}\ dy\ dx$.

(a) Esquissez le domaine d'intégration.

(b) Évaluez l'intégrale en inversant l'ordre d'intégration.

Pour mieux comprendre.

6. Pour chacune des intégrales suivantes (i) esquissez la région d'intégration, (ii) écrivez une intégrale double équivalente avec un ordre d'intégration inversé et (iii) évaluez les deux intégrales doubles.

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_1^{e^x} dydx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} dxdy$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^1\int_{x^2+4x}^{3x+2} dydx$

7. L'intégrale I est définie par

$$I = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dA = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{1/y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\sqrt{2}}^{4} \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

(a) Esquissez la région $\mathcal{R}$.

(b) Réécrire l'intégrale I en inversant l'ordre d'intégration.

(c) Calculez l'intégrale I lorsque $f(x,y) = x/y$.

8. Une région $\mathcal{E}$ dans le plan xy a la propriété que pour toutes fonctions continues f,

$$\iint_{\mathcal{E}} f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{3} \left[\int_{x^2}^{2x+3} f(x,y)dy \right] dx$$

(a) Calculez $\iint_{\mathcal{E}} x\,dA$.

(b) Esquissez la région $\mathcal{E}$.

(c) Poser $\iint_{\mathcal{E}} x\,dA$ comme étant l'intégrale ou la somme d'intégrales dans l'ordre opposé.

9. Calculez l'intégrale : $\iint_{\mathcal{D}} \sin(y^2)\ dA$ où $\mathcal{D}$ est la région bornée les droites d'équations $x + y = 0$, $2x - y = 0$, et $y = 4$.

10. Considérez l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\sin(\pi x^2)}{x}\ dx\,dy$.

(a) Esquissez la région d'intégration.

(b) Évaluez I.

11. Soit I l'intégrale double de la fonction $f(x,y) = y^2 \sin xy$ sur le triangle déterminé par les sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$ dans le plan xy.

(a) Écrire I comme une intégrale itérée de deux façons différentes.

(b) Évaluez I.

12. Trouvez le volume (V) du solide borné au-dessus par la surface d'équation $z = f(x,y) = e^{-x^2}$, et en-dessous par le plan $z = 0$ et sur le triangle dans le plan xy formé par les droites $x = 1$, $y = 0$ et $y = x$.

13. Considérez l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} \frac{y}{x}\ dx\,dy$.

(a) Esquissez la région d'intégration.

(b) Interchanger l'ordre d'intégration.

(c) Évaluez I.

14. Pour l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\ dy\,dx$.

(a) Esquissez la région d'intégration.

(b) Évaluez I.

15.

(a) $\mathcal{D}$ est la région bornée par la parabole $y^2 = x$ et la droite $y = x - 2$. Esquissez $\mathcal{D}$ et évaluez $J = \iint_{\mathcal{D}} 3y \; dA$.

(b) Esquissez la région d'intégration et ensuite évaluez l'intégrale

$$\int_0^4 \int_{\frac{1}{2}\sqrt{x}}^1 e^{y^3} \; dy \, dx.$$

16. Considérez l'intégrale itérée $\displaystyle\int_{-4}^0 \int_{\sqrt{-y}}^2 \cos(x^3) \, dx \, dy$.

(a) Dessinez la région d'intégration.

(b) Évaluez l'intégrale.

17.

(a) Combinez la somme des intégrales itérées

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) \; dx \, dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y) \; dx \, dy$$

en une seule intégrale itérée avec l'ordre d'intégration inversé.

(b) Évaluez I si $f(x,y) = \frac{e^x}{2-x}$.

18. Soit $\displaystyle I = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y}} f(x,y) \, dx \, dy$.

(a) Esquissez le domaine d'intégration.

(b) Inverser l'ordre d'intégration.

(c) Évaluez l'intégrale pour $f(x,y) = \frac{1}{(1+y)^2}$.

19. Évaluez $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-2}^{2x} e^{y^2} \; dy \, dx$.

20. Soit

$$I = \int_0^2 \int_0^x f(x,y) \; dy \, dx + \int_2^6 \int_0^{\sqrt{6-x}} f(x,y) \; dy \, dx.$$

Exprimez I comme une intégrale où on intègre d'abord par rapport à x.

21. Considérez le domaine $\mathcal{D}$ sur l'axe des x sous la parabole $y = 1 - x^2$ dans le plan xy.

(a) Esquissez $\mathcal{D}$.

(b) Exprimez $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) \; dA$ comme une intégrale itérée correspondante à l'ordre $dx \, dy$. Exprimez ensuite cette intégrale comme une intégrale itérée correspondante à l'ordre $dy \, dx$.

(c) Calculez l'intégrale dans le cas où $f(x,y) = e^{x-(x^3/3)}$.

22. Soit

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \, \sin(y^3) \, dy \, dx.$$

(a) Esquissez la région d'intégration dans le plan xy. Étiquettez votre esquisse suffisamment bien de façon à ce qu'une personne puisse déterminer les bornes de l'intégrale double.

(b) Évaluez I.

23.

(a) Considérez le solide sous la surface $z = 6 - xy$, borné par les plans d'équations $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$. Notez qu'aucune partie de ce solide se trouve sous le plan xy.

(i) Esquissez la base du solide dans le plan xy. Notez que ce n'est *pas* un carrée !

(ii) Calculez le volume du solide.

(b) Évaluez l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} \cos\left(y^{3/2}\right) \, dy \, dx.$

24. Évaluez l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin(\pi x^3) \, dx dy.$

25. L'intégrale itérée

$$I = \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sin\left(y^3 - 3y\right) \, dy \right] dx$$

est égale à $\iint_{\mathcal{R}} \sin\left(y^3 - 3y\right) \, dA$ pour une région $\mathcal{R}$ dans le plan xy.

(a) Esquissez la région R.

(b) Écrivez l'intégrale I avec l'ordre d'intégration inversé, et avec les bonnes bornes d'intégrations.

(c) Trouvez I.

26. Trouvez l'intégrale double de la fonction $f(x,y) = xy$ sur la région bornée par les courbes d'équations $y = x - 1$ et $y^2 = 2x + 6$.

27. Trouvez le volume du solide à l'intérieur du cylindre $x^2 + 2y^2 = 8$, au-dessus du plan $z = y - 4$ et sous le plan $z = 8 - x$.

Pour aller plus loin.

28. Considérez le volume au-dessus du plan xy qui se trouve à l'intérieur du cylindre circulaire $x^2 + y^2 = 2y$ et sous la surface $z = 8 + 2xy$.

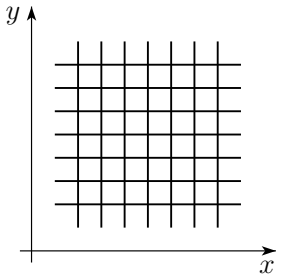
(a) Exprimez ce volume comme une intégrale double I, en posant clairement le domaine sur lequel I est considérée.

(b) Exprimez en coordonnées cartésiennes, l'intégrale double I comme une intégrale itérée de deux façons différentes, en indiquant clairement les bornes d'intégrations dans chaque cas.

(c) Quel est ce volume ?

3.2 Intégrales doubles en coordonnées polaires

Jusqu'à présent, lorsque nous avons défini les intégrales doubles, nous avons toujours subdivisé la région d'intégration en petits sous-rectangles à l'aide de droites parallèles aux axes de coordonnées.



Il n'y a rien qui nous oblige à subdiviser la région de la sorte. En effet, lorsque les régions sont circulaires et centrées à l'origine, il sera souvent avantageux d'utiliser des coordonnées polaires au lieu des coordonnées cartésiennes habituelles.

Coordonnées polaires

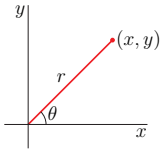
Commençons par un rappel sur les coordonnées polaires.

Définition 3.2.1

Les coordonnées polaires d'un point (x, y) dans le plan Oxy sont :

(a) r est la distance de $(0, 0)$ à (x, y) ;

(b) θ est l'angle orienté (sens antihoraire) entre l'axe des x et le segment de droite joignant le point $(0, 0)$ à (x, y).



Les coordonnées polaires et cartésiennes sont reliées par les formules suivantes, qu'on déduit avec un peu de trigonométrie.

Formule 3.2.2

Les formules de conversion entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires sont

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Les deux figures suivantes montrent des droites formées de points dont l'angle θ est constant et où r varie (figure de gauche), et des courbes formées de points où r est constant et dont l'angle θ varie (figure de droite).

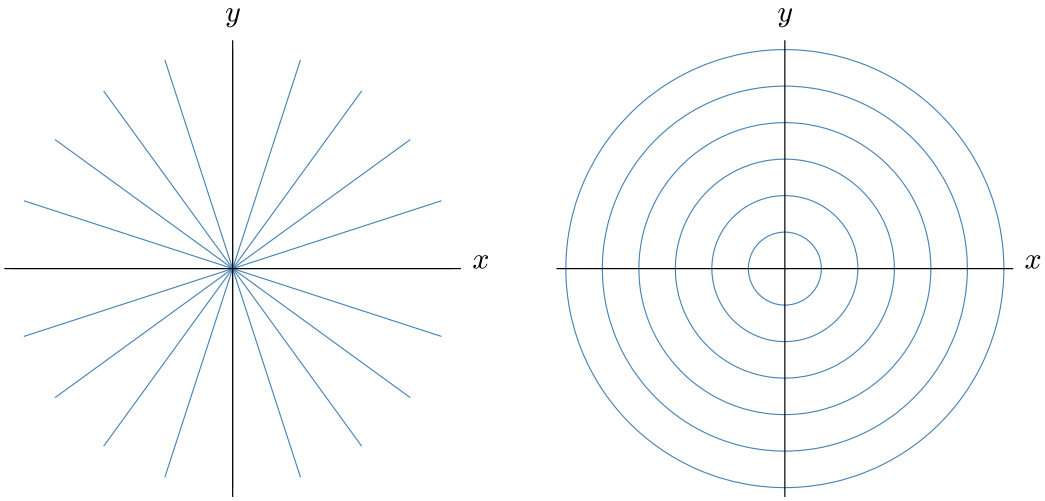
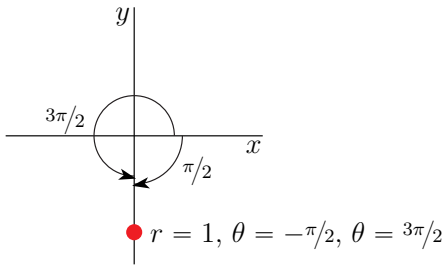
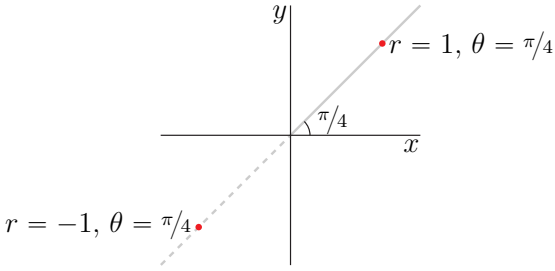


Figure 3.2.3 Graphes des courbes θ =constante, et r =constante.

Notons que l'angle θ est seulement défini jusqu'à un multiple de 2π. Par exemple, le point $(1,0)$ sur l'axe des x peut avoir un angle $\theta = 0$, mais aussi $\theta = 2\pi$ ou $\theta = 4\pi$. De plus, il est parfois pertinent d'avoir des angles négatifs. Lorsque $\theta \leqslant 0$, l'angle doit être mesuré dans le sens horaire. Par exemple, le point $(0,-1)$ sur la portion négative de l'axe des y peut avoir $\theta = -\frac{\pi}{2}$, mais aussi $\theta = \frac{3\pi}{2}$.



Il est donc judicieux d'étendre les définitions de $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ même lorsque r est négatif. Par exemple, la figure ci-contre montre (x,y) avec $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et avec $r = -1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Les deux points se trouvent sur la droite faisant un angle de $\pi/4$ radian avec l'axe des abscisses, et les deux points se trouvent à la même distance de l'origine, mais de part et d'autre de l'origine.



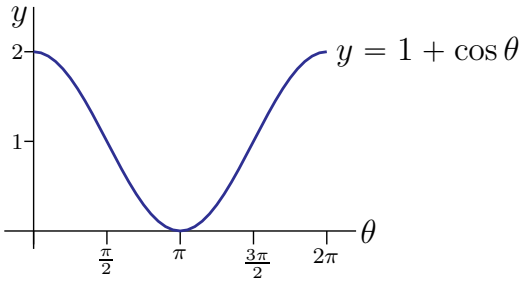
Courbes en coordonnées polaires

Voyons quelques exemples de tracés de courbes définies par leurs équations en coordonnées polaires.

Exemple 3.2.4 La cardioïde.

Il s'agit de la courbe d'équation

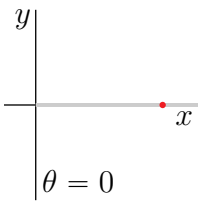
$$r(\theta) = 1 + \cos\theta.$$

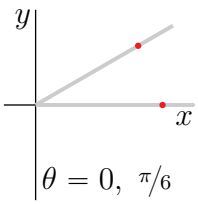


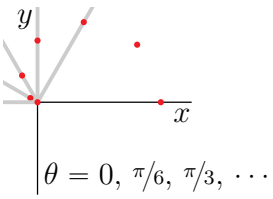
Nous commençons par étudier les valeurs que prend $1 + \cos\theta$ lorsque θ varie. Pour ce faire, il est utile de tracer d'abord le graphe usuel (dans le plan θy, comme en calcul à une variable) de la fonction $y = 1 + \cos\theta$, illustré ci-contre.

Prenons maintenant quelques valeurs communes de θ, calculons les valeurs de r correspondantes et traçons ces points.

- Lorsque $\theta = 0$, nous avons $r = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$. Afin d'illustrer le point avec $\theta = 0$ et $r = 2$, commençons par tracer la demi-droite formée de tous les points avec $\theta = 0$ et $r > 0$. Il s'agit précisément de l'axe des x, en gris dans la figure de gauche ci-dessous. Puis, nous devons placer un point sur cette demi-droite, à une distance $r = 2$ de l'origine. Nous avons donc notre premier point, c'est le point rouge dans la figure.
- Augmentons maintenant la valeur de θ, jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{6}$. Alors, $r = 1 + \cos\theta$ diminue à $r = 1 + \cos\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.87$. Pour illustrer le point avec $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $r \approx 1.87$, nous traçons en premier lieu la demi-droite formée des points vérifiant $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $r > 0$. Il s'agit de la demi-droite oblique, en gris dans la deuxième figure ci-dessous. Puis, nous plaçons un point à une distance d'environ 1.87 de l'origine. C'est notre second point rouge dans la figure.

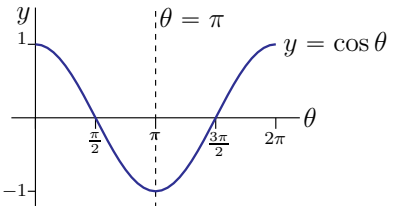




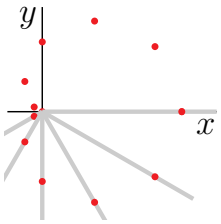


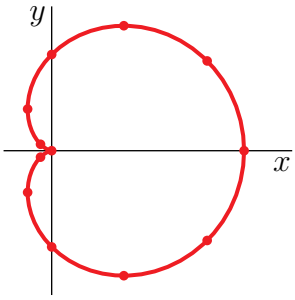
- Augmentons ensuite θ davantage, par exemple :
  - $\theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,
  - puis $\theta = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$,
  - puis $\theta = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$,
  - puis $\theta = \frac{5\pi}{6}$,
  - puis $\theta = \frac{6\pi}{6} = \pi$.
  - puis $\cdots$.

  Au fur et à mesure que θ augmente, $r(\theta) = 1 + \cos\theta$ diminue à $r = 1$ lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, et finalement jusqu'à $r = 0$, soit lorsque $\theta = \pi$. Pour chacune des valeurs de θ, nous traçons d'abord la demi-droite avec la valeur donnée de θ et $r \geqslant 0$. Il s'agit des demi-droites grises dans la figure de droite ci-dessus. Puis, nous plaçons un point rouge à une distance $r = 1 + \cos\theta$ de l'origine. Ce sont les points rouges dans la figure.
- Nous pouvons continuer ce processus pour $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Par contre, en regardant le graphique de la fonction $\cos\theta$, nous remarquons que la courbe de $\cos\theta$ définie sur $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ est une réflexion par rapport à la droite verticale $\theta = \pi$ de la courbe définie sur $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.



- En termes plus précis, nous avons $\cos(\pi+\theta) = \cos(\pi-\theta)$, de sorte que $r(\pi+\theta) = r(\pi-\theta)$. Nous obtenons donc la figure ci-dessous, à gauche. Finalement, nous relions les points rouges pour obtenir la courbe ci-dessous, à droite. Cette courbe est appelée une *cardioïde* puisqu'elle ressemble à un cœur (le mot « cardioïde » vient du mot grec $\kappa\alpha\rho\delta\iota\alpha$, qui signifie « qui a la forme d'un cœur »).

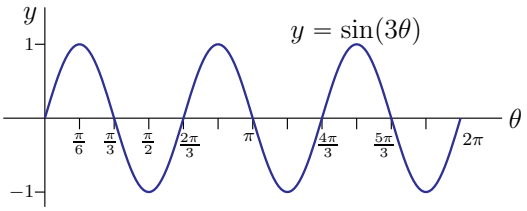




$r = 1 + \cos(\theta)$

Exemple 3.2.5 La rosace à trois pétales.

Utiliser la même procédure pour esquisser le graphe de $r = \sin(3\theta)$. De nouveau, il est utile d'esquisser le graphe de $\sin(3\theta)$. Pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, nous avons, ci-contre, le graphe usuel de cette fonction.



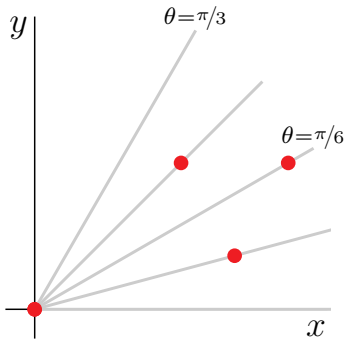
Étant donné que $r(\theta+\pi) = \sin(3\theta+3\pi) = -\sin(3\theta) = -r(\theta)$, la partie de la courbe r définie sur $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ se répète sur $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Nous nous intéresserons donc seulement à l'intervalle $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

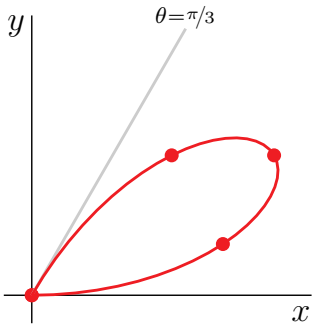
- Nous allons d'abord considérer $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$, de sorte que $0 \leqslant 3\theta \leqslant \pi$. Sur cet intervalle, la relation $r(\theta) = \sin(3\theta)$
  - commence à $r(0) = 0$, puis
  - r augmente au fur et à mesure que θ augmente, jusqu'à ce que
  - $3\theta = \frac{\pi}{2}$, soit $\theta = \frac{\pi}{6}$, où $r\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, et ensuite
  - r diminue lorsque θ continue d'augmenter, jusqu'à ce que
  - $3\theta = \pi$, soit $\theta = \frac{\pi}{3}$, donc $r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ de nouveau.

Voici une table de quelques valeurs de $r(\theta)$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$. Remarquons que nous avons choisi des valeurs de θ pour lesquelles $\sin(3\theta)$ se calcule aisément.

θ	3θ	$r(\theta)$
0	0	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$
$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$
$\frac{4\pi}{12}$	π	0

Voici un dessin illustrant les points correspondants (figure de gauche) ainsi qu'une figure de la courbe définie sur $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$.

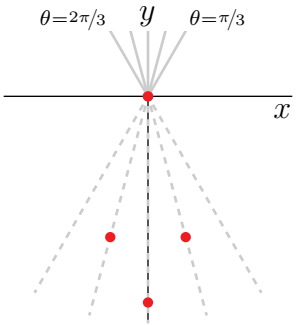


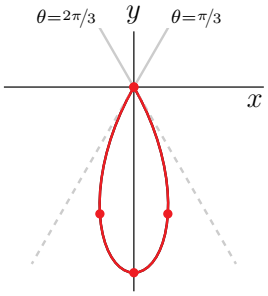


- Ensuite, considérons $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{3}$, de sorte que $\pi \leqslant 3\theta \leqslant 2\pi$. Sur cet intervalle, $r(\theta) = \sin(3\theta)$
  - commence à $r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, puis
  - r diminue lorsque θ augmente, jusqu'à ce que
  - $3\theta = \frac{3\pi}{2}$, soit $\theta = \frac{\pi}{2}$, où $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, puis
  - r augmente lorsque θ augmente encore, jusqu'à ce que
  - $3\theta = 2\pi$, soit $\theta = \frac{2\pi}{3}$, donc $r\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$ de nouveau.

  Nous obtenons maintenant, pour la première fois, des valeurs négatives de $r(\theta)$. La figure de gauche ci-dessous illustre, pour chaque $\theta = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$,
  - la demi-droite pointillée formée des points pour cette valeur de θ et $r < 0$, et
  - le point rouge correspondant à cette valeur de θ et $r(\theta) = \sin(3\theta)$.

  La figure de droite illustre la courbe $r = \sin(3\theta)$ définie sur $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{3}$.



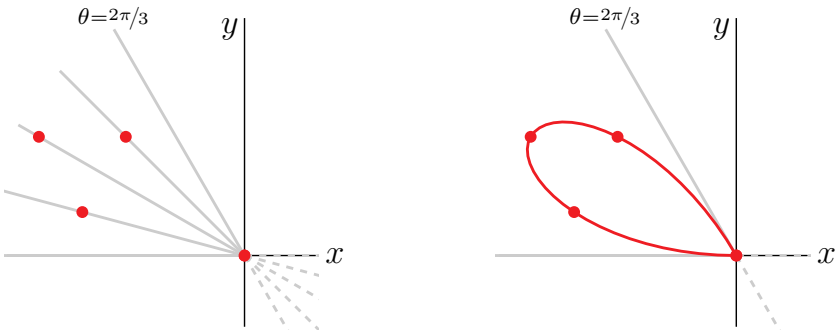


- Finalement, considérons $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \pi$, de sorte que $2\pi \leqslant 3\theta \leqslant 3\pi$. Sur cet intervalle, $r(\theta) = \sin(3\theta)$
  - commence à $r\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, puis
  - r augmente lorsque θ augmente aussi, jusqu'à ce que
  - $3\theta = \frac{5\pi}{2}$, soit $\theta = \frac{10\pi}{12}$, où $r\left(\frac{10\pi}{12}\right) = 1$, et alors
  - r diminue lorsque θ continue d'augmenter, jusqu'à ce que
  - $3\theta = 3\pi$, soit $\theta = \frac{12\pi}{12} = \pi$, donc $r(\pi) = 0$ de nouveau.

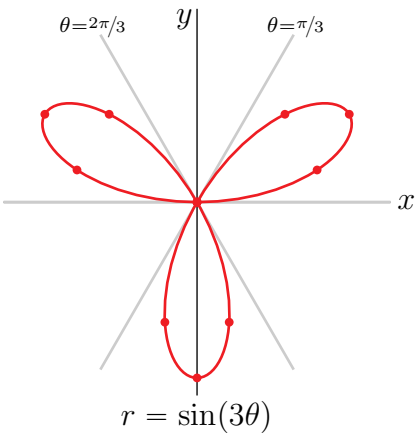
  La figure de gauche ci-dessous illustre, pour chaque $\theta = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{12}$, $\frac{10\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{12\pi}{12} = \pi$,
  - la demi-droite formée des points pour cette valeur de θ et $r \geqslant 0$, et

- le point rouge correspondant à cette valeur de θ et $r(\theta) = \sin(3\theta)$.

La figure de droite illustre la courbe $r = \sin(3\theta)$ définie sur $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \pi$.



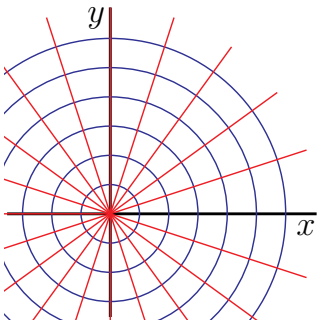
En ajoutant les trois courbes ensemble, nous obtenons la courbe complète qui se nomme la « rosace à trois pétales ».

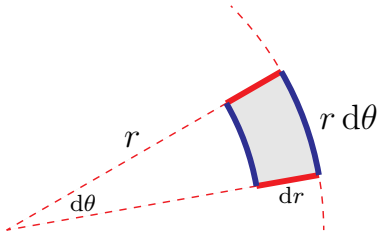


Intégrales en coordonnées polaires

Revenons au problème de l'utilisation des coordonnées polaires pour calculer des intégrales doubles. Jusqu'à présent, nous avons utilisé des coordonnées cartésiennes, cela implique que nos domaines d'intégration ont été divisés en sous-rectangles avec les côtés déterminés par des droites x = constante et y = constante. Sur ces sous-rectangles, nous avons fait l'hypothèse que l'intégrande $f(x, y)$ est essentiellement constant (ce qui s'explique par la continuité). Pour utiliser les coordonnées polaires, nous allons maintenant diviser la région d'intégration avec des droites θ = constante et des courbes r = constante. Le plan Oxy est ainsi découpé en des formes qui ressemblent approximativement à des rectangles.

Voici ce découpage (figure de gauche), ainsi qu'un agrandissement d'un de ces « sous-rectangles » approximatifs (figure de droite).





Un des côtés a une largeur de dr, la distance séparant les courbes $r =$ constante. L'autre côté est un arc de cercle de rayon r qui sous-tend l'angle au centre $d\theta$, l'angle séparant deux droites consécutives d'équation $\theta =$ constante. Puisque la circonférence du cercle est $2\pi r$ et puisque l'angle $d\theta$ est la portion $\frac{d\theta}{2\pi}$ d'un cercle complet[1], l'autre côté de ce rectangle approximatif est de longueur $\frac{d\theta}{2\pi} 2\pi r = r d\theta$. Ainsi, l'aire approximative de ce sous-rectangle polaire est donnée par la formule suivante.

Formule 3.2.6

L'élément d'aire en coordonnées polaires est donné par $dA = r\, dr\, d\theta$

En comparaison, rappelons que, avec les coordonnées cartésiennes, nous avions $dA = dx\, dy$.

Dans ce calcul informel, il y a plusieurs détails techniques qui ont été omis. Cependant, l'utilisation de cette procédure dans la définition rigoureuse d'une intégrale, c'est-à-dire dans laquelle on définit dr et $d\theta$ comme des constantes multipliées par $\frac{1}{n}$, suivies d'une limite lorsque $n \to \infty$, donne, après passage à la limite, une erreur nulle.

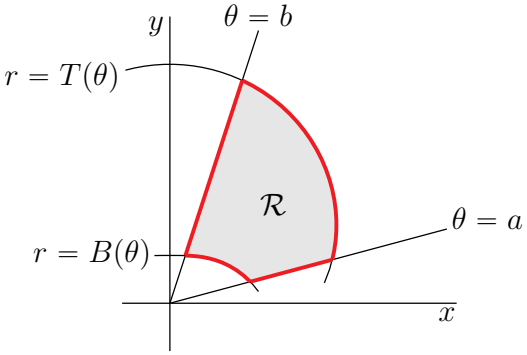
Exemple 3.2.7 Masse.

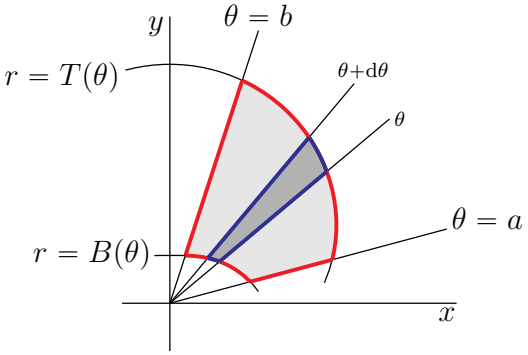
Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$ des constantes et $\mathcal{R}$ la région

$$\mathcal{R} = \left\{ \, (r\cos\theta, r\sin\theta) \;\middle|\; a \leqslant \theta \leqslant b, B(\theta) \leqslant r \leqslant T(\theta) \, \right\},$$

où $T(\theta)$ et $B(\theta)$ sont des fonctions continues et vérifient $B(\theta) \leqslant T(\theta)$ pour tout $a \leqslant \theta \leqslant b$. Trouver la masse de $\mathcal{R}$ si la densité est $f(x, y)$.

Solution. La figure ci-dessous, à gauche, est une esquisse de $\mathcal{R}$. Notons que $r = T(\theta)$ est la courbe extérieure, et $r = B(\theta)$, la courbe intérieure.



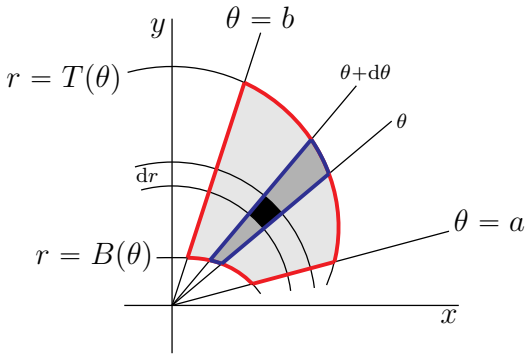


Divisons $\mathcal{R}$ en quartiers (comme des pointes de pizza) en traçant plusieurs droites avec θ constant, dont les valeurs de θ diffèrent d'une petite quantité $d\theta$. La figure de droite,

[1] Il faut mesurer les angles en radians.

ci-haut, montre un de ces quartiers, borné par des lignes bleues.

On peut diviser un de ces quartiers en sous-rectangles polaires, en traçant plusieurs cercles avec r constant, dont les valeurs de r sont séparées par une petite quantité dr. La figure ci-contre montre un de ces sous-rectangles polaires en noir.



Concentrons-nous maintenant sur un de ces sous-rectangles polaires, disons celui qui contient le point de coordonnées polaires $(r,\ \theta)$. Comme nous l'avons vu à la formule 3.2.6 précédente :

- L'aire de ce sous-rectangle est approximativement donnée par $dA = r\,dr\,d\theta$.
- Comme la densité de masse du sous-rectangle est essentiellement $f(x,y) = f\,(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, la masse de ce sous-rectangle est essentiellement $f\,(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\ r\,dr\,d\theta$.
- Afin de trouver la masse d'un quartier, par exemple celui dont l'angle (polaire) varie de θ à $\theta + d\theta$, nous additionnons simplement les masses des sous-rectangles composant ce quartier. Cela se fait en intégrant par rapport à r, de sa valeur inférieure, soit $B(\theta)$, jusqu'à sa valeur supérieure, soit $T(\theta)$. La masse du quartier est alors

$$\left[\int_{B(\theta)}^{T(\theta)} f\,(r\cos\theta\ r\sin\theta)\,r\,dr\right]\ d\theta.$$

- Finalement, afin de calculer la masse de $\mathcal{R}$, nous n'avons qu'à additionner les masses des différents quartiers, ce qui correspond à intégrer par rapport à θ, de sa valeur la plus petite jusqu'à sa valeur la plus grande sur $\mathcal{R}$, soit de a à b.

En conclusion,

$$\text{Masse}(\mathcal{R}) = \int_a^b \int_{B(\theta)}^{T(\theta)} f\,(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Nous avons utilisé le mot « essentiellement » afin d'éviter certains détails techniques nécessaires pour établir une démarche rigoureuse. La preuve rigoureuse de la formule 3.2.8 peut être obtenue avec ces mêmes idées de base, mais nécessite de résoudre certaines erreurs d'approximation. Cela est fait au paragraphe Justification de la formule du calcul de l'aire en coordonnées polaires, plus bas.

De l'exemple précédent découle la formule du calcul de la masse de la région

$$\mathcal{R} = \left\{\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\ \middle|\ a \leqslant \theta \leqslant b, B(\theta) \leqslant r \leqslant T(\theta)\ \right\}$$

avec densité $f(x,y)$, c'est-à-dire

Formule 3.2.8

$$\textit{Masse}\ (\mathcal{R}) = \int_a^b \int_{B(\theta)}^{T(\theta)} f\left(r\cos\theta,\, r\sin\theta\right)\ r\,dr\,d\theta.$$

Nous pouvons d'emblée adapter l'exemple afin de calculer des aires, en posant la densité à 1.

Formule 3.2.9

Soit $\mathcal{R}$ la région donnée par

$$\mathcal{R} = \left\{\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\ \middle|\ a \leqslant \theta \leqslant b, 0 \leqslant r \leqslant \phi(\theta)\ \right\},$$

où $\phi(\theta) \geqslant 0$ est une fonction continue. Alors l'aire de la région $\mathcal{R}$ est égale à

$$\textit{Aire}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\int_a^b \phi(\theta)^2\ d\theta.$$

Démonstration. Pour obtenir l'aire de $\mathcal{R}$, nous devons simplement lui attribuer une densité égale à 1 et calculer sa masse. Ainsi, en vertu de la formule 3.2.8, avec $f(x,y) = 1$, $B(\theta) = 0$ et $T(\theta) = \phi(\theta)$,

$$\text{Aire}(\mathcal{R}) = \int_a^b \int_0^{\phi(\theta)} r\,dr\,d\theta.$$

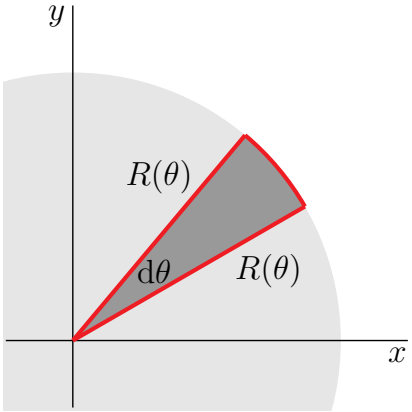
On peut donc intégrer facilement par rapport à r, ce qui donne

$$\text{Aire}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\int_a^b \phi(\theta)^2\ d\theta.$$

■

Remarque 3.2.10

L'expression $\frac{1}{2}\phi(\theta)^2\ d\theta$ dans la formule 3.2.9 a une interprétation géométrique. En effet, il s'agit de l'aire d'un secteur d'un disque de rayon $\phi(\theta)$ (avec $\phi(\theta)$ traité comme une constante) qui sous-tend l'angle $d\theta$. Cela s'explique par le fait que l'aire du secteur est la fraction $\frac{d\theta}{2\pi}$ de l'aire du disque complet, qui est $\pi\phi(\theta)^2$. Ainsi, la formule 3.2.9 dit simplement que l'aire de $\mathcal{R}$ peut être calculée en découpant $\mathcal{R}$ en secteurs minces, puis en additionnant leur aire.



Exemple 3.2.11 Aire en coordonnées polaires.

Calculer l'aire de la région du plan bornée par la rosace à trois pétales $r = \sin(3\theta)$.

Solution. En observant la dernière figure de l'exemple 3.2.5, nous devons calculer le triple de l'aire de la région

$$\mathcal{R} = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \;\middle|\; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3},\ 0 \leqslant r \leqslant \sin(3\theta) \right\}.$$

Ainsi, par la formule 3.2.9, avec $a = 0$, $b = \frac{\pi}{3}$ et $R(\theta) = \sin(3\theta)$,

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(\mathcal{R}) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(3\theta)\ d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos(6\theta))\ d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{6}\sin(6\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Dans la première étape, nous avons appliqué l'identité de l'angle double $\cos(2\phi) = 1 - 2\sin^2(\phi)$. Sans surprise, les identités trigonométriques apparaissent souvent lorsque les coordonnées polaires sont utilisées.



À vous de jouer 3.2.12

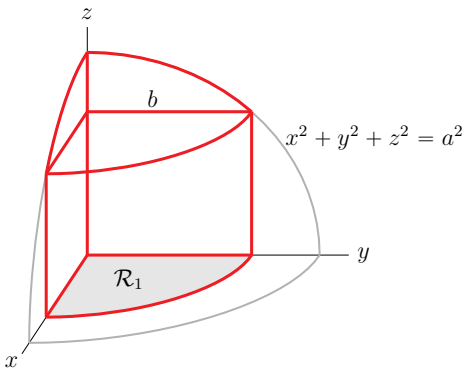
En utilisant les coordonnées polaires, évaluez l'intégrale qui donne l'aire de la région du premier quadrant, sous la droite $y = 10$ et comprise entre les cercles $x^2 + y^2 = 400$ et $x^2 - 20x + y^2 = 0$.

Exemple 3.2.13 Volume avec coordonnées polaires.

Un trou cylindrique de rayon b est percé symétriquement au centre d'une sphère en métal de rayon $a \geqslant b$. Calculer le volume du métal qui aura été enlevé.

Solution. Utilisons un système de coordonnées avec le centre de la sphère à l'origine $(0, 0, 0)$ et dont l'axe du cylindre coïncide avec l'axe des z. Notamment, la sphère est donnée par $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$.

Voici une esquisse de la portion de la sphère dans le premier octant. Le trou percé dans la sphère est tracé en rouge. Par symétrie, le volume total du métal enlevé sera huit fois le volume de la partie enlevée du premier octant.



Nous devons donc multiplier par huit le volume du solide

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; (x, y) \in \mathcal{R}_1,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right\}$$

avec comme région de base

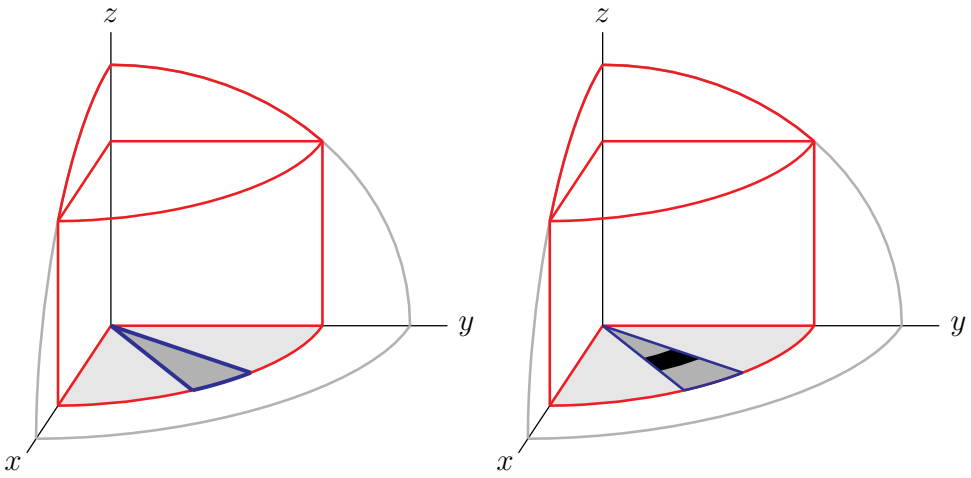
$$\mathcal{R}_1 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqslant b^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \right\}.$$

En coordonnées polaires :

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \;\middle|\; (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathcal{R}_1,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-r^2} \right\},$$
$$\mathcal{R}_1 = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \;\middle|\; 0 \leqslant r \leqslant b,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Nous suivons notre stratégie habituelle : diviser, additionner puis obtenir une intégrale lors du passage à la limite. Nous découpons la région $\mathcal{R}_1$ en petits morceaux et additionnons le volume des portions au-dessus de chacun de ces morceaux.

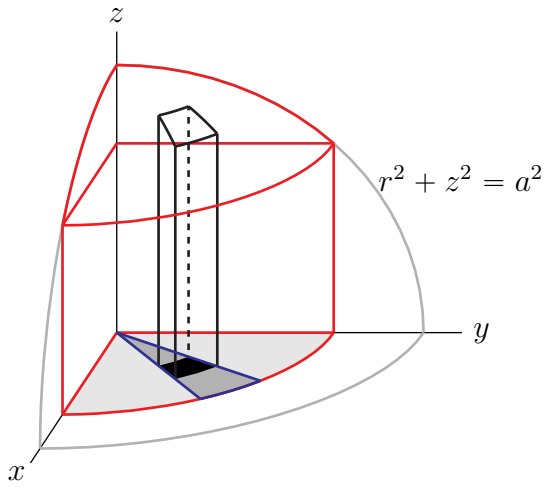
- Divisons donc $\mathcal{R}_1$ en secteurs en traçant plusieurs droites avec θ constant dont les valeurs diffèrent d'une petite quantité $d\theta$. La figure de gauche ci-dessous montre un de ces secteurs, en bleu.



- Concentrons-nous sur un de ces secteurs, qu'on divise à son tour en « sous-rectangles approximatifs » en traçant plusieurs cercles avec r constant. Les différentes valeurs de r diffèrent d'une petite quantité dr. La figure de droite ci-dessus montre un de ces « sous-rectangles approximatifs », en noir.

- Regardons de plus près un de ces rectangles. Il contient un point dont les coordonnées polaires sont (r,θ). Comme nous l'avons vu à la formule 3.2.6 :

  - L'aire de ce petit sous-rectangle est essentiellement $dA = r\,dr\,d\theta$.
  - La portion de $\mathcal{V}_1$ qui se trouve au-dessus de ce sous-rectangle est essentiellement un parallélépipède dont la hauteur est $\sqrt{a^2-r^2}$ et dont la base a une aire de $dA = r\,dr\,d\theta$. Ce solide est tracé en noir dans la figure ci-dessous. Ainsi, le volume de la portion de $\mathcal{V}_1$ qui se trouve au-dessus de notre « sous-rectangle » est essentiellement $\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta$.

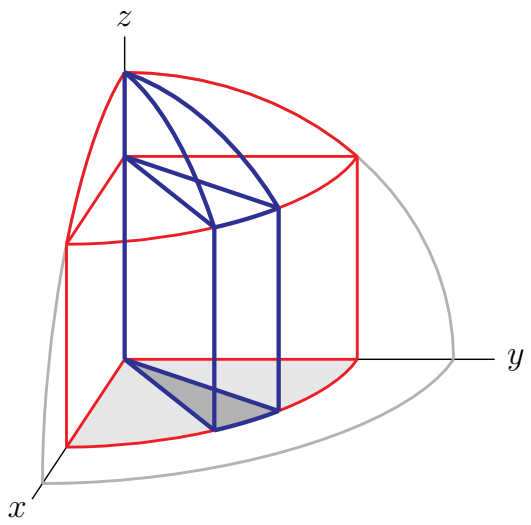


- Afin d'obtenir le volume de $\mathcal{V}_1$, nous devons donc calculer

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^b \sqrt{a^2 - r^2}\; r\, dr\, d\theta.$$

Notons que l'intégrale à l'intérieur est indépendante de θ, ce qui s'explique par le fait que le volume du solide obtenu (tracé en bleu dans la figure ci-dessous) ne change pas lorsque θ varie, c'est-à-dire lorsque nous effectuons une rotation par rapport à l'axe des z. On peut donc la sortir de l'intégrale extérieure afin d'obtenir le produit de deux intégrales (on peut comparer ce résultat au théorème 3.1.7).

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \int_0^b \sqrt{a^2 - r^2}\; r\, dr\, d\theta &= \left[\int_0^{\pi/2} d\theta\right] \left[\int_0^b \sqrt{a^2 - r^2}\; r\, dr\right] \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{a^2}^{a^2 - b^2} \frac{\sqrt{u}}{-2}\, du, \\
&\qquad \text{où } u = a^2 - r^2, \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{-3}\right]_{a^2}^{a^2 - b^2} \\
&= \frac{\pi}{6} \left[a^3 - \left(a^2 - b^2\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}$$



- Finalement, nous devons multiplier par huit cette valeur. Le volume total du métal enlevé est donc

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{V}) &= 8\,\text{Volume}(\mathcal{V}_1)\\ &= \frac{4\pi}{3}\left[a^3 - \left(a^2-b^2\right)^{3/2}\right].\end{aligned}$$

Nous pouvons faire quelques vérifications avant de poursuivre.

- Si le rayon du trou est $b = 0$, aucun métal n'est enlevé. Notre réponse est cohérente avec ce cas particulier.
- Si le rayon du trou est $b = a$, le rayon du trou est celui de la sphère, de sorte qu'on enlève tout le métal contenu dans la sphère. À nouveau, dans ce cas, notre réponse donne $\frac{4}{3}\pi a^3$, le volume de la sphère.
- Si les deux rayons sont mesurés en mètres, le volume du solide enlevé, $\frac{4\pi}{3}\left[a^3 - \left(a^2-b^2\right)^{3/2}\right]$, a des unités de mètres cubes, comme il se doit.

Les deux problèmes précédents ont été énoncés, ou presque, en coordonnées polaires. Voyons maintenant comment passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires, et reconnaître quand il est utile de le faire.

Exemple 3.2.14 Passage aux coordonnées polaires.

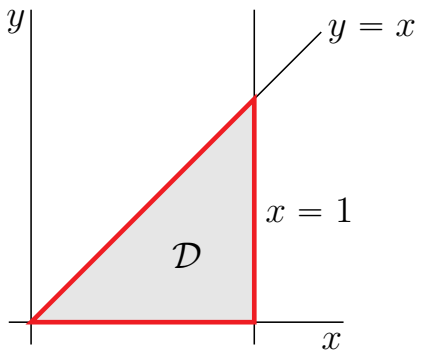
Transformer l'intégrale $\int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$ en coordonnées polaires et l'évaluer.

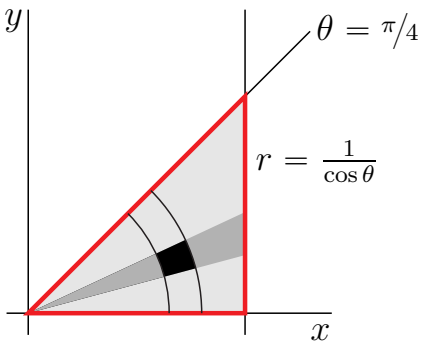
Solution. Commençons par établir une expression du domaine d'intégration en coordonnées polaires.

De l'intégrale donnée, $\int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$, on déduit que la région d'intégration est

$$\mathcal{D} = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\ \right\},$$

qui est esquissée dans la figure de gauche ci-dessous. Il s'agit d'un triangle rectangle.





Voyons maintenant comment chacune des droites qui forment la frontière de cette région s'exprime en coordonnées polaires.

- L'axe des abscisses $y = r\sin\theta = 0$ est simplement $\theta = 0$.
- La droite $x = 1$ est $r\cos\theta = 1$ ou encore $r = \frac{1}{\cos\theta}$.
- Finalement, dans le premier quadrant, la droite

$$y = x \iff r\sin\theta = r\cos\theta \iff \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, en coordonnées polaires, on peut écrire le domaine d'intégration sous la forme

$$\mathcal{R} = \left\{(r,\theta) \;\middle|\; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos\theta}\right\}.$$

Transformons maintenant l'intégrande $y\sqrt{x^2+y^2}$. Nous avons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $dx\,dy = dA = r\,dr\,d\theta$, de sorte que l'intégrande (incluant dA) devient

$$y\sqrt{x^2+y^2}\;dy\,dx = (r\sin\theta)\cdot r\cdot r\,dr\,d\theta = r^3\sin\theta\,dr\,d\theta.$$

Nous pouvons maintenant écrire notre intégrale en coordonnées polaires.

$$\int_0^1\int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\;dy\,dx = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^3\sin\theta\;dr\,d\theta$$

L'intégrale par rapport à r traite θ comme une constante, on peut donc sortir $\sin\theta$ de l'intégrale intérieure.

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\;dy\,dx &= \int_0^{\pi/4}\sin\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^3\;dr\,d\theta\\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\sin\theta\frac{1}{\cos^4\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

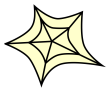
Effectuons le changement de variables.

$$u = \cos\theta,\ du = -\sin\theta\;d\theta$$

Lorsque $\theta = 0$, $u = \cos\theta = 1$ et, lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$, $u = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\;dy\,dx &= \frac{1}{4}\int_1^{1/\sqrt{2}} -\frac{1}{u^4}\;du\\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{u^{-3}}{-3}\right]_1^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{12}\left[2\sqrt{2}-1\right].\end{aligned}$$

À vous de jouer 3.2.15



Soit la forme solide ressemblant à un cornet de crème glacée, délimitée par les fonctions $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et $z = \sqrt{18-x^2-y^2}$. Écrire une intégrale en coordonnées polaires pour trouver le volume de ce cornet de crème glacée.

Instructions : Entrer la fonction à intégrer dans la première case-réponse, en écrivant *theta* pour θ. Selon l'ordre d'intégration choisi, entrer *dr* et *dtheta* dans l'ordre désiré dans les deuxième et troisième cases-réponses avec un seul *dr* ou *dtheta* dans chaque case. Ensuite, entrer les bornes d'intégration et évaluer l'intégrale pour trouver le volume.

$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta$ _____ _____ _____

$\alpha =$ _____

$\beta =$ _____

$\gamma =$ _____

$\delta =$ _____

Le volume demandé est _____.

Exemple 3.2.16

Trouver l'aire de la région à l'intérieur du cercle $r = 4\cos\theta$, mais à gauche de la droite $x = 1$.

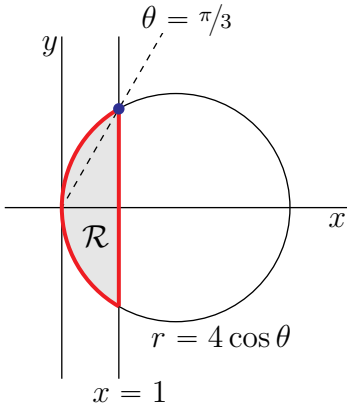
Solution. Avant de commencer, vérifions que $r = 4\cos\theta$ est effectivement un cercle et trouvons à quoi ressemble ce cercle. Dès lors, nous convertissons l'équation $r = 4\cos\theta$ en coordonnées cartésiennes. En multipliant les deux côtés par r, nous obtenons

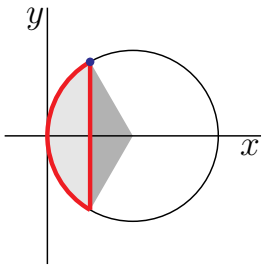
$$r^2 = 4r\cos\theta \iff x^2+y^2 = 4x \iff (x-2)^2+y^2 = 4.$$

Ainsi, $r = 4\cos\theta$ est le cercle de rayon 2 centré en $(2,0)$. Nous devons également trouver les points d'intersection du cercle $r = 4\cos\theta$ avec la droite $x = r\cos\theta = 1$. En ces points,

$$\begin{aligned} r\cos\theta = 1 \text{ et } r = 4\cos\theta &\implies \frac{1}{\cos\theta} = 4\cos\theta \\ &\implies \cos^2\theta = \frac{1}{4} \\ &\implies \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \text{puisque } r\cos\theta = 1 > 0 \\ &\implies \theta = \pm\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Voici une esquisse de la région qui nous intéresse, nommons-la $\mathcal{R}$ (figure de gauche). Nous pourrions déterminer son aire en utilisant un peu de géométrie élémentaire, puisqu'il s'agit d'un secteur circulaire duquel nous avons enlevé un triangle, comme illustré dans la figure de droite.



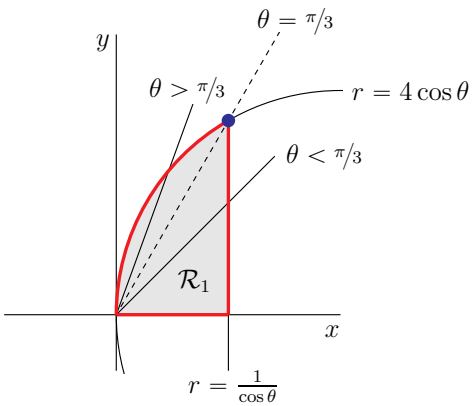


Continuons cependant notre calcul en utilisant une intégrale double en coordonnées polaires.

Puisque $\mathcal{R}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathcal{R}$ est deux fois l'aire de la portion de $\mathcal{R}$ qui se trouve au-dessus de l'axe des x. Nommons $\mathcal{R}_1$ cette moitié supérieure de $\mathcal{R}$. Notons que la droite $x = 1$ en coordonnées polaires s'écrit sous la forme $r = \frac{1}{\cos\theta}$. Voici une esquisse de $\mathcal{R}_1$.

Remarquons que, sur $\mathcal{R}_1$, pour tout θ fixé entre 0 et $\frac{\pi}{2}$,

- si $\theta < \frac{\pi}{3}$, alors r varie de 0 à $\frac{1}{\cos\theta}$, tandis que
- si $\theta > \frac{\pi}{3}$, alors r varie de 0 à $4\cos\theta$.



Ceci nous oblige naturellement à séparer en deux notre domaine d'intégration, soit à $\theta = \frac{\pi}{3}$:

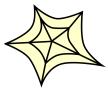
$$\text{Aire}(\mathcal{R}_1) = \int_0^{\pi/3} \int_0^{1/\cos\theta} r \; dr \, d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} r \; dr \, d\theta.$$

Puisque $\int r \; dr = \frac{r^2}{2} + C$,

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(\mathcal{R}_1) &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sec^2\theta}{2} \, d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 8\cos^2\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\tan\theta \Big|_0^{\pi/3} + 4\int_{\pi/3}^{\pi/2} \big[1 + \cos(2\theta)\big] \; d\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}$$

et finalement $\text{Aire}(\mathcal{R}) = 2\text{Aire}(\mathcal{R}_1) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

À vous de jouer 3.2.17



En utilisant les coordonnées polaires, évaluez l'intégrale $\iint_R \sin(x^2+y^2)\,dA$, où R est la région $1 \leq x^2+y^2 \leq 64$.

Justification de la formule du calcul de l'aire en coordonnées polaires

Nous avons précédemment établi la formule du calcul de l'aire en coordonnées polaires, la formule 3.2.9, de façon peu rigoureuse. Nous avons notamment utilisé le terme « essentiellement » à plus d'une reprise. Voyons maintenant la justification rigoureuse pour arriver à cette formule.

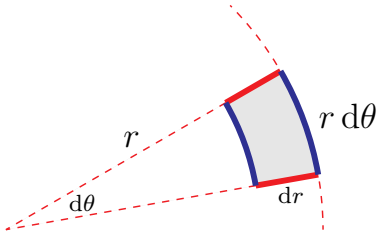
Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$. Dans l'exemple 3.2.7 et dans la preuve de la formule 3.2.9, nous avons établi la formule

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \phi(\theta)^2\,d\theta$$

pour l'aire de la région

$$\mathcal{R} = \left\{ \ (r\cos\theta, r\sin\theta) \ \middle| \ a \leqslant \theta \leqslant b,\ 0 \leqslant r \leqslant \phi(\theta) \ \right\}.$$

Tout au long de l'argumentation, nous avons approximé l'aire de la région ombragée par $dA = r\,dr\,d\theta$.



Nous allons justifier cette approximation sous l'hypothèse qu'il existe M et $L \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 \leqslant \phi(\theta) \leqslant M \qquad \text{et} \qquad |\phi'(\theta)| \leqslant L$$

pour tout $a \leqslant \theta \leqslant b$, c'est-à-dire que $\phi(\theta)$ est borné et que sa dérivée existe et est bornée également.

On divise l'intervalle $a \leqslant \theta \leqslant b$ en n sous-intervalles de même longueur $\Delta\theta = \frac{b-a}{n}$. Soit θ_i^* le milieu du $i^{\text{ième}}$ sous-intervalle. Sur ce $i^{\text{ième}}$ intervalle, θ varie de $\theta_i^* - \frac{1}{2}\Delta\theta$ à $\theta_i^* + \frac{1}{2}\Delta\theta$, donc $\left|\theta - \theta_i^*\right| \leqslant \frac{1}{2}\Delta\theta$.

En vertu du théorème des accroissements finis,

$$\phi(\theta) - R(\theta_i^*) = R'(c)(\theta - \theta_i^*)$$

pour un certain $c \in]\theta,\ \theta_i^*[$. Comme $|\phi'(\theta)| \leqslant L$, nous avons

$$\left|\phi(\theta) - R(\theta_i^*)\right| \leqslant L\left|\theta - \theta_i^*\right|. \qquad (*)$$

Ceci nous dit que la différence entre $\phi(\theta)$ et $R(\theta_i^*)$ ne peut pas être beaucoup plus grande que $\left|\theta - \theta_i^*\right|$.

Sur le $i^{\text{ième}}$ sous-intervalle, le rayon $r = \phi(\theta)$ prend des valeurs $\phi(\theta)$ avec θ vérifiant $\left|\theta - \theta_i^*\right| \leqslant \frac{1}{2}\Delta\theta$. En vertu de $(*)$, toutes ces valeurs de $\phi(\theta)$ se situent entre $r_i = R(\theta_i^*) - \frac{1}{2}L\Delta\theta$ et $R_i = R(\theta_i^*) + \frac{1}{2}L\Delta\theta$. En conséquence, la portion de $\mathcal{R}$ définie par θ dans le $i^{\text{ième}}$ sous-intervalle, à savoir

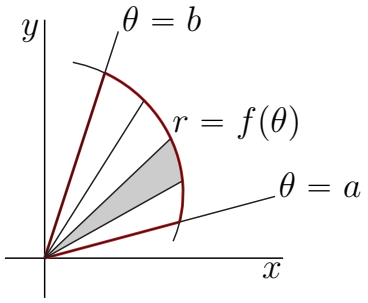
$$\mathcal{R}_i = \left\{ \ (r\cos\theta, r\sin\theta) \ \middle| \ \theta_i^* - \frac{1}{2}\Delta\theta \leqslant \theta \leqslant \theta_i^* + \frac{1}{2}\Delta\theta,\ 0 \leqslant r \leqslant \phi(\theta) \ \right\},$$

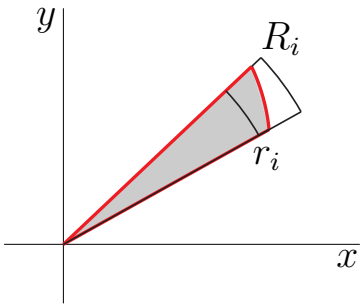
doit contenir complètement le secteur circulaire

$$\left\{ \ (r\cos\theta, r\sin\theta) \ \middle| \ \theta_i^* - \frac{1}{2}\Delta\theta \leqslant \theta \leqslant \theta_i^* + \frac{1}{2}\Delta\theta, \ 0 \leqslant r \leqslant r_i \ \right\}$$

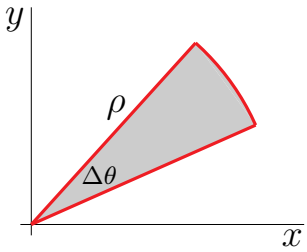
et doit être complètement contenue dans le secteur circulaire

$$\left\{ \ (r\cos\theta, r\sin\theta) \ \middle| \ \theta_i^* - \frac{1}{2}\Delta\theta \leqslant \theta \leqslant \theta_i^* + \frac{1}{2}\Delta\theta, \ 0 \leqslant r \leqslant R_i \ \right\}.$$





Nous avons donc un secteur circulaire plus petit et un autre secteur circulaire plus grand que la région $\mathcal{R}_i$ à approximer. L'aire d'un disque de rayon ρ est $\pi\rho^2$. Sachant qu'un secteur circulaire de rayon ρ qui sous-tend un angle $\Delta\theta$ est la fraction $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ du disque, alors l'aire d'un secteur circulaire est $\frac{\Delta\theta}{2\pi}\pi\rho^2 = \frac{\Delta\theta}{2}\rho^2$.



Ainsi, l'aire de $\mathcal{R}_i$ est bornée par

$$\frac{1}{2}\Delta\theta\, r_i^2 = \frac{1}{2}\Delta\theta\left[R(\theta_i^*) - \frac{1}{2}L\Delta\theta\right]^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\Delta\theta\, R_i^2 = \frac{1}{2}\Delta\theta\left[R(\theta_i^*) + \frac{1}{2}L\Delta\theta\right]^2.$$

En développant

$$\left[R(\theta_i^*) \pm \frac{1}{2}L\Delta\theta\right]^2 = R(\theta_i^*)^2 \pm LR(\theta_i^*)\Delta\theta + \frac{1}{4}L^2\Delta\theta^2$$

et puisque $0 \leqslant \phi(\theta) \leqslant M$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} R(\theta_i^*)^2 - LM\Delta\theta + \frac{1}{4}L^2\Delta\theta^2 &\leqslant \left[R(\theta_i^*) \pm \frac{1}{2}L\Delta\theta\right]^2 \\ &\leqslant R(\theta_i^*)^2 + LM\Delta\theta + \frac{1}{4}L^2\Delta\theta^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant par $\frac{\Delta\theta}{2}$, on revient à borner l'aire de $\mathcal{R}_i$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}R(\theta_i^*)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}LM\Delta\theta^2 + \frac{1}{8}L^2\Delta\theta^3 &\leqslant \text{Aire}(\mathcal{R}_i) \\ &\leqslant \frac{1}{2}R(\theta_i^*)^2\Delta\theta + \frac{1}{2}LM\Delta\theta^2 + \frac{1}{8}L^2\Delta\theta^3. \end{aligned}$$

L'aire totale A est donc bornée comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}R(\theta_i^*)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}LM\Delta\theta^2 + \frac{1}{8}L^2\Delta\theta^3\right]$$

$$\leqslant A \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} R(\theta_i^*)^2 \Delta\theta + \frac{1}{2} LM \Delta\theta^2 + \frac{1}{8} L^2 \Delta\theta^3 \right],$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} R(\theta_i^*)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} nLM\Delta\theta^2 + \frac{1}{8} nL^2\Delta\theta^3 \leqslant A \\ \leqslant &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} R(\theta_i^*)^2 \Delta\theta + \frac{1}{2} nLM\Delta\theta^2 + \frac{1}{8} nL^2\Delta\theta^3. \end{aligned}$$

Sachant que $\Delta\theta = \frac{b-a}{n}$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} R(\theta_i^*)^2 \Delta\theta - \frac{LM}{2} \frac{(b-a)^2}{n} + \frac{L^2}{8} \frac{(b-a)^3}{n^2} \\ \leqslant A \leqslant &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} R(\theta_i^*)^2 \Delta\theta + \frac{LM}{2} \frac{(b-a)^2}{n} + \frac{L^2}{8} \frac{(b-a)^3}{n^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, évaluons la limite lorsque $n \to \infty$. Étant donné que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} R(\theta_i^*)^2 \Delta\theta \pm \frac{LM}{2} \frac{(b-a)^2}{n} + \frac{L^2}{8} \frac{(b-a)^3}{n^2} \right] \\ &\qquad = \frac{1}{2} \int_a^b \phi(\theta)^2 \, d\theta \pm \lim_{n\to\infty} \frac{LM}{2} \frac{(b-a)^2}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{L^2}{8} \frac{(b-a)^3}{n^2} \\ &\qquad = \frac{1}{2} \int_a^b \phi(\theta)^2 \, d\theta \qquad \text{(car } L, M, a \text{ et } b \text{ sont des constantes)}, \end{aligned}$$

nous avons

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b \phi(\theta)^2 \, d\theta,$$

soit exactement ce que nous voulions obtenir.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Considérez les points

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1) = (3, 0), \qquad &&(x_2, y_2) = (1, 1), \qquad &&(x_3, y_3) = (0, 1), \\ &(x_4, y_4) = (-1, 1), \qquad &&(x_5, y_5) = (-2, 0). \end{aligned}$$

Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant 5$,

- esquissez, dans le plan xy, le point (x_i, y_i) et
- trouvez en coordonnées polaires r_i et θ_i, avec $0 \leqslant \theta_i < 2\pi$, pour le point (x_i, y_i).

2.

(a) Trouvez *toutes* les paires (r, θ) telles que $(-2, 0) = (r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)$.

(b) Trouvez *toutes* les paires (r, θ) telles que $(1, 1) = (r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)$.

(c) Trouvez *toutes* les paires (r, θ) telles que $(-1, -1) = (r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)$.

3. Considérez les points

$$(x_1, y_1) = (3, 0), \qquad (x_2, y_2) = (1, 1), \qquad (x_3, y_3) = (0, 1),$$
$$(x_4, y_4) = (-1, 1), \qquad (x_5, y_5) = (-2, 0).$$

Également, définissez, pour chaque angle θ, les vecteurs

$$\mathbf{e}_r(\theta) = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}.$$

(a) Déterminez, pour chaque angle θ, la longueur des vecteurs $\mathbf{e}_r(\theta)$ et $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ et l'angle entre les vecteurs $\mathbf{e}_r(\theta)$ et $\mathbf{e}_\theta(\theta)$. Calculez $\mathbf{e}_r(\theta) \times \mathbf{e}_\theta(\theta)$ (en voyant $\mathbf{e}_r(\theta)$ et $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ comme des vecteurs à trois dimensions avec la composante $\mathbf{k}$ nulle).

(b) Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant 5$, esquissez, dans le plan xy, le point (x_i, y_i) et les vecteurs $\mathbf{e}_r(\theta_i)$ et $\mathbf{e}_\theta(\theta_i)$. Dans votre esquisse des vecteurs, placez les sources des vecteurs $\mathbf{e}_r(\theta_i)$ et $\mathbf{e}_\theta(\theta_i)$ à (x_i, y_i).

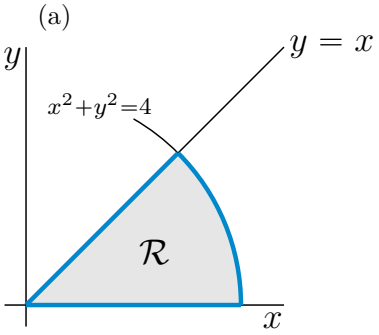
4. Soit $\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ un vecteur, r sa longueur et θ l'angle entre $\mathbf{v}$ et l'axe des x.

(a) Exprimez a et b en termes de r et de θ.

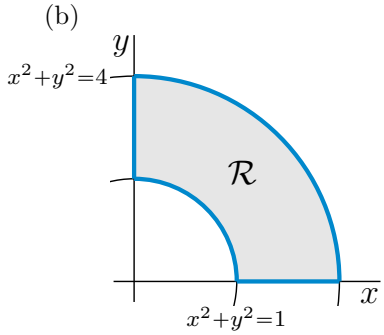
(b) Soit $\mathbf{w} = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j}$ le vecteur obtenu en faisant tourner $\mathbf{v}$ d'un angle φ autour de son origine. Exprimez A et B en termes de a, b et φ.

5. Pour chacune des régions $\mathcal{R}$ esquissées ci-dessous, exprimez $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\,dA$ comme une intégrale itérée en coordonnées polaires de deux façons différentes.

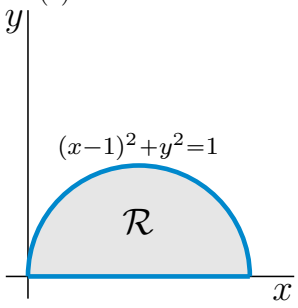
(a)



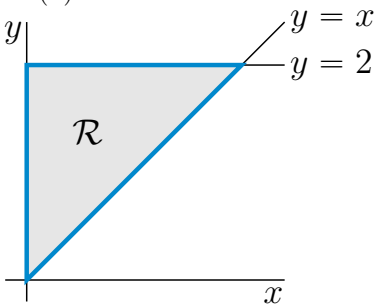
(b)



(c)



(d)



6. Esquissez le domaine d'intégration dans le plan xy pour chacune des intégrales en coordonnées polaires suivantes.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\; r\,d\theta\,dr$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r dr d\theta$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{\sqrt{\cos^2\theta+9\sin^2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r dr d\theta$

7. Utilisez les coordonnées polaires afin d'évaluer chacune des intégrales suivantes.

(a) $\iint_S (x+y) dA$, où S est la région dans le premier quadrant se trouvant à l'intérieur du disque $x^2+y^2 \leqslant a^2$ et sous la droite $y = \sqrt{3}x$.

(b) $\iint_S x\ dA$, où S est le segment de disque $x^2+y^2 \leqslant 2,\ x \geqslant 1$.

(c) $\iint_T (x^2+y^2) dA$, où T est le triangle ayant pour sommets $(0,0), (1,0)$ et $(1,1)$.

(d) $\iint_D \ln(x^2+y^2)\, dA$, où D est le disque $x^2+y^2 \leqslant 1$.

8. Évaluez l'intégrale double itérée $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\ dy\, dx$.

9. Évaluez $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\ dA$.

10. Soit $\mathcal{D}$ la région du plan définie par $x^2+y^2 \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant x$. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{D}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dA.$$

Pour mieux comprendre.

11. Trouvez le volume à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2 = 2$ et au-dessus du paraboloïde $z = x^2+y^2$.

12. Soit $a > 0$. Trouvez le volume à l'intérieur du cylindre $x^2+(y-a)^2 = a^2$ et entre les moitiés supérieure et inférieure du cône $z^2 = x^2+y^2$.

13. Soit $a > 0$. Trouvez le volume commun aux cylindres $x^2+y^2 \leqslant 2ax$ et $z^2 \leqslant 2ax$.

14. Considérez la région E en 3 dimensions spécifiée par les inégalités $x^2+y^2 \leqslant 2y$ et $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Dessinez une image assez précise de E en 3 dimensions. S'assurer de montrer les unités sur les axes de coordonnées.

(b) Utilisez les coordonnées polaires afin de trouver le volume de E. Notez que vous allez utiliser les « coordonnées polaires » si vous résolvez ce problème au moyen des coordonnées cylindriques.

15.

(a) Esquissez la région $\mathcal{L}$ (dans le premier quadrant du plan xy) bornée par les courbes

$$x^2+y^2 = 2,\ x^2+y^2 = 4,\ y = x,\ y = 0.$$

La masse d'une lame mince dont la fonction de densité $\rho(x,y)$ sur la région $\mathcal{L}$ est donnée par $M = \iint_{\mathcal{L}} \rho(x,y)\, dA$.

(b) Trouvez une expression pour M comme une intégrale en coordonnées polaires.

(c) Trouvez M lorsque $\rho(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

16. Cette question concerne l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)\, dx\, dy$.

(a) Esquissez le domaine d'intégration.

(b) Évaluez l'intégrale en transformant en coordonnées polaires.

17. Soit $\mathcal{D}$ la région dans le plan xy bornée à gauche par la droite $x = 2$ et à droite par le cercle $x^2 + y^2 = 16$. Évaluez $\iint_{\mathcal{D}} \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}\, dA$.

18. Dans le plan xy, le disque $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ est coupé en 2 pièces par la droite $y = x$. Soit $\mathcal{D}$ la pièce la plus large.

(a) Esquissez $\mathcal{D}$ en incluant une description du centre et du rayon du disque donné. Ensuite, décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires (r,θ).

(b) Trouvez le volume du solide sous $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et au-dessus de $\mathcal{D}$.

19. Soit $\mathcal{G}$ la région de $\mathbb{R}^2$ définie par $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2y$ et $y \leqslant 2x$.

(a) Esquissez la région $\mathcal{G}$.

(b) Exprimez l'intégrale $\iint_{\mathcal{G}} f(x,y)\, dA$ comme une somme d'intégrales itérées $\iint f(x,y)\, dxdy$.

(c) Exprimez l'intégrale $\iint_{\mathcal{G}} f(x,y)\, dA$ comme une intégrale itérée en coordonnées polaires (r,θ), où $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

20. Considérez $J = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{y}{x} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$.

(a) Esquissez la région d'intégration.

(b) Inversez l'ordre d'intégration.

(c) Évaluez J en utilisant les coordonnées polaires.

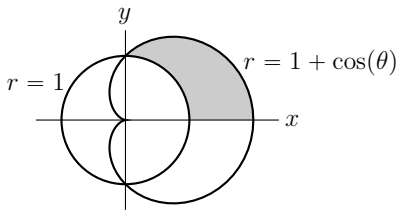
21. Trouvez le volume de la région dans le premier octant sous le paraboloïde

$$z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Pour aller plus loin.

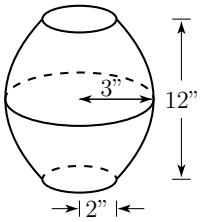
22. Soit $\mathcal{D}$ la région ombragée dans le diagramme. Trouvez la distance moyenne des points dans $\mathcal{D}$ par rapport à l'origine. Vous pouvez utiliser le fait que, pour tous les nombres naturels $n \geqslant 2$,

$$\int \cos^n(x)\, dx = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\, dx.$$



23.

Un percolateur à café symétrique peut contenir 24 tasses lorsqu'il est plein. L'intérieur a une section transversale circulaire qui se rétrécit d'un rayon de 3'' au centre à 2'' à la base et au sommet, qui sont séparés de 12''. La surface de délimitation est parabolique. Où doit être placée la marque indiquant le niveau de 6 tasses ?



24. Considérez la surface $\mathcal{S}$ donnée par $z = e^{x^2+y^2}$.

(a) Calculez le volume sous $\mathcal{S}$ et au-dessus du disque $x^2 + y^2 \leqslant 9$ dans le plan xy.

(b) Le volume sous $\mathcal{S}$ et au-dessus d'une certaine région $\mathcal{R}$ dans le plan xy est

$$\int_0^1 \left(\int_0^y e^{x^2+y^2}\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} e^{x^2+y^2}\, dx \right) dy$$

Esquissez $\mathcal{R}$ et exprimez le volume comme une seule intégrale itérée avec l'ordre d'intégration inversé. *Ne calculez aucune intégrale dans la partie (b).*

3.3 Applications des intégrales doubles

Les intégrales doubles sont très utiles non seulement pour calculer des aires, des volumes ou des masses, mais aussi pour plusieurs autres applications. En voici quelques-unes qui font intervenir les intégrales doubles.

Valeurs moyennes

Il est commun de définir et d'étudier la valeur moyenne d'une fonction d'une variable. Nous étendons cette notion aux fonctions de deux variables. Commençons par un rappel.

Définition 3.3.1

La moyenne d'un ensemble de n nombres f_1, f_2, $\cdots$, f_n est

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n}.$$

Supposons maintenant que nous voulons calculer la valeur moyenne d'une fonction $f(x, y)$ pour (x, y) parcourant une région $\mathcal{R}$ dans le plan. Une approche naturelle afin de définir ce qu'on entend par la moyenne de f sur $\mathcal{R}$ consiste à :

- Fixer un naturel n.

- Subdiviser $\mathcal{R}$ en petits carrés approximatifs de côté $\Delta x = \frac{1}{n} = \Delta y$. Par exemple, cela peut se faire en subdivisant des tranches verticales en petits carrés, comme à l'exemple 3.1.12.
- Numéroter les carrés dans n'importe quel ordre R_1, R_2, …, R_N, où N est le nombre total de carrés.
- Choisir, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant N$, un point sur le $i^{\text{ième}}$ carré que l'on nommera (x_i^*, y_i^*), de sorte que $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$.
- La valeur moyenne de f en ces points est

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i^*, y_i^*) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f(x_i^*, y_i^*)}{\sum_{i=1}^{N} 1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta x\,\Delta y}{\sum_{i=1}^{N} \Delta x\,\Delta y}.$$

  Nous avons transformé la fraction donnant la moyenne en un rapport de sommes de Riemann.

En ayant des sommes de Riemann, l'étape suivante est claire : il faut évaluer la limite lorsque $n \to \infty$ pour obtenir la valeur exacte, c'est-à-dire $\frac{\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_{\mathcal{R}} dA}$. Cela nous mène à la définition suivante.

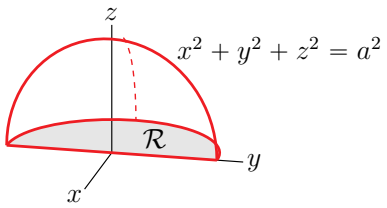
Définition 3.3.2

Soit $f(x, y)$ une fonction intégrable sur une région $\mathcal{R}$ du plan. La valeur moyenne de f sur $\mathcal{R}$ est

$$\bar{f} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA}{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} dA}.$$

Exemple 3.3.3 Valeur moyenne.

Soit $a > 0$. Une montagne a une hauteur donnée par $z(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ au-dessus de chaque point (x, y) de la région $\mathcal{R} = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2, x \leqslant 0 \,\}$. Trouver la hauteur moyenne.



Solution. D'après la définition 3.3.2, la hauteur moyenne est donnée par

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\mathcal{R}} z(x,y)\,dA}{\iint_{\mathcal{R}} dA} = \frac{\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dA}{\iint_{\mathcal{R}} dA}.$$

Les intégrales du numérateur et du dénominateur peuvent être calculées en les interprétant géométriquement.

- Le numérateur $\iint_{\mathcal{R}} z(x,y)\,dA = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dA$ est interprété comme le volume de

$$\begin{aligned}&\left\{\, (x,y,z) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x \leqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \,\right\}\\ &= \{\, (x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2,\ x \leqslant 0,\ z \geqslant 0 \,\},\end{aligned}$$

  qui est le quart du volume d'une sphère de rayon a, c'est-à-dire $\frac{1}{3}\pi a^3$.

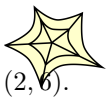
- Le dénominateur $\iint_{\mathcal{R}} dA$ est l'aire de la moitié d'un disque de rayon a, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\pi a^2$.

Ainsi, la hauteur moyenne est

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{3}\pi a^3}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{2}{3}\,a.$$

Il faut noter que ce nombre est positif et plus petit que la hauteur maximale a, ce qui est cohérent.

À vous de jouer 3.3.4



Find the average value of $f(x,y) = 3x^4y^5$ over the rectangle R with vertices $(-2,0), (-2,6), (2,0), (2,6)$.

Average value = _____

Il n'est pas rare de vouloir calculer la valeur moyenne d'une fonction $f(x,y)$ sur une région $\mathcal{R}$ tout en faisant que certains points ont un rôle plus important dans le calcul de cette moyenne. Une façon de faire cela consiste à considérer une « fonction poids » $w(x,y) > 0$ telle que le quotient $\frac{w(x_1,y_1)}{w(x_2,y_2)}$ donne l'importance relative de (x_1,y_1) par rapport à (x_2,y_2), c'est-à-dire que le point (x_1,y_1) est $\frac{w(x_1,y_1)}{w(x_2,y_2)}$ fois plus important que le point (x_2,y_2) dans le calcul de la moyenne. Cela nous mène à la définition suivante.

Définition 3.3.5

Soit $f(x,y)$ une fonction continue définie sur une région $\mathcal{R}$ du plan, et soit $w(x,y) > 0$ une fonction poids sur $\mathcal{R}$. Alors

$$\frac{\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,w(x,y)\,dA}{\iint_{\mathcal{R}} w(x,y)\,dA}$$

est la *moyenne pondérée* de f sur $\mathcal{R}$ avec la fonction poids $w(x,y)$.

Notons que si $f(x,y) = F$ est une constante, alors la moyenne pondérée de f est évidemment F.

Centre de gravité

Une application importante de la moyenne pondérée est le calcul du centre de gravité, ou centre de masse. Si un objet est supporté en son centre de gravité (dans un champ gravitationnel uniforme), il sera en parfait équilibre. Dans un cours de calcul intégral à une variable, on établit que le centre de gravité d'une tige horizontale dont la masse est distribuée uniformément et dont la densité est $\rho(x)$, avec x allant de $x = a$ à $x = b$, se trouve à

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\ \rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx}.$$

Ceci revient à dire que le centre de gravité est la moyenne des abscisses affectées du poids donné par la densité.

Passons maintenant au cas d'une plaque mince (d'épaisseur négligeable mais constante) occupant une région du plan.

Formule 3.3.6 Centre de gravité.

Soit $\mathcal{R}$ une région du plan Oxy et soit $\rho(x,y)$ une fonction de densité intégrable sur $\mathcal{R}$, représentant la densité surfacique d'une plaque mince occupant $\mathcal{R}$. Le centre de gravité de la plaque est le point $(\bar{x},\bar{y})$ où

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \textit{moyenne pondérée de } x \textit{ sur } \mathcal{R}\\ &= \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} x\,\rho(x,y)\,dA}{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \rho(x,y)\,dA} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} x\,\rho(x,y)\,dA}{\mathit{Masse}(\mathcal{R})},\\ \bar{y} &= \textit{moyenne pondérée de } y \textit{ sur } \mathcal{R}\\ &= \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} y\,\rho(x,y)\,dA}{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \rho(x,y)\,dA} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} y\ \rho(x,y)\,dA}{\mathit{Masse}(\mathcal{R})}.\end{aligned}$$

Si la densité est constante, le centre de gravité est souvent appelé le « *barycentre* » de $\mathcal{R}$ ou son « *centroïde* ».

Formule 3.3.7 Centre de gravité (centroïde).

Soit $\mathcal{R}$ une région du plan. Le centroïde de $\mathcal{R}$ est le point $(\bar{x},\bar{y})$ où

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} x\,dA}{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} dA} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} x\,dA}{\mathit{Aire}(\mathcal{R})} \qquad \bar{y} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} y\,dA}{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} dA} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} y\,dA}{\mathit{Aire}(\mathcal{R})}$$

Exemple 3.3.8 Centre de gravité.

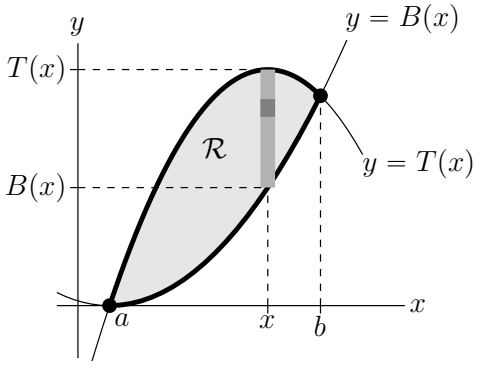
Déterminer le centre de gravité d'une plaque mince de densité constante occupant la région

$$\mathcal{R} = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ a \leqslant x \leqslant b,\ B(x) \leqslant y \leqslant T(x)\ \right\}$$

dans le plan Oxy.

Afin d'utiliser la formule 3.3.7, découpons la région $\mathcal{R}$ verticalement, comme illustré dans la figure ci-contre. Nous avons que l'aire de $\mathcal{R}$ est

$$\begin{aligned}A &= \iint_{\mathcal{R}} dA = \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} dy\,dx\\ &= \int_a^b \big[T(x) - B(x)\big]\,dx\end{aligned}$$



Avec la formule 3.3.7, nous obtenons

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{R}} x\,dA = \frac{1}{A}\int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} x\;dy\,dx = \frac{1}{A}\int_a^b x\big[T(x)-B(x)\big]dx,$$
$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{R}} y\,dA = \frac{1}{A}\int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} y\;dy\,dx = \frac{1}{A}\int_a^b \left[\frac{T(x)^2}{2}-\frac{B(x)^2}{2}\right]dx.$$

Exemple 3.3.9 Quart de disque.

Calculer le centroïde du quart de disque

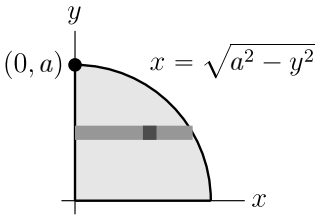
$$\mathcal{D} = \big\{\ (x,y)\ \big|\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant a^2\ \big\}.$$

1. Nous pourrions appliquer les formules obtenues dans l'exemple précédent, mais utilisons plutôt la formule 3.3.7.

L'aire du disque $\mathcal{D}$ est $\frac{1}{4}\pi a^2$, de sorte que nous avons

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x\,dA}{\frac{1}{4}\pi a^2}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y\,dA}{\frac{1}{4}\pi a^2}.$$

Évaluons $\iint_{\mathcal{D}} x\,dA$ avec des tranches horizontales, comme illustré dans la figure ci-contre.



Nous avons alors que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} x\,dA &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x dx\;dy = \int_0^a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy\\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \big[a^2-y^2\big]dy\ = \frac{1}{2}\left[a^3-\frac{a^3}{3}\right]\\ &= \frac{a^3}{3},\end{aligned}$$

donc

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi a^2}\left[\frac{a^3}{3}\right] = \frac{4a}{3\pi}.$$

Par symétrie, nous aurons que $\bar{y} = \bar{x}$.

2. Utilisons encore les intégrales de la formule 3.3.7, mais calculons avec des coordonnées polaires. Nous avons notamment que, en coordonnées polaires, notre domaine d'intégration est

$$\mathcal{D} = \big\{\ (r,\theta)\ \big|\ 0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\ \big\}.$$

L'aire de $\mathcal{D}$ est $\frac{1}{4}\pi a^2$. Nous avons par ailleurs

$$\iint_{\mathcal{D}} x dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^a r\,\cos\theta\;r\,d\theta\,dr$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^a r^2 \right) = \frac{a^3}{3}.$$

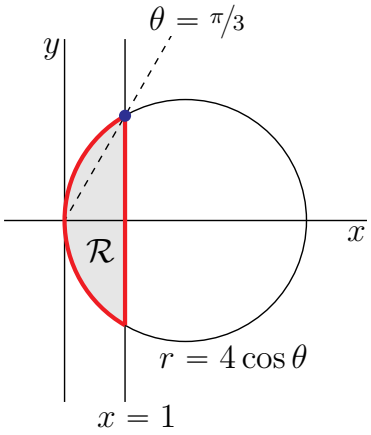
Ainsi,

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi a^2} \left[\frac{a^3}{3} \right] = \frac{4a}{3\pi}.$$

Par symétrie, $\bar{y} = \bar{x}$.

Exemple 3.3.10 exemple 3.2.16 revisité.

Trouver le centre de gravité de la région $\mathcal{R}$ située à l'intérieur du cercle $r = 4\cos\theta$ et à gauche de la droite $x = 1$, illustrée ci-contre.



Solution. Nous avons vu, à l'exemple 3.2.16, que $r = 4\cos\theta$ est le cercle de rayon 2 centré en $(2, 0)$, dont l'équation cartésienne est $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

On remarque que $\mathcal{R}$ est symétrique par rapport à l'axe des x, de sorte qu'on s'attend à ce que son centre de gravité se trouve sur cet axe, c'est-à-dire que $\bar{y} = 0$. Afin de confirmer ce résultat avec notre définition, remarquons que $\iint_{\mathcal{R}} y \, dA$ a un domaine d'intégration $\mathcal{R}$ invariant par la transformation $y \mapsto -y$ (c.-à-d. la réflexion par rapport à l'axe des x) et que son intégrande y est une fonction impaire. Ainsi, $\iint_{\mathcal{R}} y \, dA = 0$ et, par conséquent, $\bar{y} = 0$.

Trouvons maintenant $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\mathcal{R}} x \, dA}{\iint_{\mathcal{R}} dA}.$$

Nous avons déjà trouvé, dans l'exemple 3.2.16, que l'aire de la région $\mathcal{R}$ est

$$\iint_{\mathcal{R}} dA = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Nous devons donc seulement calculer $\iint_{\mathcal{R}} x \, dA$. Soit $\mathcal{R}_1$ la moitié supérieure de $\mathcal{R}$. En coordonnées polaires, comme dans l'exemple 3.2.16,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}_1} x \, dA &= \int_0^{\pi/3} \int_0^{1/\cos\theta} \overbrace{(r\cos\theta)}^{x} \, r \, dr d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} \overbrace{(r\cos\theta)}^{x} \, r \, dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} \cos\theta \int_0^{1/\cos\theta} r^2 dr \, d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos\theta \int_0^{4\cos\theta} r^2 \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} \frac{\sec^2\theta}{3} \, d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{64}{3} \cos^4\theta \, d\theta.
\end{aligned}$$

La première intégrale se calcule aisément si l'on se souvient que $\tan\theta$ est une primitive de $\sec^2\theta$. Pour la seconde intégrale, nous utilisons la formule des angles doubles $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

$$\begin{aligned}\cos^4\theta = \left(\cos^2\theta\right)^2 &= \left[\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}\left[1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[1+2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right]\\ &= \frac{3}{8}+\frac{\cos(2\theta)}{2}+\frac{\cos(4\theta)}{8}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}_1} x\,dA &= \frac{1}{3}\tan\theta\Big|_0^{\pi/3} + \frac{64}{3}\left[\frac{3\theta}{8}+\frac{\sin(2\theta)}{4}+\frac{\sin(4\theta)}{32}\right]_{\pi/3}^{\pi/2}\\ &= \frac{1}{3}\times\sqrt{3}+\frac{64}{3}\left[\frac{3}{8}\times\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4\times 2}+\frac{\sqrt{3}}{32\times 2}\right]\\ &= \frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Finalement, par symétrie, nous avons que

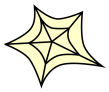
$$\iint_{\mathcal{R}} x\,dA = 2\iint_{\mathcal{R}_1} x\,dA,$$

de sorte que

$$\bar{x} = \frac{2\left(\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)}{\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}} = \frac{\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}}{\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}}.$$

Remarquons que $\bar{x}\approx 0.59$, en accord avec le fait que $0\leqslant x\leqslant 1$ sur $\mathcal{R}$. De plus, dans la région $\mathcal{R}$, il y a une plus grande portion des points qui se situent plus près de $x=1$ que de $x=0$. Il est donc cohérent que $\bar{x}$ se situe entre $\frac{1}{2}$ et 1.

À vous de jouer 3.3.11



Une lame mince de la forme d'un disque occupe la région du plan délimitée par $x^2+y^2\leq 16$ dans le premier quadrant.

Sa densité est donnée en chaque point (x,y) par la fonction $\rho(x,y)=2(x^2+y^2)$.

(a) Quelle est sa masse totale ? _____

(b) Quel est son centre de masse ? (_____, _____)

Exemple 3.3.12 Calcul d'une intégrale à l'aide du centre de gravité.

Évaluer $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (2x+3y)\,dy\,dx$.

Solution. Cette intégrale peut être évaluée sans la calculer. Cette fois-ci, l'astuce consistera à relier cette intégrale à un centre de masse. En vertu de la formule 3.3.7,

$$\iint_{\mathcal{R}} x\,dA = \bar{x}\ \text{Aire}(\mathcal{R}) \qquad \text{et} \qquad \iint_{\mathcal{R}} y\,dA = \bar{y}\ \text{Aire}(\mathcal{R}).$$

Par conséquent, on pourra plus facilement évaluer $\iint_{\mathcal{R}} x\,dA$ et $\iint_{\mathcal{R}} y\,dA$, en supposant que la région $\mathcal{R}$ est assez simple et symétrique pour que son aire et son centre de gravité puissent être trouvés facilement.

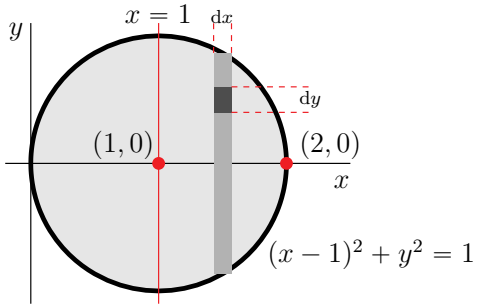
C'est le cas dans cet exemple. On peut écrire

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (2x+3y)\,dy\,dx = 2\int_0^2 \left[\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} x\,dy\,dx\right] + 3\int_0^2 \left[\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} y\;dy\,dx\right].$$

Remarquons que $y = \pm\sqrt{2x-x^2}$ équivaut à

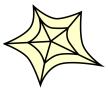
$$y^2 = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 \iff (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Notre domaine d'intégration est donc le disque $\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}$ de rayon 1 et centré en $(1,0)$, illustré ci-contre.



Ainsi, l'aire de $\mathcal{R}$ vaut π, et son centre de gravité est $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,0)$. Nous pouvons donc évaluer l'intégrale de départ.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (2x+3y)\,dy\,dx &= 2\iint_{\mathcal{R}} x\,dA + 3\iint_{\mathcal{R}} y\;dA \\ &= 2\,\bar{x}\,\text{Aire}(\mathcal{R}) + 3\,\bar{y}\,\text{Aire}(\mathcal{R}) = 2\pi\end{aligned}$$



À vous de jouer 3.3.13

A lamina occupies the part of the rectangle $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 6$ and the density at each point is given by the function $\rho(x,y) = 5x + 3y + 3$.

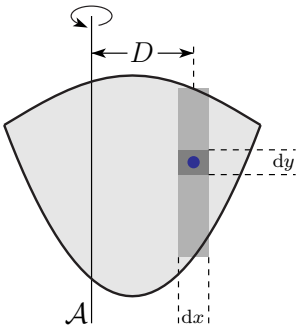
A. What is the total mass ? _____

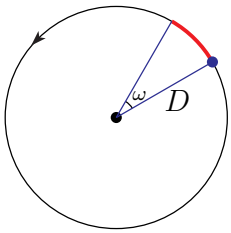
B. Where is the center of mass ? (_____, _____)

Moment d'inertie

Considérons une plaque mince occupant une région $\mathcal{R}$ du plan Oxy, de densité $\rho(x,y)\,\text{kg/m}^2$ et qui est en rotation autour d'un certain axe à une vitesse angulaire $\omega\,\text{rad/s}$. Nommons l'axe de rotation $\mathcal{A}$. Nous allons déterminer l'énergie cinétique de la plaque. Rappelons que l'énergie cinétique d'une particule de masse m qui se déplace avec une vitesse scalaire v est $\frac{1}{2}mv^2$.

Pour obtenir l'énergie cinétique de la plaque au complet, nous la découpons en petits morceaux rectangulaires (ceux près du bord de la plaque ne sont pas nécessairement rectangulaires). Cependant, comme nous l'avons vu au paragraphe justifiant la formule pourdA, à la fin de la section 3.2, il est possible de faire les choses en toute rigueur. Pensons donc que chaque petit rectangle est essentiellement une particule ponctuelle. Si le point (x,y) sur la plaque se trouve à une distance $D(x,y)$ de l'axe de rotation $\mathcal{A}$, alors, à mesure que la plaque tourne, le point (x,y) parcourt un cercle de rayon $D(x,y)$. La figure de droite ci-bas montre ce cercle, vu perpendiculairement à l'axe de rotation.





Soit $D(x,y)$ la distance entre la position (x,y) d'une particule sur la plaque et l'axe de rotation $\mathcal{A}$, ainsi la trajectoire du point (x,y) est un cercle de rayon $D(x,y)$ (voir la figure de droite ci-dessus). L'arc circulaire que le point (x,y) décrit pendant une seconde autour de l'axe de rotation sous-tend l'angle ω radians, qui est la fraction $\frac{\omega}{2\pi}$ d'un cercle complet, et donc a une longueur $\frac{\omega}{2\pi}\,(2\pi D(x,y)) = \omega\,D(x,y)$. En conséquence, le rectangle qui contient le point (x,y) :

- se déplace à une vitesse $\omega\,D(x,y)$,
- a une aire $dx\,dy$, et donc
- a une masse $\rho(x,y)\,dxdy$, et
- son énergie cinétique est

$$\frac{1}{2}\overbrace{(\rho(x,y)\,dx\,dy)}^{m}\overbrace{(\omega\,D(x,y))^2}^{v^2} = \frac{1}{2}\omega^2\;D(x,y)^{\,2}\rho(x,y)\;dx\,dy.$$

Ainsi, au moyen de notre procédure habituelle de limite de sommes de Riemann, l'énergie cinétique totale de la plaque est

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{2}\omega^2\;D(x,y)^2\,\rho(x,y)\,dA \;=\; \frac{1}{2}\omega^2 \iint_{\mathcal{R}}\; D(x,y)^2\,\rho(x,y)\,dA \;=\; \frac{1}{2}I_{\mathcal{A}}\,\omega^2,$$

où $I_{\mathcal{A}}$ définit le *moment d'inertie.*

Définition 3.3.14 Moment d'inertie.

Soit $\mathcal{R}$ une région du plan Oxy, $\rho(x,y)$ une fonction de densité intégrable sur $\mathcal{R}$, et $\mathcal{A}$ un axe de rotation. Si $D(x,y)$ désigne la distance du point (x,y) à l'axe $\mathcal{A}$, alors le *moment*

d'inertie de $\mathcal{R}$ par rapport à l'axe $\mathcal{A}$ est

$$I_{\mathcal{A}} = \iint_{\mathcal{R}} D(x,y)^2 \rho(x,y)\, dA.$$

En particulier, le moment d'inertie par rapport à l'axe des y est

$$I_y = \iint_{\mathcal{R}} x^2\, \rho(x,y)\, dA,$$

et le moment d'inertie par rapport à l'axe des x est

$$I_x = \iint_{\mathcal{R}} y^2\, \rho(x,y)\, dA.$$

Remarquons que l'expression $\frac{1}{2} I_{\mathcal{A}}\, \omega^2$ de l'énergie cinétique est semblable à $\frac{1}{2} m v^2$, avec la vitesse v remplacée par la vitesse angulaire ω, et la masse m remplacée par le moment d'inertie $I_{\mathcal{A}}$, qui peut être interprété un peu comme une « masse ».

Jusqu'à présent, nous avons pris pour acquis que le mouvement de rotation a lieu dans le plan Oxy. Nos arguments s'étendent naturellement à trois dimensions. Les formules résultantes font appel à des intégrales triples. Elles seront traitées ultérieurement.

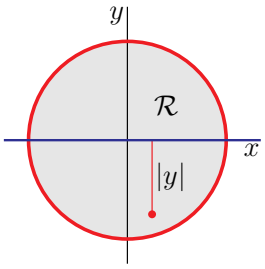
Exemple 3.3.15 Disque.

Trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe des abscisses du disque $\mathcal{R}$ borné par le cercle $x^2 + y^2 = a^2$. Supposer que la densité est constante et égale à 1.

Solution.

La distance entre n'importe quel point (x,y) sur le disque et l'axe de rotation est $|y|$. Ainsi, le moment d'inertie recherché est

$$I_x = \iint_{\mathcal{R}} y^2\, dA.$$

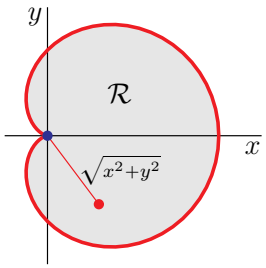


En passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \overbrace{(r\sin\theta)^2}^{y^2}\, r\, dr\, d\theta = \left[\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta\right]\left[\int_0^a r^3\, dr\right] \\ &= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \\ &= \frac{a^4}{8}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}\pi a^4. \end{aligned}$$

Exemple 3.3.16 Cardioïde.

Trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe des z de la région $\mathcal{R}$ limitée par la cardioïde $r = a(1+\cos\theta)$ du plan Oxy, illustrée ci-contre (avec $a = 1$), comme à l'exemple 3.2.4. Prendre pour acquis que sa densité est constante et égale à 1.



$r = a(1+\cos\theta)$

Solution. Comme nous l'avons mentionné plus haut, la formule pour $I_{\mathcal{A}}$ de la définition 3.3.14 reste valable quand l'axe de rotation n'est pas contenu dans le plan Oxy. On doit simplement s'assurer que la fonction $D(x,y)$ est vraiment la distance du point (x,y) à l'axe de rotation. Dans cet exemple, l'axe de rotation est l'axe Oz, de sorte que $D(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, et le moment d'inertie est

$$I_{\mathcal{A}} = \iint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)\,dA.$$

Un changement aux coordonnées polaires donne

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{A}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \times r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^3\;dr\,d\theta \\ &= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^4\;d\theta \\ &= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \left(1+4\cos\theta+6\cos^2\theta+4\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)\;d\theta. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = \sin\theta\Big|_0^{2\pi} = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta \;= \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi, \\ &\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta\left[1-\sin^2\theta\right]d\theta \overset{u=\sin\theta}{=} \int_0^0 (1-u^2)\,du = 0. \end{aligned}$$

Afin d'intégrer $\cos^4\theta$, nous faisons appel aux formules des angles doubles :

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{\cos(2\theta)+1}{2} \\ \Longrightarrow\quad \cos^4\theta &= \frac{(\cos(2\theta)+1)^2}{4} = \frac{\cos^2(2\theta)+2\cos(2\theta)+1}{4} \\ &= \frac{\frac{\cos(4\theta)+1}{2}+2\cos(2\theta)+1}{4} \\ &= \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(4\theta), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(4\theta)\right]\,d\theta$$

$$= \frac{3}{8} \times 2\pi + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 = \frac{3}{4}\pi.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{A}} &= \frac{a^4}{4}\left[2\pi + 4 \times 0 + 6 \times \pi + 4 \times 0 + \frac{3}{4}\pi\right] \\ &= \frac{35}{16}\pi a^4. \end{aligned}$$

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Pour chacun des cas suivants, évaluez l'intégrale double donnée *sans* utiliser les intégrations. Plutôt, interprétez ces intégrales en termes, par exemple, d'aires ou de valeurs moyennes.

(a) $\iint_{\mathcal{D}}(x+3)\,dA$, où $\mathcal{D}$ est la moitié du disque $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$.

(b) $\iint_{\mathcal{R}}(x+y)\,dA$, où $\mathcal{R}$ est le rectangle $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$.

2. Trouvez le centre de masse de la région $\mathcal{D}$ dans le plan xy définie par les inégalités $x^2 \leqslant y \leqslant 1$, en assumant que la fonction de densité est donnée par $\rho(x,y) = y$.

Pour mieux comprendre.

3. Soit $\mathcal{R}$ la région bornée à gauche par $x = 1$ et à droite par $x^2 + y^2 = 4$. La densité dans $\mathcal{R}$ est

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(a) Esquissez la région $\mathcal{R}$.

(b) Trouvez la masse de $\mathcal{R}$.

(c) Trouvez le centre de masse de $\mathcal{R}$.

Note : Vous pouvez utiliser $\int \sec(\theta)\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$.

4. Une plaque mince de densité uniforme 1 est bornée par l'axe des x et des y positives et le cardioïde $\sqrt{x^2+y^2} = r = 1 + \sin\theta$, qui est donné en coordonnées polaires. Trouvez la coordonnée x de son centre de masse.

5. Une plaque mince de densité uniforme k est bornée par les axes des x et des y positives et le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Trouvez son centre de masse.

6. Soit R le triangle dont les sommets sont $(0,2)$, $(1,0)$, et $(2,0)$. Soit R ayant la densité $\rho(x,y) = y^2$. Trouvez $\bar{y}$, la coordonnée y du centre de masse de R. Vous n'avez pas à trouver $\bar{x}$.

7. La distance moyenne d'un point dans une région plane D par rapport au point (a,b) est définie par

$$\frac{1}{A(D)}\iint_D \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,dA,$$

où $A(D)$ est l'aire de la région plane D. Soit D le disque unitaire $1 \geqslant x^2 + y^2$. Trouvez la distance moyenne du point dans D par rapport au centre de D.

8. Un croissant métallique est obtenu en enlevant l'intérieur du cercle défini par l'équation $x^2 + y^2 = x$ de la plaque métallique de densité constante 1 occupant le disque unitaire $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

(a) Trouvez la masse totale du croissant.

(b) Trouvez la coordonnée x du centre de masse.

Vous pouvez assumer le fait que $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\theta)\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$.

9. Soit D la région du plan xy qui se trouve à l'intérieur du cercle $x^2 + (y-1)^2 = 1$, mais à l'extérieur du cercle $x^2 + y^2 = 2$. Déterminez la masse de cette région si la densité est donnée par

$$\rho(x, y) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pour aller plus loin.

10. Soit a, b et c des nombres positifs, et soit T le triangle dont les sommets sont $(-a, 0)$, $(b, 0)$ et $(0, c)$.

(a) En assumant que la densité est constante sur T, trouvez le centre de masse de T.

(b) Les médianes de T sont les segments de droites joignant un sommet de T au point milieu du côté opposé. C'est un fait bien connu que les trois médianes se croisent en un point, qui est connu comme étant le centre de gravité de T. Montrez que le centre de gravité de T est son centre de masse.

3.4 Intégrales triples

Les intégrales des fonctions à trois variables sur une région $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ sont définies en suivant la même procédure que celle pour les fonctions à deux variables. On divise $\mathcal{E}$ en plusieurs petites régions qui ont la forme de parallélépipèdes rectangulaires, puis on multiplie le volume de ces petites régions par la valeur prise par f sur un point d'échantillonnage se trouvant dans chacune des régions. On additionne le tout pour obtenir une intégrale triple après un passage à la limite. Cependant, l'interprétation est un peu différente. Une façon de concevoir ceci consiste à penser que f est une fonction de densité de masse. L'intégrale résultante donnera alors la masse totale du solide. Si f vaut 1, cette intégrale mesurera le volume de la région considérée.

Parallélépipèdes rectangulaires

Supposons pour commencer que $\mathcal{E}$ est un parallélépipède rectangulaire, c'est-à-dire $\mathcal{E} = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$. On divise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Ceci revient à poser $x_i = a + i\Delta x$, où $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On effectue la même démarche pour les intervalles $[c,d]$ et $[r,s]$, que l'on divise en m et l sous-intervalles de longueurs $\Delta y = \frac{d-c}{m}$ et $\Delta z = \frac{s-r}{l}$ respectivement, et en posant $y_j = c + j\Delta y$, où $0 \leqslant j \leqslant m$, et $z_k = r + k\Delta z$, où $0 \leqslant k \leqslant l$.

Pour i, j, k fixes, on considère la boîte $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, à l'intérieur de laquelle on choisit un point d'échantillonnage $\mathbf{p}^*_{ijk} = (x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$. Le volume de la boîte est $\Delta V = \Delta z\, \Delta y\, \Delta x$. Ce volume est multiplié par la valeur de $f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ pour former la triple somme de Riemann

$$\sum_{i,j,k} f(\mathbf{p}^*_{ijk})\Delta V = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta z\, \Delta y\, \Delta x.$$

Lorsque n, m et l tendent vers l'infini, avec un peu de chance, la somme ci-dessus tend vers un nombre réel, peu importe le point d'échantillonnage choisi. On dira alors que f est intégrable. La continuité de f est une condition suffisante pour assurer l'intégrabilité.

Définition 3.4.1

Soit $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d, r \leqslant z \leqslant s\}$ et f une fonction continue dans une région contenant $\mathcal{E}$. Alors, f est intégrable sur $\mathcal{E}$, et l'intégrale de f sur $\mathcal{E}$ est

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\ dV = \lim_{n,m,l\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta z\, \Delta y\, \Delta x.$$

On écrit aussi, de façon plus concise, $\iiint_{\mathcal{E}} f\ dV$.

Le choix du point d'échantillonnage et l'indépendance de ce choix laissent beaucoup de liberté. Un choix particulièrement pratique consiste à choisir les x^*_{ijk} qui dépendent de i seulement, soit $x^*_{ijk} = x^*_i$, et à faire la même chose pour les autres coordonnées de $\mathbf{p}^*_{ijk}$. La triple somme de Riemann modifiée en conséquence devient

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(x^*_i, y^*_j, z^*_k)\Delta z\, \Delta y\, \Delta x.$$

On voit immédiatement que la somme intérieure est à son tour une somme de Riemann pour une intégrale simple :

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} f(x^*_i, y^*_j, z^*_k) = \int_r^s f(x^*_i, y^*_j, z)\ dz.$$

Cette intégrale est une fonction de x^*_i et y^*_j seulement, disons $g(x^*_i, y^*_j)$.

Remplaçons dans la triple somme originale, ce qui nous donne

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x^*_i, y^*_j)\Delta y\, \Delta x,$$

qui est à son tour une somme de Riemann pour l'intégrale double

$$\int_a^b \int_c^d g(x,y)\, dy\ dx.$$

Une fois la substitution de g par son expression comme une intégrale par rapport à z faite, nous obtenons (si toutes ces intégrales existent) le résultat suivant.

Théorème 3.4.2

Soit $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d, r \leqslant z \leqslant s\}$ *et* f *continue sur* $\mathcal{E}$*. Alors,*

$$\iiint_{\mathcal{E}} f \ dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z) dz \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b \int_r^s f(x,y,z) \ dz \, dx \, dy.$$

Notons que la deuxième égalité suit du théorème de Fubini pour les intégrales doubles. Par ailleurs, rien ne nous oblige à considérer la somme par rapport à k comme étant la somme intérieure dans notre argument précédent. Il y a en fait 6 ordres possibles d'intégration. Le théorème de Fubini dit, plus généralement, que le résultat est indépendant de l'ordre d'intégration.

Exemple 3.4.3

Soit $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 1 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 3\}$ et $f(x,y,z) = xz + y^3$. Calculer l'intégrale $\iiint_{\mathcal{E}} f \, dV$.

Solution 1. Nous avons, en vertu du théorème 3.4.2 :

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{R}} f \, dV &= \int_0^1 \int_1^2 \int_0^3 (xz + y^3) \ dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x z^2 + y^3 z \right]_{z=1}^{z=3} dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_1^2 \left(\frac{1}{2} 9x + 3y^3 \right) dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{9}{2} xy + \frac{3}{4} y^3 \right]_{y=1}^{y=2} dx \\
&= \frac{1}{4} \left[9x^2 + 45x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

Solution 2. Remarquons que nous aurions pu procéder autrement, non seulement pour ce qui est l'ordre d'intégration, mais aussi en analogie avec ce qui a été vu au théorème 3.1.7 pour les intégrales doubles. En effet, notre domaine d'intégration est un parallélépipède rectangle, alors

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{R}} f \, dV &= \int_0^1 \int_1^2 \int_0^3 (xz + y^3) \ dx \, dy \, dx \\
&= \left[\int_0^1 x dx \right] \left[\int_1^2 dy \right] \left[\int_0^3 z dz \right] + \left[\int_0^1 dx \right] \left[\int_1^2 y^3 dy \right] \left[\int_0^3 dz \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{9}{2} + 1 \cdot \frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

Régions plus générales

Pour considérer des régions plus générales, c'est-à-dire qui ne sont pas nécessairement des boîtes rectangulaires, mais qui sont tout de même bornées, on procède comme suit. Nous incluons cette région, disons $\mathcal{R}$, dans un parallélépipède rectangle $\mathcal{B}$ et nous définissons une nouvelle fonction $\tilde{f}$ qui coïncide avec f (que nous supposons continue) sur $\mathcal{E}$, mais qui vaut 0 ailleurs. On définit alors

$$\iiint_{\mathcal{E}} f \, dV = \iiint_{\mathcal{B}} \tilde{f} \, dV.$$

La fonction $\tilde{f}$ n'est pas continue, mais si $\mathcal{E}$ est *raisonnable*, cette intégrale existe. Dans la pratique, on s'intéresse aux intégrales de fonctions sur des régions qui sont relativement simples. La difficulté pour l'évaluation de ces intégrales est surtout dans l'écriture des bornes. Il importe donc d'avoir des descriptions convenables des régions d'intégration et de leurs frontières.

Une région *élémentaire* dans $\mathbb{R}^2$ est une région obtenue en permettant à l'une des coordonnées de parcourir un intervalle, la valeur de la seconde coordonnée étant bornée par deux fonctions continues par morceaux définies qui dépendent de la première variable. Plus formellement, une région élémentaire du plan est une région définie selon une des formes suivantes.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b,\ u_1(x) \leqslant y \leqslant u_2(x)\} \tag{$*$}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leqslant y \leqslant d,\ v_1(y) \leqslant x \leqslant v_2(y)\} \tag{$**$}$$

Définition 3.4.4

Une région **élémentaire** dans $\mathbb{R}^3$ est une région obtenue en permettant à l'une des trois coordonnées de varier entre les valeurs de deux fonctions (continues par morceaux) des deux autres coordonnées. Ces fonctions ont pour domaine une région élémentaire de $\mathbb{R}^2$ (les régions $\mathcal{D}$ ci-bas).

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in \mathcal{D} \subset Oxy, \phi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \phi_2(x,y)\} \tag{$\dagger$}$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,z) \in \mathcal{D} \subset Oxz, \psi_1(x,z) \leqslant y \leqslant \psi_2(x,z)\} \tag{$\dagger\dagger$}$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (y,z) \in \mathcal{D} \subset Oyz, \eta_1(y,z) \leqslant x \leqslant \eta_2(y,z)\} \tag{$\dagger\dagger\dagger$}$$

Supposons, par exemple, que $\mathcal{E}$ est de la forme ($\dagger$) et que, à son tour, $\mathcal{D}$ est de la forme ($*$). Notre intégrale triple s'écrit

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{E}} f \, dV &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right) dA \\ &= \int_a^b \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx.\end{aligned}$$

Bien entendu, il y a plusieurs autres configurations possibles, 6 au total. Tout dépend de la façon dont le domaine d'intégration $\mathcal{E}$ est donné.

Les intégrales triples ont des propriétés analogues à celles des intégrales doubles, énoncées dans le théorème 3.1.6. En pratique, les régions qui nous intéressent sont des régions qui peuvent être découpées en un nombre fini de régions élémentaires. Comme mentionné ci-dessus, la complexité dans l'évaluation d'une intégrale triple est souvent d'établir les bornes d'intégration. Voyons quelques exemples.

Exemple 3.4.5

Soit

$$I = \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{(2-y)/2} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy,$$

où f est une fonction intégrable. Écrire les intégrales itérées équivalentes dans les ordres d'intégration $dy\,dx\,dz$ et $dx\,dy\,dz$.

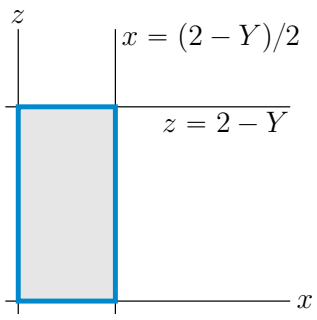
Solution. Afin de nous faire une idée du domaine d'intégration, nommons-le $\mathcal{E}$. Il convient de remarquer que

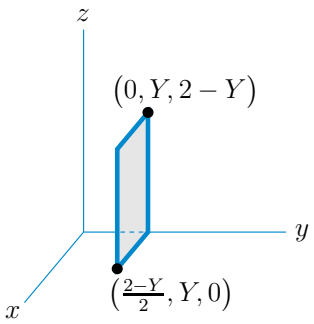
- la valeur de y (intégrale extérieure) varie globalement entre 0 et 2 ;
- pour chaque y dans cet intervalle, la valeur de z varie entre 0 et $2-y$;
- pour chaque (y,z) vérifiant ces conditions, la valeur de x varie entre 0 et $\frac{2-y}{2}$.

La région d'intégration est donc

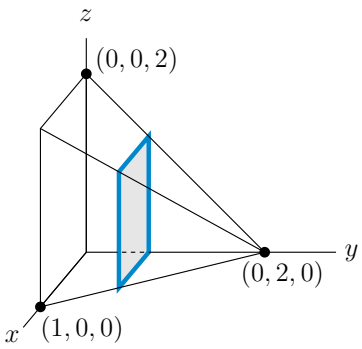
$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2-y,\ 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{2-y}{2} \right\}. \qquad (*)$$

Afin de faire une esquisse de $\mathcal{E}$, considérons les portions de cette région qui coupent les plans d'équation $y = Y$, avec $Y \in [0,2]$. Nous faisons ceci, car y est la dernière variable d'intégration. Nous devons avoir, d'après la description de $\mathcal{E}$ ci-dessus, $0 \leqslant x \leqslant 1 - Y/2$ et $0 \leqslant z \leqslant 2 - Y$. Cela revient à dire que les sections sont des rectangles dont les côtés ont pour longueur $1 - Y/2$ et $2 - Y$. Par exemple, à $Y = 0$, c'est-à-dire dans le plan Oxz, la portion de $\mathcal{E}$ est un rectangle dont les sommets sont $(0,0,0)$, $(0,0,2)$, $(1,0,2)$ et $(1,0,0)$.





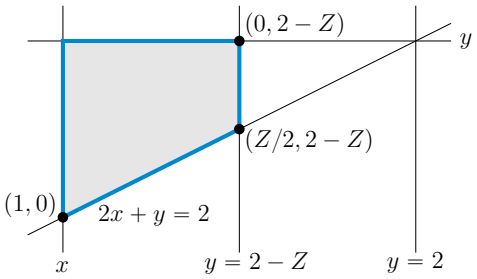
De plus, Y varie entre 0 et 2. Ainsi, notre solide $\mathcal{E}$ est formé d'un amoncellement de rectangles comme ceux décrits ci-dessus, les uns à côté des autres, empilés verticalement le long de l'axe des y. À mesure que l'on avance le long de cet axe, les rectangles rapetissent, et, lorsque $y = 2$, le rectangle devient un point. Voici une esquisse de $\mathcal{E}$ ci-contre, dans laquelle apparaît un de ces rectangles.

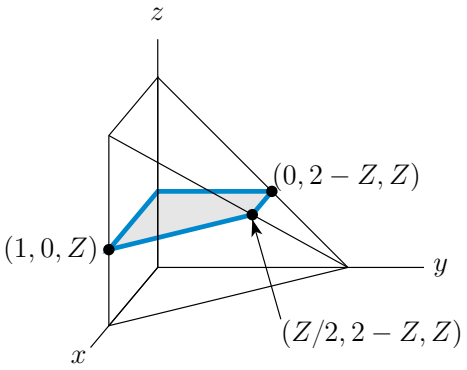


Pour écrire une intégrale avec z comme dernière variable d'intégration, nous coupons $\mathcal{E}$ avec des plans $z = Z$ qui sont perpendiculaires à l'axe Oz. De la figure ci-dessus, on déduit que cette coupe est non vide lorsque $0 \leqslant Z \leqslant 2$. De même, de l'expression de $\mathcal{E}$ $(*)$, nous avons qu'un point (x,y,Z) se trouve dans $\mathcal{E}$ si et seulement si

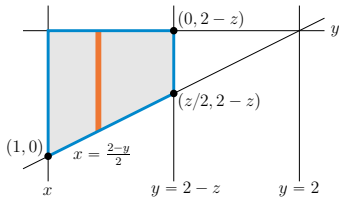
$$0 \leqslant y \leqslant 2, \qquad y \leqslant 2 - Z, \qquad 0 \leqslant x, \qquad 2x + y \leqslant 2.$$

La figure de gauche ci-dessous montre une esquisse d'une vue d'en haut de cette découpe, montrant les points (x, y) vérifiant ces contraintes. La figure de droite montre l'ensemble des (x, y, Z) qui vérifient ces mêmes contraintes.





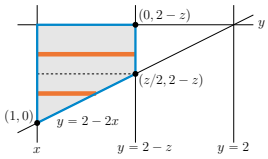
Pour exprimer I dans l'ordre d'intégration $dx\,dy\,dz$, on subdivise la portion de $\mathcal{E}$ se trouvant à $z = Z$ en des rectangles verticaux parallèles à l'axe des x, comme illustré ci-contre.



Nous avons alors que y varie de 0 à $2 - Z$ et que, pour chaque y dans cet intervalle, x varie entre 0 et $\frac{2-y}{2}$. Ainsi, nous avons

$$I = \int_0^2 \int_0^{2-z} \int_0^{(2-y)/2} f(x, y, z)\, dx dy\, dz.$$

Voyons maintenant comment exprimer I dans l'ordre $dy\,dx\,dz$. Nous subdivisons la section de $\mathcal{E}$ se trouvant à $z = Z$ en des rectangles horizontaux parallèles à l'axe des y, comme illustré ci-contre.

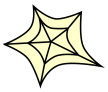


La valeur de x varie entre 0 et 1, mais, pour y, nous devons distinguer deux cas. En effet,

- lorsque x varie entre 0 et $z/2$, y varie entre 0 et $2 - z$, puis
- lorsque x varie entre $z/2$ et 1, y varie entre 0 et $2 - 2x$.

Ainsi,

$$I = \int_0^2 \int_0^{z/2} \int_0^{2-z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz + \int_0^2 \int_{z/2}^1 \int_0^{2-2x} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.$$



À vous de jouer 3.4.6

Évaluer l'intégrale triple $\iiint_{\mathcal{E}} xy\, dV$ où $\mathcal{E}$ est le tétraèdre solide ayant pour sommets $(0, 0, 0)$, $(7, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0$

Exemple 3.4.7

Soit $\mathcal{E}$ la région de $\mathbb{R}^3$ bornée en dessous par le plan Oxy, au-dessus par le plan $y+z=1$ et qui se trouve à l'intérieur du cylindre parabolique $y=x^2$, illustrée ci-contre.

Écrire les bornes d'intégration pour les intégrales pour les ordres d'intégration $dz\,dy\,dx$ et $dy\,dz\,dx$.

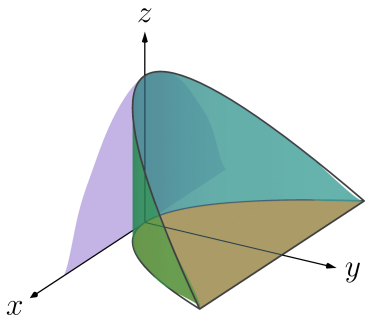
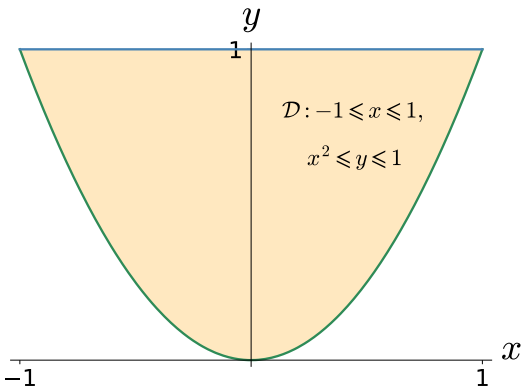


Figure 3.4.8 La région $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

Commençons par décrire $\mathcal{E}$ comme une région élémentaire, en laissant varier z entre $z=0=\phi_1(x,y)$ et $z=1-y=\phi_2(x,y)$ (puisque z varie entre le plan $z=0$ et le plan $y+z=1$). Notons que ces deux plans se coupent lorsque $0=1-y$, c'est-à-dire selon la droite $y=1$. Afin de décrire $\mathcal{E}$ sous la forme (†), nous la projetons sur le plan Oxy, obtenant la région $\mathcal{D}$.



Cette projection est la région bornée par $y=x^2$ et $y=1$,

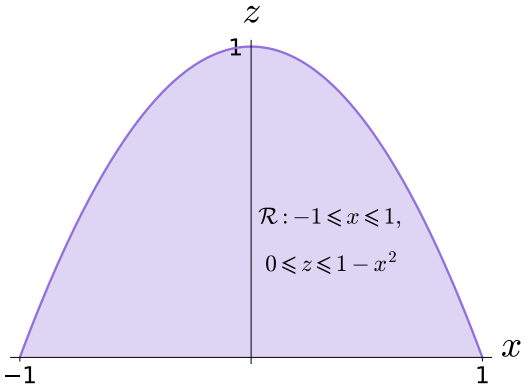
$$\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, -1\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant 1\}.$$

Pour chaque $(x,y)\in\mathcal{D}$, les points de $\mathcal{E}$ ont une coordonnée z vérifiant $0\leqslant z\leqslant 1-y$. Ainsi, l'intégrale qui nous intéresse est

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\; dz\,dy\,dx.$$

Pour le second ordre d'intégration, projetons maintenant $\mathcal{E}$ sur le plan Oxz.

La courbe d'intersection du cylindre $y=x^2$ et du plan $z=1-y$ devient la parabole $z=1-x^2$ du plan $y=0$. Ainsi, la projection de $\mathcal{E}$ sur Oxz est la région $\mathcal{R}$ de ce plan bornée par les courbes $z=1-x^2$ et $z=0$.



$$\mathcal{R} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2\}$$

Pour chaque $(x,z) \in \mathcal{R}$, les points de $\mathcal{E}$ ont une coordonnée y vérifiant $x^2 \leqslant y \leqslant 1 - z$. En effet, situons-nous au point $(x,0,z)$ et déplaçons-nous selon la direction des y. Nous entrons dans $\mathcal{E}$ lorsque nous atteignons le cylindre $y = x^2$ et nous quittons $\mathcal{E}$ lorsque nous atteignons le plan $y = 1 - z$. L'intégrale qui nous intéresse est donc

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{x^2}^{1-z} f(x,y,z)\ dy\, dz\, dx.$$

Applications des intégrales triples

Si une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$ permet de calculer une aire (affectée d'un signe) et que, de la même façon, une intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$ permet de calculer un volume (affecté d'un signe), une intégrale triple $\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dV$ permet de calculer un *hypervolume*. En effet, le graphe de $f(x,y,z)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$, le domaine d'intégration $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathbb{R}^3$.

Cependant, d'autres interprétations que nous avons déjà rencontrées admettent leurs analogues avec des intégrales triples. Par exemple, on peut tout de même calculer des volumes, des masses, des centres de masse et des moments d'inertie. Pour la suite, supposons que $\mathcal{E}$ est soit une région élémentaire, soit une réunion finie de régions élémentaires.

- ***Volume.*** Si $\mathcal{E}$ est donnée, son volume est obtenu en considérant la fonction $f(x,y,z) = 1$ dans la définition 3.4.1, c'est-à-dire

$$\mathrm{V}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} dV.$$

- ***Masse.*** Si la région $\mathcal{E}$ est occupée par un solide dont la densité au point (x,y,z) est donnée par une fonction $\rho(x,y,z)$ (qu'on se doit de supposer intégrable), alors la masse totale du solide est donnée par

$$\mathrm{Masse}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} \rho\ dV = \iiint_{\mathcal{E}} \rho(x,y,z)\,dV.$$

- ***Centre de masse.*** Le centre de masse de la région $\mathcal{E}$ considérée au paragraphe précédent s'obtient de la même façon que pour les intégrales doubles, à savoir

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\mathcal{E}} x\,\rho\,dV}{\iiint_{\mathcal{E}} \rho\,dV} = \frac{\iiint_{\mathcal{E}} x\ \rho(x,y,z)\,dV}{\mathrm{Masse}(\mathcal{E})},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_{\mathcal{E}} y\,\rho\,dV}{\iiint_{\mathcal{E}} \rho\,dV} = \frac{\iiint_{\mathcal{E}} y\ \rho(x,y,z)\,dV}{\mathrm{Masse}(\mathcal{E})},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\mathcal{E}} z\,\rho\,dV}{\iiint_{\mathcal{E}} \rho\,dV} = \frac{\iiint_{\mathcal{E}} z\ \rho(x,y,z)\,dV}{\mathrm{Masse}(\mathcal{E})}.$$

- ***Valeur moyenne.*** Tout comme nous l'avons vu à la définition 3.3.2 pour les fonctions de deux variables, nous pouvons calculer la valeur moyenne d'une fonction intégrable $f(x,y,z)$ sur une région $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Celle-ci est donnée par

$$\bar{f} = \frac{\iiint_{\mathcal{E}} f\, dV}{\iiint_{\mathcal{E}} dV} = \frac{\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\, dV}{\iiint_{\mathcal{E}} dV}.$$

Exemple 3.4.9

Considérer la région $\mathcal{E}$ de l'exemple 3.4.7 et supposer qu'elle est occupée par un solide dont la densité de masse au point (x,y,z) est donnée par $\rho(x,y,z) = ky$, où k est une constante positive. Calculer :

(a) Le volume de $\mathcal{E}$;

(b) La masse de $\mathcal{E}$;

(c) Les coordonnées de son centre de masse.

Solution.

(a) Le volume est donné par

$$\begin{aligned} V(\mathcal{E}) &= \iiint_{\mathcal{E}} dV = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} z\Big|_{z=0}^{z=1-y} dy\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} 1-y\ dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]\Big|_{y=x^2}^{y=1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\ dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{10}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

(b) La masse totale du solide est

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\mathcal{E}} \rho(x,y,z)\ dV = \iiint_{\mathcal{E}} kyd V \\ &= k\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} y\ dz\, dy\, dx = k\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} [yz]\Big|_{z=0}^{z=1-y}\ dy\, dx \\ &= k\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} y - y^2\ dy\, dx = k\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]\Big|_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= k\int_{-1}^{1} \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{1}{6}\ dx = k\left[\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{10} + \frac{x}{6}\right]\Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{8k}{35}. \end{aligned}$$

(c) Afin de calculer les coordonnées du centre de masse, nous aurons besoin des intégrales suivantes :

$$\iiint_{\mathcal{E}} x\rho\ dV, \qquad \iiint_{\mathcal{E}} y\rho\ dV, \qquad \iiint_{\mathcal{E}} z\rho\ dV.$$

Allons-y.

- On peut conclure sans calculs que $\iiint_{\mathcal{E}} kxy \; dV = 0$. En effet, la région d'intégration est invariante sous la transformation $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$. De plus, la fonction à intégrer, à savoir $f(x, y, z) = xy$, est une fonction impaire comme fonction de x, c'est-à-dire $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$.
- Notre deuxième intégrale doit être calculée :

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{E}} y\rho \; dV &= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} ky^2 \; dz \, dy \, dx \\
&= k \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \left[y^2 z \right]_{z=0}^{z=1-y} dy \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} y^2 (1-y) \; dy \, dx \\
&= k \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\
&= k \int_{-1}^{1} \frac{x^8}{4} - \frac{x^6}{3} + \frac{1}{12} \; dx \\
&= k \left[\frac{x^9}{36} - \frac{x^7}{21} + \frac{x}{12} \right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{8k}{63}.
\end{aligned}$$

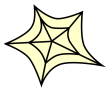
- De même, on calcule la troisième intégrale :

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{E}} z\rho \; dV &= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} kzy \; dz \, dy \, dx \\
&= k \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \left[\frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=0}^{z=1-y} dy \, dx \\
&= k \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \frac{y^3}{2} - y^2 + \frac{y}{2} \; dy \, dx \\
&= k \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4} \right]_{y=x^2}^{y=1} \\
&= k \int_{-1}^{1} \frac{-x^8}{8} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{24} \; dx \\
&= k \left[\frac{-x^9}{72} + \frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{20} + \frac{x}{24} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{16k}{315}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du centre de masse sont

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{0}{M} = 0, \\
\bar{y} &= \frac{8k}{63} \times \frac{35}{8k} = \frac{35}{63} = \frac{5}{9}, \\
\bar{z} &= \frac{16k}{315} \times \frac{35}{8k} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

À vous de jouer 3.4.10



Mettez en place une intégrale triple pour trouver la masse du tétraèdre solide délimité par le plan xy, le plan yz, le plan xz et le plan $x/6 + y/5 + z/30 = 1$, si la fonction de densité est donnée par $\delta(x, y, z) = x + y$. Écrivez une intégrale itérée de la forme ci-dessous pour trouver la masse du solide.

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \int_A^B \int_C^D \int_E^F \_\_\_\_\_\ dz\,dy\,dx$$

avec les bornes d'intégration

A = _____

B = _____

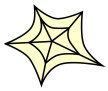
C = _____

D = _____

E = _____

F = _____

À vous de jouer 3.4.11



Trouvez le centre de masse du solide délimité par les plans $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, en supposant une densité de masse $\rho(x, y, z) = 14\sqrt{z}$.

$(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}})$ = _____

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Évaluez l'intégrale $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{b^2 - y^2}\ dA$ où $\mathcal{R}$ est le rectangle $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. *sans* calculer les intégrales itérées. Interprétez plutôt l'intégrale géométriquement.

2. Trouvez la masse totale de la boîte rectangulaire $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ (i.e. la boîte définie par les inégalités $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 3$), avec la fonction de densité $h(x, y, z) = x$.

3. Pour chacun des cas suivants, exprimez les intégrales itérées données en intégrales itérées dans lesquelles les intégrations sont effectuées dans l'ordre : d'abord z, ensuite y, puis x.

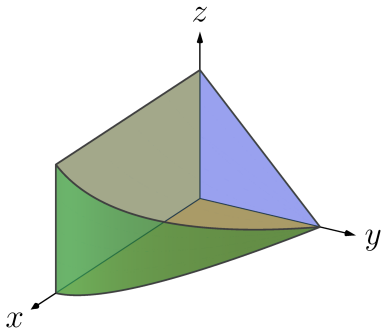
(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z} f(x,y,z)dxdydz.$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^y f(x,y,z)dxdydz.$

4. Écrire les intégrales données ci-dessous de 5 autres façons, chacune avec un ordre d'intégration différent.

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

5.

La figure ci-contre montre la région dans le premier octant limitée par les plans $x = 0, y = 0, z = 0, y+z = 2$ et le cylindre parabolique $x = 4-y^2$. Écrivez les intégrales triples dans les 6 ordres d'intégration possibles pour trouver le volume de cette région.



6. Soit $\mathcal{E}$ la portion du premier octant qui se trouve au-dessus du plan $z = x + y$ et sous le plan $z = 2$. La densité dans $\mathcal{E}$ est $\rho(x, y, z) = z$. Trouvez la masse de $\mathcal{E}$.

7. Évaluez l'intégrale triple $\iiint_{\mathcal{E}} x\, dV$, où $\mathcal{E}$ est la région du premier octant bornée par le cylindre paraboloïque $y = x^2$ et les plans $y + z = 1$, $x = 0$, et $z = 0$.

8. Soit

$$J = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Exprimez J comme une intégrale où les intégrations sont effectuées dans l'ordre x en premier, y en deuxième, puis z en dernier.

Pour mieux comprendre.

9. Évaluez $\iiint_{\mathcal{R}} x\, dV$, où $\mathcal{R}$ est le tétraèdre borné par les plans de coordonnées et le plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

10. Évaluez $\iiint_{\mathcal{R}} y\, dV$, où $\mathcal{R}$ est la portion du cube $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$ se trouvant au-dessus du plan $y + z = 1$ et sous le plan $x + y + z = 2$.

11. Une intégrale triple I est donnée sous forme d'intégrale itérée par

$$I = \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{2-y-z} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$$

(a) Dessinez une image assez précise de la région d'intégration $\mathcal{E}$ en trois dimensions. S'assurer de montrer les unités des axes de coordonnées.

(b) Réécrire l'intégrale triple I comme une ou plusieurs intégrales itérées triples dans l'ordre

$$\int_{y=}^{y=} \int_{x=}^{x=} \int_{z=}^{z=} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy.$$

12. Une intégrale triple J est donnée sous la forme d'intégrale itérée par

$$J = \int_0^1 \int_0^{1-\frac{x}{2}} \int_0^{4-2x-4z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx.$$

(a) Esquissez le domaine E en 3 dimensions. Assurez-vous de montrer les unités.

(b) Réécrire l'intégrale comme une ou plusieurs intégrales itérées de la forme

$$J = \int_{y=}^{y=} \int_{x=}^{x=} \int_{z=}^{z=} f(x,y,z)\; dz\, dx\, dy.$$

13. Soit $I = \iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\; dV$, où $\mathcal{E}$ est le tétraèdre ayant pour sommets $(-1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,0,3)$ et $(0,-2,0)$.

(a) Réécrire l'intégrale I dans la forme

$$I = \int_{x=}^{x=} \int_{y=}^{y=} \int_{z=}^{z=} f(x,y,z)\; dz\, dy\, dx.$$

(b) Réécrire l'intégrale I dans la forme

$$I = \int_{z=}^{z=} \int_{x=}^{x=} \int_{y=}^{y=} f(x,y,z)\; dy\, dx\, dz.$$

14. Soit $\mathcal{T}$ le tétraèdre borné par les plans de coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et le plan $x + y + z = 1$. Calculez

$$K = \iiint_{\mathcal{T}} \frac{1}{(1+x+y+z)^4}\; dV.$$

15. Soit $\mathcal{E}$ la région du premier octant bornée par les plans de coordonnées, le plan $x+y = 1$ et la surface $z = y^2$. Évaluez $\iiint_{\mathcal{E}} z\; dV$.

16. Évaluez $\iiint_{\mathcal{R}} yz^2 e^{-xyz}\; dV$ sur la boîte rectangulaire

$$R = \left\{ \; (x,y,z) \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1,\; 0 \leqslant y \leqslant 2,\; 0 \leqslant z \leqslant 3 \; \right\}$$

17.

(a) Esquissez la surface donnée par l'équation $z = 1 - x^2$.

(b) Soit $\mathcal{E}$ le solide borné par le plan $y = 0$, le cylindre $z = 1 - x^2$, et le plan $y = z$. Exprimez l'intégrale $\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\, dV$ comme une intégrale itérée.

18. Soit E la région bornée par $z = 2x$, $z = y^2$, et $x = 3$. L'intégrale triple $\iiint f(x,y,z)\, dV$ peut être exprimée comme une intégrale itérée dans les trois ordres d'intégration suivants. Complétez les bornes d'intégration dans chaque cas. Aucune explication requise.

$$\int_{y=}^{y=} \int_{x=}^{x=} \int_{z=}^{z=} f(x,y,z)\; dz\, dx\, dy$$

$$\int_{y=}^{y=} \int_{z=}^{z=} \int_{x=}^{x=} f(x,y,z)\; dx\, dz\, dy$$

$$\int_{z=}^{z=} \int_{x=}^{x=} \int_{y=}^{y=} f(x,y,z)\; dy\, dx\, dz$$

19. Soit $\mathcal{E}$ la région à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$, sous le plan $z = y$ et au-dessus du plan $z = -1$. Exprimez l'intégrale $\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\; dV$ comme trois intégrales itérées

différentes correspondantes à l'ordre d'intégration :

(a) $dz\,dx\,dy$, (b) $dx\,dy\,dz$ (c) $dy\,dz\,dx$

20. Soit $\mathcal{E}$ la région bornée par les plans $y = 0$, $y = 2$, $y + z = 3$ et la surface $z = x^2$. Considérez l'intégrale

$$I = \iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z)\ dV.$$

Écrivez cette intégrale dans chacun des ordres d'intégration suivants ; pour certains d'entre eux, une somme de deux intégrales sera nécessaire.

(a) $dz\,dx\,dy$

(b) $dx\,dy\,dz$

(c) $dy\,dx\,dz$

21. Évaluez $\iiint_{\mathcal{E}} z\,dV$, où $\mathcal{E}$ est la région bornée par les plans $y = 0$, $z = 0$ $x + y = 2$ et le cylindre $y^2 + z^2 = 1$ dans le premier octant.

22. Trouvez $\iiint_{\mathcal{D}} x\,dV$, où $\mathcal{D}$ est le tétraèdre borné par les plans $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, et $x + y + z = 2$.

23. La région solide $\mathcal{T}$ est bornée par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et $x + y + z = 2$ et la surface $x^2 + z = 1$.

(a) Dessinez la région en indiquant les coordonnées de chaque coin.

(b) Calculez $\iiint_{\mathcal{T}} x\,dV$.

3.5 Intégrales triples en coordonnées cylindriques et sphériques

Plusieurs problèmes présentent certaines symétries. Il est plus facile de travailler sur ces problèmes avec des systèmes de coordonnées qui se prêtent bien à ces contextes. Les coordonnées polaires en sont un exemple, en deux dimensions. Nous allons considérer deux analogues tridimensionnels, à savoir les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

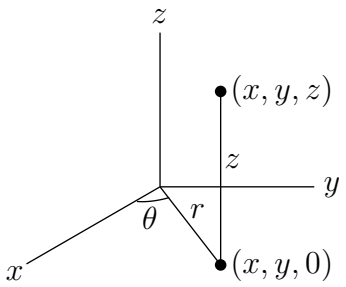
Coordonnées cylindriques

Supposons que nous voulons calculer la masse d'un objet qui est invariant par rotations autour de l'axe Oz, par exemple un tube ou une boîte de conserve. Il est naturel d'utiliser une généralisation des coordonnées polaires. La façon la plus facile de le faire est de considérer les coordonnées polaires dans le plan Oxy et d'ajouter la coordonnée z. Ceci donne ce qu'on appelle les *coordonnées cylindriques*.

Définition 3.5.1

Les coordonnées cylindriques d'un point (de coordonnées cartésiennes) (x, y, z) sont r, θ et z, définies par

$r =$ distance de $(x, y, 0)$ à $(0, 0, 0)$
$\quad =$ distance de (x, y, z) à l'axe z,
$\theta =$ angle entre l'axe Ox positif et
$\quad$ la demi-droite de $(0, 0, 0)$ à $(x, y, 0)$,
$z =$ distance signée de (x, y, z)
$\quad$ au plan Oxy,



c'est-à-dire que r et θ sont les coordonnées polaires usuelles et que z est z.

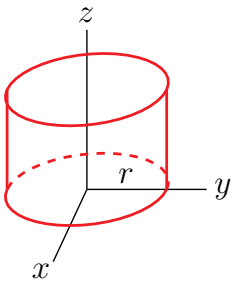
Comme pour les coordonnées polaires, il est utile de poser $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, même pour des valeurs négatives de r. Aussi, on fera attention au fait que la formule pour θ ne détermine l'angle qu'à π près. Il faut tenir compte du signe de x et y.

Formule 3.5.2

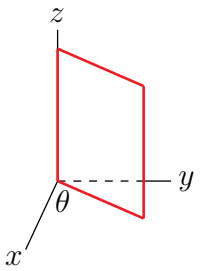
Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'un même point sont liées par les formules suivantes.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x} \qquad z = z$$

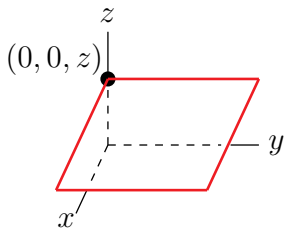
Voyons quelques surfaces données par les points dont les coordonnées cylindriques ont des valeurs constantes de r, θ ou z.



surface avec r constant
(coque cylindrique)



surface d'angle θ constant
(plan vertical)



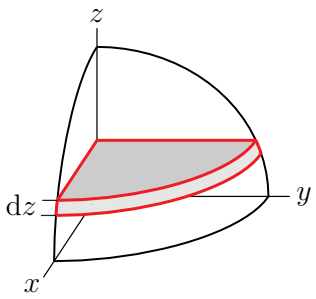
surface de z constant
(plan horizontal)

Volume en coordonnées cylindriques

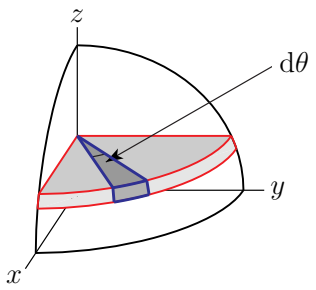
Afin d'utiliser les coordonnées cylindriques pour calculer des intégrales triples, nous devons calculer l'élément de volume, dV, comme nous l'avons fait pour les intégrales doubles en coordonnées polaires. En effet, nous avons d'abord établi que $dA = r\,dr\,d\theta$. Dans ce qui suit, nous allons établir que $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$.

Commençons donc par découper la région d'intégration :

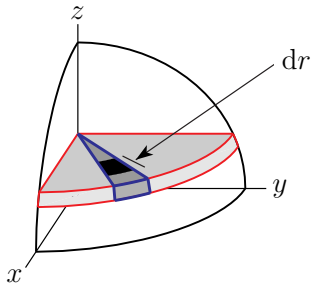
- D'abord horizontalement, en tranches d'épaisseur dz. Nous obtenons ceci en coupant par des plans horizontaux d'équation $z =$ constante.



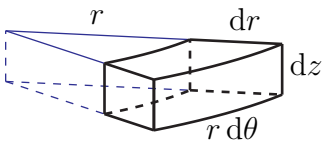
- Puis, en divisant les tranches au moyen de surfaces vérifiant $\theta =$ constante, avec les différences successives des différents θ égales à $d\theta$.



- Puis, en sous-divisant les quartiers ainsi obtenus en cubes approximatifs, en utilisant des surfaces vérifiant $r =$ constante, avec les différences entre deux de ces valeurs successives de r égales à dr.



Nous finissons donc avec des cubes approximatifs, comme illustré ci-contre.



- Lorsque nous avons effectué les coupes avec les surfaces ayant r constant, l'écart entre ces valeurs était dr : ainsi, l'arête indiquée dans la figure a une longueur dr.
- Lorsque nous avons effectué les coupes par les surfaces ayant z constant, les écarts étaient dx, de sorte que l'épaisseur, c'est-à-dire la longueur des traits verticaux, est dz.
- Lorsque nous avons effectué les coupes avec les surfaces ayant θ constant, l'écart entre deux de ces valeurs était $d\theta$: ainsi, les arêtes restantes sont des arcs de cercle de rayon r [1] qui sous-tend un angle θ et donc ont une longueur $r\,d\theta$. On pourra revoir la justification de la formule 3.2.6.

[1] En fait, le rayon intérieur est r, mais le rayon extérieur est $r + dr$. Cependant, l'erreur que ceci entraîne tend vers zéro lorsque dr, $d\theta$, $dz \to 0$.

Ainsi, le volume de ces cubes approximatifs est (essentiellement [2]) :

Formule 3.5.3

L'élément de volume en coordonnées cylindriques est donné par

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Quelques exemples de calcul

Les coordonnées cylindriques sont de mise lorsque l'intégrande f est invariant par rotations autour de l'axe Oz ou lorsque le domaine est cylindrique. Voyons un premier exemple.

Exemple 3.5.4

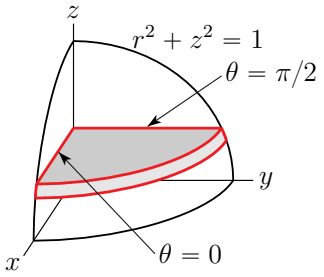
Trouver la masse du solide à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ lorsque la densité est $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

Solution. Avant de continuer, notons que x^2+y^2 est le carré de la distance de (x,y,z) à Oz. En conséquence, tant l'intégrande x^2+y^2 que le domaine d'intégration $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ sont invariants par rotations autour de l'axe Oz. Les coordonnées cylindriques sont donc un bon choix.

De nouveau, par symétrie, la masse totale de la sphère est huit fois la masse du premier octant.

Décrivons notre région d'intégration avec les coordonnées cylindriques pour calculer avec l'ordre d'intégration $dr\,d\theta\,dz$. Notons que l'équation de la sphère en coordonnées cylindriques est $r^2+z^2=1$.

- Les points de notre solide vérifient globalement $0\leqslant z\leqslant 1$.
- Pour chaque $z\in[0,1]$, les points (x,y,z) du solide vérifient $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1-z^2$ et $0\leqslant x,\ 0\leqslant y$. En coordonnées cylindriques, ceci revient à dire que (r,θ,z) vérifient $0\leqslant r^2\leqslant 1-z^2$ et $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$.
- L'intégrande est $\rho(x,y,z)=x^2+y^2=r^2$.



La masse de la portion du solide dans le premier octant est donc

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_{\mathcal{E}} \rho\,dV = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^2\ r\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^3\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} d\theta\,dz \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{\pi/2}\left(1-z^2\right)^2\,d\theta\,dz = \frac{\pi}{8}\int_0^1 1-2z^2+z^4\,dz \\
&= \frac{\pi}{8}\left[z-\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{\pi}{8}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{15}.
\end{aligned}$$

La masse totale de notre solide est donc $\frac{8\pi}{15}$.

[2] Par « essentiellement », on veut dire que la formule pour dV tient lorsqu'on prend la limite $dr, d\theta, dz\to 0$ au niveau des sommes de Riemann.

Sans la calculer, posons l'intégrale en utilisant les coordonnées cylindriques dans l'ordre d'intégration $dz\,dr\,d\theta$.

- La projection du solide (la partie dans le premier octant) sur le plan Oxy est le quart du disque unitaire. Il est décrit en coordonnées polaires par
$$\{(r,\theta)|0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}.$$
- Pour chaque (r,θ) sur cette région du plan, les points (r,θ,z) du solide vérifient $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-r^2}$.

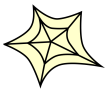
La masse est donc également calculée par l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r^3 dz\,dr\,d\theta.$$

Celle-ci est plus dure à calculer.

Finalement, voici l'intégrale correspondante en coordonnées cartésiennes.

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} \left(x^2+y^2\right)\ dx\,dy\,dz$$



À vous de jouer 3.5.5

Utilisez les coordonnées cylindriques pour intégrer la fonction $(x^2+y^2)^{1/5}$ sur la région bornée $\mathcal{E}$, délimitée en bas par le plan xy et en haut par le paraboloïde $z = 5-4x^2-4y^2$.

$$\iiint_{\mathcal{E}} (x^2+y^2)^{1/5}\,dV = \quad \_\_\_\_\_ \int \_\_\_\_\_ \quad \_\_\_\_\_ \int \_\_\_\_\_ \quad \_\_\_\_\_ \int \_\_\_$$



À vous de jouer 3.5.6

Évaluez l'intégrale triple

$\iiint_{\mathcal{E}} z\,dV$, où $\mathcal{E}$ est le solide délimité par le cylindre $y^2+z^2 = 144$ et les plans $x = 0$, $y = 2x$ et $z = 0$, dans le premier octant.

Dans notre prochain exemple, nous calculons le moment d'inertie d'un cône circulaire droit. Le moment d'inertie est défini (en deux dimensions) à la définition 3.3.14. Ceci s'étend naturellement à trois dimensions.

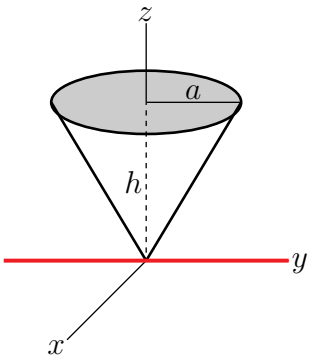
Formule 3.5.7

Le moment d'inertie d'un solide $\mathcal{V}$ dont la densité est $\rho(x,y,z)$ et dont la distance de chaque point à l'axe de rotation est $D(x,y,z)$ est donné par

$$I_{\mathcal{A}} = \iiint_{\mathcal{V}} D(x,y,z)^2\,\rho(x,y,z)\ dx\,dy\,dz.$$

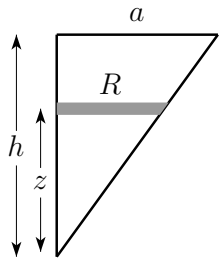
Exemple 3.5.8

Trouver le moment d'inertie d'un cône circulaire droit dont l'axe coïncide avec l'axe Oz et dont le sommet est, à l'origine, de rayon a, de hauteur h et de densité constante M autour de l'axe Oy, illustré ci-contre.



Solution. Calculons la densité ρ qui est constante. Comme la masse totale est M, la densité est $\rho = M/V$, où V est le volume. Nous devons donc calculer deux intégrales, une pour le volume puis une autre pour le moment d'inertie. Les deux auront le même domaine d'intégration $\mathcal{V}$, qui est décrit comme suit.

- Globalement, z varie de 0 à h.
- Pour chaque z dans cet intervalle, la section de $\mathcal{V}$ par un plan horizontal est un cercle de rayon az/h, et donc θ varie entre 0 et 2π, puis r varie entre 0 et az/h.



Commençons par calculer le volume du cône.

$$\begin{aligned} Vol(\mathcal{V}) &= \iiint_{\mathcal{V}} dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{az/h} r \; dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{r=az/h} d\theta \; dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{a^2 z^2}{h^2} \; d\theta \, dz \\ &= \pi \frac{a^2}{h^2} \int_0^h z^2 \; dz = \pi \frac{a^2}{h^3} \frac{1}{3} \; z^3 \Big|_{z=0}^{z=h} = \frac{1}{3} \pi a^2 h \end{aligned}$$

Calculons maintenant le moment d'inertie. Pour un point (x, y, z) donné, sa distance à l'axe de rotation (c'est-à-dire l'axe Oy) est $D(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$. Ainsi, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + z^2) \; dx \, dy \, dz &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h} z} r \overbrace{\left(r^2 \cos^2 \theta + z^2\right)}^{x^2 + z^2} dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a}{h} z\right)^4 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} z\right)^2 z^2\right] \\ &= \int_0^h dz \left[\frac{1}{4} \frac{a^4}{h^4} + \frac{a^2}{h^2}\right] \pi z^4, \\ &\qquad \text{puisque} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \; d\theta = \pi, \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{4} \frac{a^4}{h^4} + \frac{a^2}{h^2}\right] \pi h^5. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$I_{\mathcal{A}} = \iiint_{\mathcal{V}} \overbrace{(x^2+z^2)}^{D(x,y,z)^2} \overbrace{\frac{M}{\frac{1}{3}\pi a^2 h}}^{\rho(x,y,z)} \, dx\,dy\,dz$$
$$;= 3\frac{M}{\pi a^2 h}\,\frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}\frac{a^4}{h^4}+\frac{a^2}{h^2}\right]\pi h^5 = \frac{3}{20}M\left(a^2+4h^2\right).$$

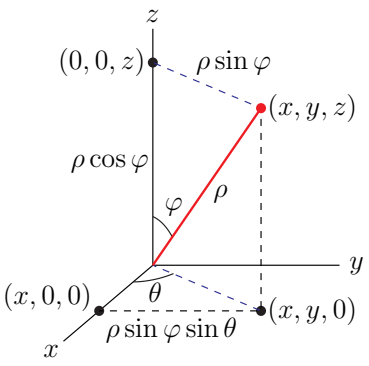
Coordonnées sphériques

Dans l'éventualité où l'on veut, par exemple, calculer une masse d'un objet qui est invariant par les rotations autour de tout axe passant par l'origine, il est avantageux d'utiliser un autre système de coordonnées, qui est aussi une généralisation des coordonnées polaires. Il s'agit des *coordonnées sphériques*. Cette fois, on mesure une distance à l'origine, puis deux angles, celui des coordonnées polaires et celui par rapport à l'axe Oz. Ce qui est fait ici est analogue au système utilisé pour repérer un endroit sur le globe terrestre : le rayon de la Terre étant spécifié, on donne la longitude, c'est-à-dire l'angle par rapport au méridien de Greenwich, puis la latitude, qui mesure l'angle d'écart par rapport à l'équateur terrestre. Pour les coordonnées sphériques, la latitude est mesurée par rapport au pôle nord.

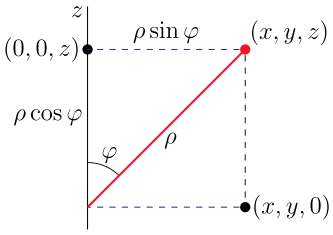
Définition 3.5.9

Les coordonnées sphériques d'un point de coordonnées cartésiennes (x,y,z) sont (r,θ,φ), définies par

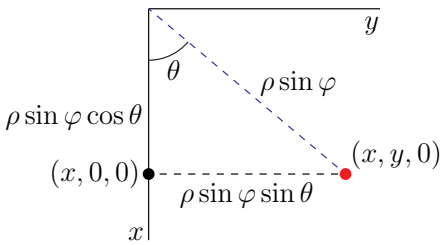
$\rho =$ distance de $(0,0,0)$ à (x,y,z),
$\varphi =$ angle entre l'axe Oz positif et la demi-droite, $(0,0,0)$ en direction de (x,y,z)
$\theta =$ angle entre l'axe Ox positif et la demi-droite de $(0,0,0)$ en direction de (x,y,z).



Voici deux figures donnant une vue latérale et une vue d'en haut de la figure ci-haut.



vue latérale



vue d'en haut

La coordonnée sphérique θ est la même que la coordonnée cylindrique θ. La coordonnée sphérique φ est nouvelle, elle parcourt l'intervalle allant de 0 (sur l'axe z positif, *« le pôle nord »*) à π (sur l'axe z négatif, *« le pôle sud »*). Les formules reliant les coordonnées cartésiennes et sphériques sont les suivantes.

Formule 3.5.10

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) d'un même point sont liées par les formules suivantes.

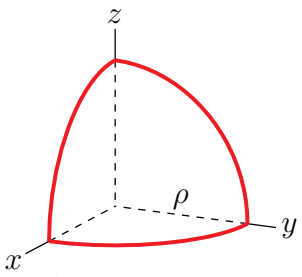
$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = \rho \cos\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}, \qquad \varphi = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$

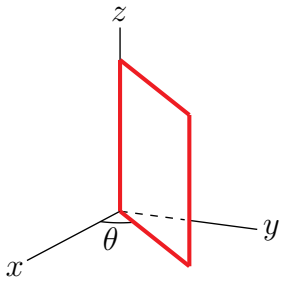
où, de nouveau, il faut faire preuve de vigilance : la formule pour θ ne permet que de le calculer à π près.

Voici trois figures montrant des surfaces où

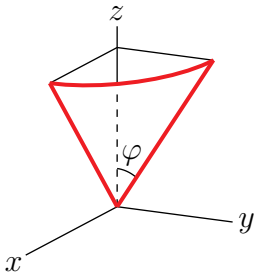
- ρ est constant, c'est-à-dire $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ avec ρ constant, il s'agit d'une sphère,
- θ est constant, c'est-à-dire un plan vertical, et
- φ est constant, c'est-à-dire une surface où $z = \sqrt{x^2 + y^2}\,\tan\varphi$ avec φ constante (ceci ressemble à un entonnoir).



surface de ρ constant
(une sphère)



surface de θ constant
(un plan vertical)

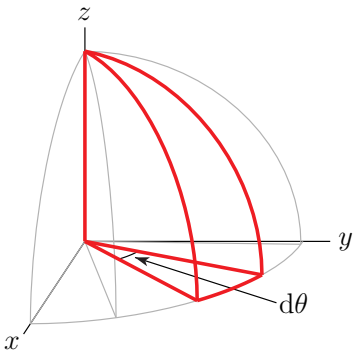


surface de φ constant
(un cône)

Volume en coordonnées sphériques

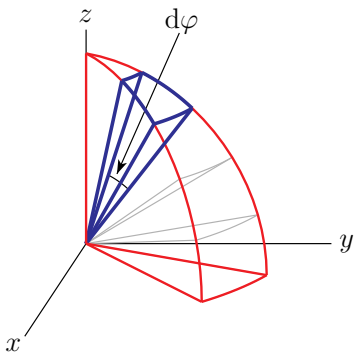
Si l'on coupe un solide

- en coupant d'abord selon des plans avec θ constant, où l'écart entre deux valeurs consécutives est $d\theta$,

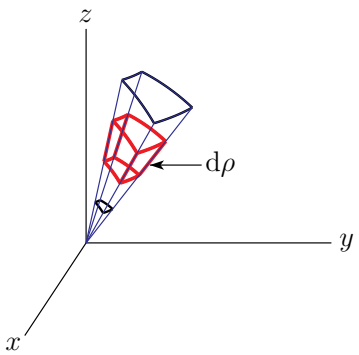


-

puis en coupant avec des surfaces avec φ constantes, avec la différence successive entre deux telles valeurs $d\varphi$,

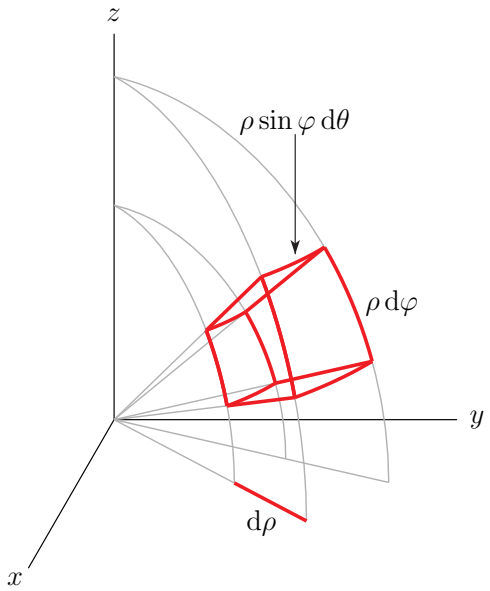


- puis en divisant ces régions en cubes approximatifs au moyen de surfaces données par des valeurs constantes de ρ, avec la différence entre deux de ces valeurs égale à $d\rho$,



Nous obtenons des cubes approximatifs, comme illustré ci-contre.

Les dimensions de ce cube en coordonnées sphériques sont essentiellement $d\rho$ par $\rho d\varphi$ par $\rho \sin\varphi\, d\theta$. Nous verrons pourquoi plus bas. Ainsi, le volume approché du cube est :



Formule 3.5.11

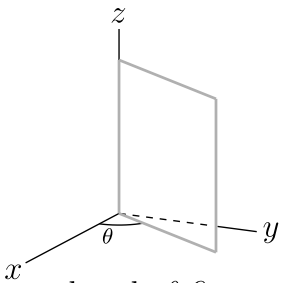
L'élément de volume en coordonnées sphériques est donné par

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

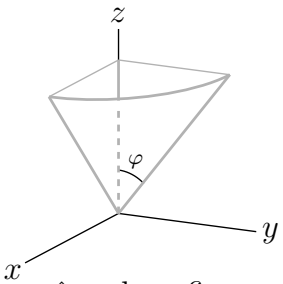
Voyons la justification de la formule ci-haut. Chacune des 12 arêtes du cube est formée en fixant les valeurs de deux des coordonnées ρ, θ, φ et en faisant varier la troisième.

- Quatre des arêtes sont formées en fixant θ et φ, et en faisant varier ρ. L'intersection d'un plan donné par θ fixe avec un cône donné par φ constant est une droite passant par

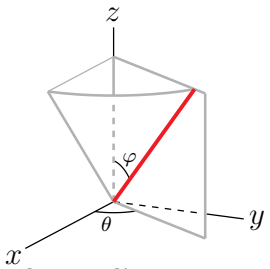
l'origine. Quand nous avons fait nos coupes par des valeurs différentes de ρ, l'écart entre deux valeurs de ρ successives a été $d\rho$, ainsi ces arêtes du cube ont pour longueur $d\rho$.



plan de θ fixe

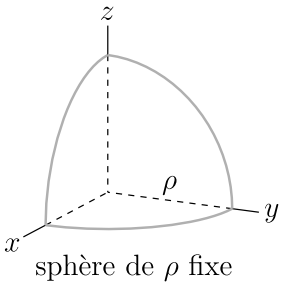


cône de φ fixe

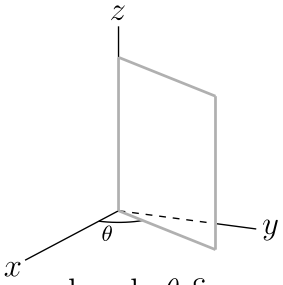


droite d'intersection

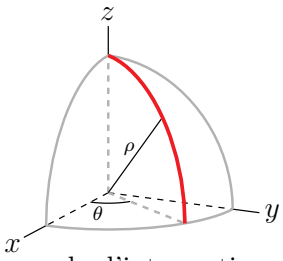
- Quatre autres des arêtes sont formées en fixant θ et ρ, et en faisant varier φ. L'intersection d'un plan donné par θ constant (qui contient l'origine) avec une sphère de rayon ρ fixe (centrée à l'origine) est un cercle de rayon ρ centré à l'origine, ce qu'on appellerait un *méridien*.



sphère de ρ fixe

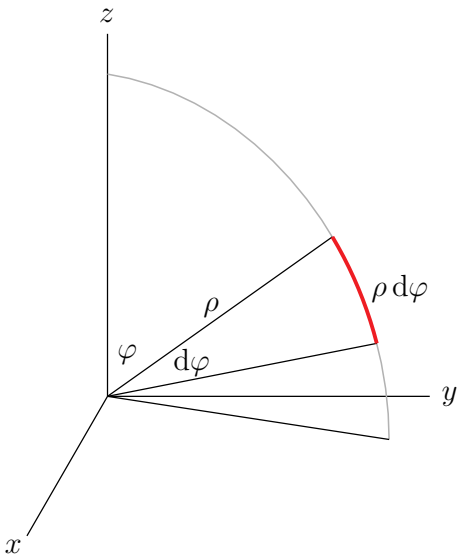


plan de θ fixe

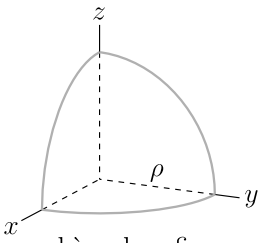


cercle d'intersection

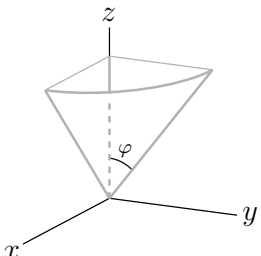
Quand nous avons fait nos coupes avec les surfaces de φ constant, la différence entre deux valeurs successives était $d\varphi$. Ainsi, ces quatre arêtes sont des arcs de cercle dont le rayon est essentiellement ρ et qui sous-tendent un angle $d\varphi$, elles ont donc une longueur $\rho\, d\varphi$.



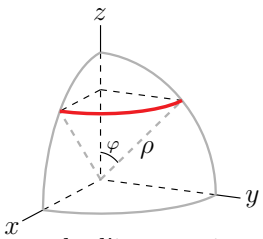
- Les quatre arêtes restantes sont formées en fixant φ et ρ, et en faisant varier θ. L'intersection d'un cône de φ fixe avec une sphère de ρ fixe est un cercle. Comme ρ et φ sont tous les deux fixes, le cercle est contenu dans le plan $z = \rho\cos\varphi$. En termes cartographiques, il s'agirait d'un *parallèle*. Le cercle a un rayon $\rho\sin\varphi$ et est centré à $(0, 0, \rho\cos\varphi)$.



sphère de ρ fixe

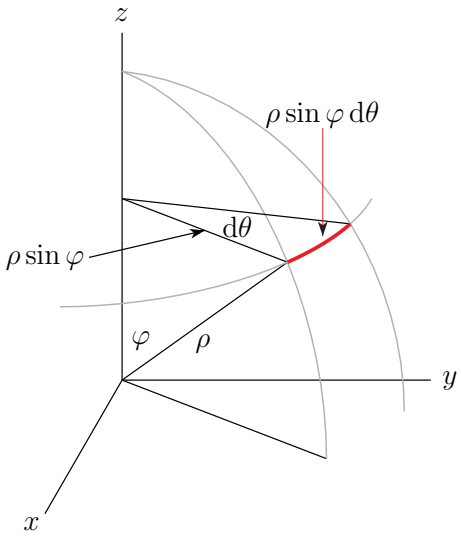


cône de φ fixe



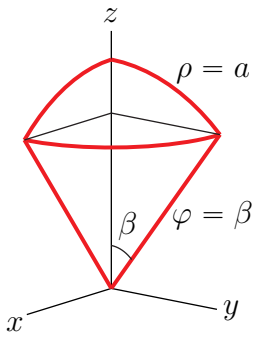
cercle d'intersection

Lorsque nous avons effectué nos coupes avec des surfaces de θ constant, la différence entre deux valeurs successives était $d\theta$. Ainsi, ces quatre arêtes du cube sont des arcs de cercle dont le rayon est essentiellement $\rho \sin \varphi$ et qui sous-tendent un angle $d\theta$. Leur longueur est donc $\rho \sin \varphi \, d\theta$.



Exemple 3.5.12 Cône de crème glacée.

Trouver le volume du cône de crème glacée formé par l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ qui se trouve au-dessus du plan Oxy et à l'intérieur du cône $x^2 + y^2 = b^2 z^2$, comme illustré ci-contre (portion dans le premier octant). Ici, a et b sont deux constantes strictement positives.



Solution. Remarquons que, en coordonnées sphériques,

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi, \qquad z^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Ainsi, en coordonnées sphériques, l'équation d'une sphère est $\rho = a$, et l'équation du cône est $\tan^2 \varphi = b^2$. Posons $\beta = \arctan b$, avec $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Afin de calculer le volume, décrivons notre région d'intégration en coordonnées sphériques. Nous avons que :

(a) l'angle θ varie entre 0 et 2π, puisque nous devons effectuer un tour complet autour de l'axe des z ;

(b) le rayon ρ varie entre 0 et a, puisque la région contient l'origine et est limitée par la sphère de rayon a ;

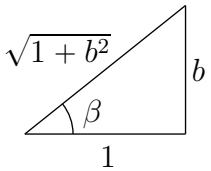
(c) l'angle φ varie entre 0 et β, puisque nous commençons au pôle nord et que nous sortons de notre crème glacée lorsque nous frappons le cylindre.

Ainsi, le volume est donné par

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathcal{V}) &= \iiint_{\mathcal{V}} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\beta} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\rho \, d\theta \\ &= \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{a} \rho^2 d\rho\right]\left[\int_0^{\beta} \sin\varphi \; d\varphi\right] \\ &= 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} \cdot (1-\cos\beta).\end{aligned}$$

Notons que nous avons pu séparer l'intégrale triple en un produit de trois intégrales, car l'intégrande est un produit de fonctions des variables d'intégration, et les bornes d'intégration sont constantes. C'est le résultat analogue du théorème 3.1.7 pour les intégrales triples.

Nous pouvons exprimer β (qui ne faisait pas partie du problème donné) en termes de b, il suffit regarder le triangle ci-joint.



Le côté droit ainsi que celui du bas ont été choisis de sorte que $\tan\beta = b$, c'est la définition de β. Ainsi, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$, et le volume de notre cône de crème glacée est

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{V}) = \frac{2\pi a^3}{3}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right].$$

À l'instar de l' exemple 3.2.13, nous pouvons faire quelques vérifications salutaires.

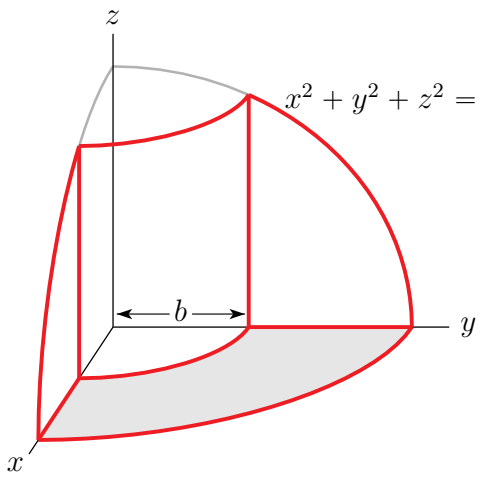
- Si $b = 0$, le cône est simplement $x^2 + y^2 = 0$, c'est-à-dire la droite $x = y = 0$ (il s'agit de l'axe des z), le volume total devrait être nul. Notre calcul donne en effet cette réponse.
- À la limite, lorsque $b \to \infty$, l'angle $\beta \to \frac{\pi}{2}$, et le cornet de crème glacée tend vers l'hémisphère nord de la sphère de rayon a. Notre calcul donne en effet le volume de l'hémisphère, à savoir $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi a^3$ lorsque $b \to \infty$.

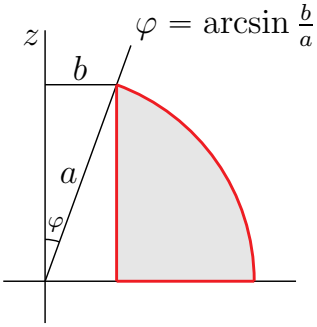
Exemple 3.5.13

Un trou cylindrique de rayon b est percé dans une pomme parfaitement symétrique dont le rayon est $a \geqslant b$. Trouver le volume restant de la pomme.

Solution. À l' exemple 3.2.13, nous avons calculé le volume enlevé. Nous pourrions donc déduire le volume restant, le tout avec des coordonnées cylindriques. Au lieu de faire ceci, nous allons évaluer le volume avec une intégrale en coordonnées sphériques.

Comme à l' exemple 3.2.13, choisissons notre système de coordonnées avec le centre de la pomme à l'origine et avec le centre de la perceuse suivant l'axe Oz. Voici une esquisse de la partie de la pomme du premier octant qui reste, ainsi qu'une vue latérale.





Afin de calculer le volume en coordonnées sphériques, décrivons la région.

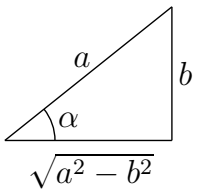
- Comme on doit effectuer un tour complet autour de l'axe z afin de parcourir la région, θ varie entre 0 et 2π.
- L'angle φ varie entre $\arcsin(b/a)$ et $\pi - \arcsin(b/a)$ (la figure de droite ci-haut ne montre que la moitié supérieure, avec $z \geqslant 0$; la moitié inférieure s'obtient par symétrie).
- Pour des valeurs de θ et φ fixées, les points (ρ, θ, φ) de notre région vérifient $\frac{b}{\sin\varphi} \leqslant \rho \leqslant a$. En effet, avec θ et φ fixes, lorsque nous faisons varier ρ, c'est-à-dire lorsque nous quittons l'origine, nous entrons dans la région qui nous importe par la paroi intérieure du trou percé (ligne droite verticale en rouge dans la figure de droite ci-haut). Ceci correspond à $\rho = \frac{b}{\sin\varphi}$. Puis, on quitte la région lorsqu'on rencontre la sphère de rayon a.

Afin d'alléger l'écriture, posons $\alpha = \arcsin(b/a)$. Le volume qui nous intéresse est donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathcal{V}) &= \iiint_{\mathcal{V}} dV = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^{\pi-\alpha} \int_{\frac{b}{\sin\varphi}}^{a} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_\alpha^{\pi-\alpha} \left[\frac{1}{3}\sin\varphi \rho^3\right]_{\rho=b/\sin\varphi}^{\rho=a} d\varphi \, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sin\varphi \left(a^3 - \frac{b^3}{\sin^3\varphi}\right) d\varphi \; d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^{\pi-\alpha} a^3 \sin\varphi - b^3 \csc^2\varphi \; d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{3}\left[-a^3\cos\varphi + b^3 \cot\varphi\right]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi-\alpha} \\
&= \frac{4\pi}{3}\left(a^3\cos\alpha - b^3\cot\alpha\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\int \csc^2\varphi \, d\varphi = -\cot\varphi + C$ ainsi que l'identité $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ et $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$, ce qui explique le facteur 2 supplémentaire (essentiellement, la moitié inférieure du solide, avec φ entre $\pi/2$ et $\pi - \alpha$, contribue exactement autant que la moitié supérieure, par symétrie).

Du triangle ci-contre, nous pouvons conclure que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ et que $\cot\alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.



Ainsi, le volume de la portion de pomme restante est

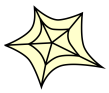
$$\mathrm{Vol}(\mathcal{V}) = \frac{4}{3}\pi\left[a^2 - b^2\right]^{3/2}.$$

Nous pouvons faire quelques vérifications comme à l' exemple 3.2.13.

- Si le rayon de la perceuse est $b = 0$, il n'y a rien qui est enlevé. Le volume restant doit être égal au volume de la sphère, $\frac{4}{3}\pi a^3$. Notre réponse est cohérente avec ceci.
- Si le rayon de la perceuse est $b = a$, toute la pomme est enlevée, le volume restant est 0. Encore une fois, notre réponse est en accord avec ceci.

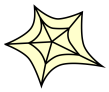
Comme vérification finale, notons que la somme des réponses de l' exemple 3.2.13 et de celui que nous venons de faire est bel et bien $\frac{4}{3}\pi a^3$, ce qui est rassurant.

À vous de jouer 3.5.14



Utilisez les coordonnées sphériques pour évaluer l'intégrale triple $\iiint_{\mathcal{E}}(x^2+y^2+z^2)\,dV$, où $\mathcal{E}$ est la boule $x^2+y^2+z^2 \le 9$.

À vous de jouer 3.5.15



Soit $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et W la moitié inférieure d'une sphère de rayon 3. Entrez ρ comme *rho,* ϕ comme *phi,* et θ comme *theta.*

(a) Sous forme d'intégrale itérée,

$$\iiint_W f\,dV = \int_A^B \int_C^D \int_E^F \_\_\_\_\_\; d\rho\, d\phi\, d\theta$$

avec les bornes d'intégration

A = _____

B = _____

C = _____

D = _____

E = _____

F = _____

(b) Évaluez l'intégrale. _____

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Utilisez (r,θ,z) pour dénoter les coordonnées cylindriques.

(a) Dessinez $r = 0$.

(b) Dessinez $r = 1$.

(c) Dessinez $\theta = 0$.

(d) Dessinez $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. Esquissez les points ayant les coordonnées cylindriques spécifiées.

(a) $r = 1$, $\theta = 0$, $z = 0$
(b) $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 0$
(c) $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$
(d) $r = 0$, $\theta = \pi$, $z = 1$
(e) $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 1$

3. Convertissez des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes.

(a) $r = 1$, $\theta = 0$, $z = 0$
(b) $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 0$
(c) $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$
(d) $r = 0$, $\theta = \pi$, $z = 1$
(e) $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 1$

4. Convertissez des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques.

(a) $(1, 1, 2)$
(b) $(-1, -1, 2)$
(c) $(-1, \sqrt{3}, 0)$
(d) $(0, 0, 1)$

5. Réécrire les équations suivantes en coordonnées cylindriques.

(a) $z = 2xy$ (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (c) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

6. Utilisez (ρ, θ, φ) pour dénoter les coordonnées sphériques.

(a) Dessinez $\varphi = 0$.
(b) Dessinez $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
(c) Dessinez $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
(d) Dessinez $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.
(e) Dessinez $\varphi = \pi$.

7. Esquissez le point ayant les coordonnées sphériques spécifiées.

(a) $\rho = 0$, $\theta = 0.1\pi$, $\varphi = 0.7\pi$
(b) $\rho = 1$, $\theta = 0.3\pi$, $\varphi = 0$
(c) $\rho = 1$, $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$
(d) $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$
(e) $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$
(f) $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$

8. Convertissez des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques.

(a) $(-2, 0, 0)$
(b) $(0, 3, 0)$
(c) $(0, 0, -4)$
(d) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}\right)$

9. Convertissez des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes.

(a) $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$
(b) $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

10. Réécrire les équations suivantes en coordonnées sphériques.

(a) $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ (b) $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ (c) $x^2 + y^2 = 4$

11. Soit B dénotant la région à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et au-dessus du cône $x^2 + y^2 = z^2$. Calculez le moment d'inertie $\iiint_B z^2\, dV$

12. Trouvez la limite ou montrez qu'elle n'existe pas $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$
Utilisez les coordonnées sphériques.

Pour mieux comprendre.

13. En utilisant les coordonnées sphériques et les intégrales, montrez que le volume de la sphère de rayon 1 centré à l'origine est $4\pi/3$.

14. Utilisez les coordonnées cylindriques afin d'évaluer les volumes de chacune des régions suivantes.

(a) Au-dessus du plan xy, à l'intérieur du cône $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ et à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 2ay$

(b) Au-dessus du plan xy, sous le paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$ et dans le coin $-x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$

(c) Au-dessus du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et sous le plan $z = 2y$

15. Soit $\mathcal{E}$ la région bornée entre les surfaces paraboloïque $z = x^2 + y^2$ et $z = 2 - x^2 - y^2$ et à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Calculez l'intégrale de $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{3/2}$ sur la région $\mathcal{E}$.

16. Soit $\mathcal{E}$ la région bornée au-dessus par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ et en-dessous par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$. Trouvez le centre de gravité de $\mathcal{E}$.

17. Soit $\mathcal{E}$ la région la plus petite parmi les deux solides bornés par les surfaces $z = x^2 + y^2$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Évaluez $\iiint_{\mathcal{E}}(x^2 + y^2)\, dV$.

18. Soit $a > 0$ un nombre réel positif fixé. Considérez le solide à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = ax$ et de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Calculez son volume.
Vous pouvez utiliser le fait que $\int \sin^3(\theta)\, d\theta = \frac{1}{12}\cos(3\theta) - \frac{3}{4}\cos(\theta) + C$

19. Soit E le solide se retrouvant à l'intérieur de la surface $z = y^2$ et sous la surface $z = 4 - x^2$. Évaluez $\iiint_E y^2\, dV$ Vous pouvez utiliser les formules d'angle moitié :

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

20. Le centre de masse $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ d'un corps B ayant une densité $\rho(x, y, z)$ (unités de masse par unité de volume) à (x, y, z) est défini comme étant

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_B x\rho(x,y,z)\, dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_B y\rho(x,y,z)\, dV$$
$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_B z\rho(x,y,z)\, dV$$

où $M = \iiint_B \rho(x, y, z)\, dV$ est la masse du corps. Donc, par exemple, $\bar{x}$ est la moyenne pondérée de x sur le corps. Trouvez le centre de masse de la partie de la boule solide $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ avec $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$, en assumant que sa densité ρ est constante.

21. Une sphère de rayon 2m centrée à l'origine a une densité variable donnée par $\frac{5}{\sqrt{3}}(z^2 + 1)$ kg/m^3. Un trou de diamètre 1m est percé à travers la sphère le long de l'axe z.

(a) Posez une intégrale triple en coordonnées cylindriques donnant la masse de la

sphère après que le trou ait été percé.

(b) Évaluez cette intégrale.

22. Considérez le solide fini borné par les trois surfaces : $z = e^{-x^2-y^2}$, $z = 0$ et $x^2 + y^2 = 4$.

(a) Posez (mais n'évaluez pas) l'intégrale triple en coordonnées cartésiennes décrivant le volume du solide.

(b) Calculez le volume du solide en utilisant n'importe quelle méthode.

23. Trouvez le volume du solide se trouvant à l'intérieur de $x^2 + y^2 = 4$, au-dessus de $z = 0$ et sous $2z = y$.

24. Considérez la région $\mathcal{E}$ de l'espace définie, en coordonnées sphériques, par $1 \leqslant \rho \leqslant 1 + \cos\varphi$.

(a) Dessinez, de façon raisonnablement précise, $\mathcal{E}$ en trois dimensions. S'assurer de montrer les unités sur les axes de coordonnées.

(b) Trouvez le volume de $\mathcal{E}$.

25. Utilisez les coordonnées sphériques pour évaluer l'intégrale $I = \iiint_{\mathcal{D}} z\,dV$, où $\mathcal{D}$ est le solide délimité par le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Autrement dit, (x, y, z) est dans $\mathcal{D}$ si et seulement si $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z$ et $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$.

26. Utilisez les coordonnées sphériques afin de trouver

(a) Le volume à l'intérieur du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(b) $\iiint_{\mathcal{R}} x\,dV$ et $\iiint_{\mathcal{R}} z\,dV$ au-dessus de la partie de la sphère de rayon a se trouvant dans le premier octant

(c) La masse de la planète sphérique de rayon a dont la densité à distance ρ du centre est $\delta = A/(B + \rho^2)$

(d) Le volume formé par $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. Ici ρ et φ réfèrent aux coordonnées sphériques usuelles.

27. Considérez la coquille hémisphérique délimitée par les surfaces sphériques

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

et au-dessus du plan $z = 0$. La coquille admet une densité constante D.

(a) Trouvez la masse de la coquille.

(b) Trouvez la location du centre de masse de la coquille.

28. Soit $I = \iiint_{\mathcal{T}} xz\,dV$ où $\mathcal{T}$ est le huitième de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ avec $x, y, z \geqslant 0$.

(a) Esquissez le volume $\mathcal{T}$.

(b) Exprimez I comme l'intégrale triple en coordonnées sphériques.

(c) Évaluez I par n'importe quelle méthode.

29. Évaluez $W = \iiint_{\mathcal{Q}} xz \, dV$, où $\mathcal{Q}$ est le huitième de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$ avec x, y, $z \geqslant 0$.

30. Évaluez $\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} \left[1 + (x^2 + y^2 + z^2)^3\right]^{-1} \, dV$.

31. Évaluez

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} \, dz \, dy \, dx$$

en changeant en coordonnées sphériques.

32. Évaluez le volume d'un cylindre de rayon a et de hauteur h à l'aide d'une intégrale en coordonnées sphériques.

33.

(a) Évaluez $\iiint_{\Omega} z \, dV$, où Ω est la région à trois dimensions dans le premier octant $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(b) Utilisez le résultat de la partie (a) afin de déterminant rapidement le centre de gravité d'une boule hémisphérique donnée par $z \geqslant 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

34. Considérez la moitié supérieure d'une boule de rayon 2 centrée à l'origine. Supposons que la boule a une densité variable égale à $9z$ unités de masse par unité de volume.

(a) Posez une intégrale triple donnant la masse de cette demi-boule.

(b) Trouvez quelle fraction de cette masse se trouve à l'intérieur du cône d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

35. Un certain solide V est un cylindre circulaire droit. Sa base est le disque de rayon 2 centré à l'origine dans le plan xy. Il a une hauteur de 2 et sa densité est donnée par $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Un solide plus petit U est obtenu en retirant le cône inversé, dont la base est la surface supérieure de V et dont le sommet est le point $(0, 0, 0)$.

(a) Utilisez les coordonnées cylindriques pour poser une intégrale donnant la masse de U.

(b) Utilisez les coordonnées sphériques pour poser une intégrale donnant la masse de U.

(c) Trouvez la masse.

36. Un solide est borné en-dessous par le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et au-dessus par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Sa densité est $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

(a) Exprimez la masse M du solide comme une intégrale triple, dont les bornes sont en coordonnées cylindriques.

(b) Comme en (a), mais en coordonnées sphériques.

(c) Évaluez M.

37. Soit $I = \iiint_{\mathcal{E}} xz \, dV$ où $\mathcal{E}$ est le huitième de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ avec $x, y, z \geqslant 0$.

(a) Exprimez I comme une intégrale triple en coordonnées sphériques.

(b) Exprimez I comme une intégrale triple en coordonnées cylindriques.

(c) Évaluez I par n'importe quelle méthode.

38. Soit $I = \iiint_{\mathcal{T}} (x^2 + y^2) \, dV$ où $\mathcal{T}$ est la région solide bornée en-dessous par le cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et au-dessus par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(a) Exprimez I comme une intégrale triple en coordonnées sphériques.

(b) Exprimez I comme une intégrale triple en coordonnées cylindriques.

(c) Évaluez I par n'importe quelle méthode.

39. Soit $\mathcal{E}$ le « cornet de crème à glace » $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $z \geqslant 0$. Considérez $J = \iiint_{\mathcal{E}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$

(a) Écrire J comme une intégrale itérée, dont les bornes sont en coordonnées cylindriques.

(b) Écrire J comme une intégrale itérée, dont les bornes sont en coordonnées sphériques.

(c) Évaluez J.

40.

(a) Trouvez le volume du solide à l'intérieur de la surface définie par l'équation $\rho = 8\sin(\varphi)$ en coordonnées sphériques.

Vous pouvez utiliser le fait que

$$\int \sin^4(\varphi) d\varphi = \frac{1}{32} \left(12\varphi - 8\sin(2\varphi) + \sin(4\varphi)\right) + C$$

(b) Esquissez le solide ou décrivez ce à quoi il ressemble.

41. Soit $\mathcal{E}$ le solide

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

et considérez l'intégrale

$$I = \iiint_{\mathcal{E}} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV.$$

(a) Écrivez l'intégrale I en coordonnées cylindriques.

(b) Écrivez l'intégrale I en coordonnées sphériques.

(c) Évaluez l'intégrale I en utilisant une des deux formes.

42. Considérez l'intégrale itérée

$$I = \int_{-a}^{0} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{0} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2014} \, dz\, dy\, dx,$$

où a est une constante positive.

(a) Écrivez I comme une intégrale itérée en coordonnées cylindriques.

(b) Écrivez I comme une intégrale en coordonnées sphériques.

(c) Évaluez I en utilisant la méthode que vous préférez.

43. Le solide $\mathcal{E}$ est borné en-dessous par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et au-dessus par le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Soit $I = \iiint_{\mathcal{E}} z\left(x^2+y^2+z^2\right)\, dV$.

(a) Écrire I en termes des coordonnées cylindriques. Ne pas évaluer.

(b) Écrire I en termes des coordonnées sphériques. Ne pas évaluer.

(c) Calculez I.

44. Soit $\mathcal{S}$ la région du premier octant (i.e. $x, y, z \geqslant 0$) qui se trouve entre le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et en-dessous de la sphère $(z-1)^2 + x^2 + y^2 = 1$. Soit V son volume.

(a) Exprimez V comme une intégrale triple en coordonnées cylindriques.

(b) Exprimez V comme une intégrale triple en coordonnées sphériques.

(c) Calculez V en utilisant une des deux intégrales ci-dessus.

45. Un solide est borné en-dessous par le cône $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$ et au-dessus par la sphère $x^2+y^2+z^2 = 9$. Sa densité est donnée par $\delta(x,y,z) = x^2+y^2$.

(a) Exprimez la masse m du solide comme une intégrale triple en coordonnées cylindriques.

(b) Exprimez la masse m du solide comme une intégrale triple en coordonnées sphériques.

(c) Évaluez m.

Pour aller plus loin.

46. La densité de l'hydrogène gazeux dans une région de l'espace est donnée par la formule

$$\rho(x,y,z) = \frac{z+2x^2}{1+x^2+y^2}.$$

(a) À $(1,0,-1)$, dans quelle direction est-ce que la densité de l'hydrogène augmente le plus rapidement ?

(b) Vous êtes dans un vaisseau spatial à l'origine. Supposons que le vaisseau spatial vole dans la direction de $\mathbf{k}$. Il y a un disque de rayon 1, centré sur le vaisseau spatial et déployé perpendiculairement à la direction de la trajectoire, pour capter l'hydrogène. Quelle quantité d'hydrogène a été collectée au moment où le vaisseau spatial a parcouru une distance 2 ?

Vous pouvez utiliser le fait que $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi$.

47. Un tore $\mathcal{T}$ de masse M est généré en effectuant la rotation d'un cercle de rayon a autour d'un axe dans son plan à distance b du centre ($b > a$). Le tore a une densité constante. Trouvez le moment d'inertie autour de l'axe de rotation. Par définition le moment d'intertie est $\iiint_{\mathcal{T}} r^2 dm$, où dm est la masse d'une pièce infiniment petite du solide et r est sa distance par rapport à l'axe.

48. Le corps d'un bonhomme de neige est formé par les boules de neige $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ (ceci est son corps) et $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$ (ceci est sa tête).

(a) Trouvez le volume du bonhomme de neige en soustrayant l'intersection des deux boules de neige de la somme des volumes des boules de neige. [Rappelons que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4\pi}{3}r^3$.]

(b) Nous pouvons également calculer le volume du bonhomme de neige comme une somme des intégrales triples suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \rho^2 \sin\varphi \; d\rho \, d\theta \, d\varphi$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}\,r}^{4-\frac{r}{\sqrt{3}}} r \; dz \, dr \, d\theta$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^2 \sin(\varphi) \; d\rho \, d\theta \, d\varphi$

Encerclez la bonne réponse parmi les choix soulignés et remplissez les espaces vides dans les descriptions suivantes de la région d'intégration pour chaque intégrale. [Remarque : nous avons déplacé les axes afin d'écrire certaines des intégrales ci-dessus. Les équations que vous indiquez doivent être celles avant que la translation ne soit effectuée].

i La région d'intégration dans (1) est une partie du bonhomme de neige.

corps / tête / corps et tête

C'est le solide entouré par la/le

sphère / cône

défini(e) par l'équation

_____

et la/le

sphère / cône

défini(e) par l'équation

_____.

ii La région d'intégration dans (2) est une partie du bonhomme de neige.

corps / tête / corps et tête

C'est le solide entouré par la/le

sphère / cône

défini(e) par l'équation

_____

et la/le

sphère / cône

défini(e) par l'équation

_____.

iii La région d'intégration dans (3) est une partie du bonhomme de neige.

corps / tête / corps et tête

C'est le solide entouré par la/le

sphère / cône

défini(e) par l'équation

_____

et la/le

sphère / cône

défini(e) par l'équation

_____.

3.6 Changements de variables pour les intégrales multiples

Quelques rappels

Une des techniques les plus utiles pour calculer des intégrales (simples) est le changement de variables, qu'on peut énoncer comme suit.

Formule 3.6.1

Soit f une fonction intégrable et g une fonction différentiable. On pose $x = g(u)$, alors

$$\int_a^b f(g(u))\, g'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx. \qquad (*)$$

Remarquons que, dans la pratique, lorsque nous effectuons un changement de variables, nous partons de l'intégrale de gauche dans l'équation (∗), puis

(a) nous établissons les limites de l'intervalle d'intégration pour la nouvelle variable u en commençant à $g(a)$ et en terminant à $g(b)$;

(b) nous faisons la substitution $g(u) \to x$;

(c) nous tenons compte de l'élément différentiel en substituant $g'(u)\,du \to dx$. Ceci ressemble à une « simplification »

$$g'(u)\,du = \frac{dx}{du}\,du = dx.$$

Il faut bien comprendre cependant que cette « simplification » est seulement un procédé mnémotechnique, il ne s'agit pas de divisions.

On démontre la validité de cette formule au moyen du théorème fondamental du calcul. Cette approche s'adapte mal au cas des intégrales multiples, mais on peut comprendre ceci autrement.

(a) Lorsque la variable u parcourt l'intervalle $[a, b]$, la variable $x = g(u)$ parcourt un intervalle, commençant à $g(a)$ et finissant à $g(b)$. Il se peut que l'ordre des extrémités soit échangé (si g est décroissante par exemple). Il est aussi possible que x sorte de cet intervalle, en dépassant $g(b)$, mais elle doit revenir à $g(b)$. Au niveau de l'intégrale, ces deux passages s'annuleront.

(b) Une variation Δu, par exemple une longueur d'intervalle, est transformée approximativement en une variation $\Delta x = g'(u^*)\Delta u$.

(c) L'intégrande $f(g(u))$ est transformé en $f(x)$.

Voyons comment adapter cette approche aux intégrales doubles.

Changement de variables pour les intégrales doubles

Supposons donc que nous avons une région $\mathcal{R}$ dans le plan Oxy et que nous voulons effectuer un changement de variables. Ceci revient à nous donner une transformation $\mathbf{r}$ définie sur une partie du plan Ouv, donnée par $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$ et qui couvre la région $\mathcal{R}$.

Comme précédemment, l'idée de base est d'analyser l'effet de la transformation $\mathbf{r}$ sur un petit élément d'aire $\Delta u\,\Delta v$ en utilisant l'approximation linéaire. On suppose par surcroît que $\mathbf{r}$ est différentiable, ce qui garantit que cette approximation est bonne.

Considérons donc un rectangle $\mathcal{S}$ dans le plan Ouv dont les sommets sont les points $S_0(u_0, v_0)$, $S_1(u_0 + \Delta u, v_0)$, $S_2(u_0, v_0 + \Delta v)$ et $S_3(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$. Les points images de ces points dans le plan Oxy par la transformation $\mathbf{r}$ sont alors

$$P_0 = \mathbf{r}(S_0), \qquad P_1 = \mathbf{r}(S_1), \qquad P_2 = \mathbf{r}(S_2), \qquad P_3 = \mathbf{r}(S_3).$$

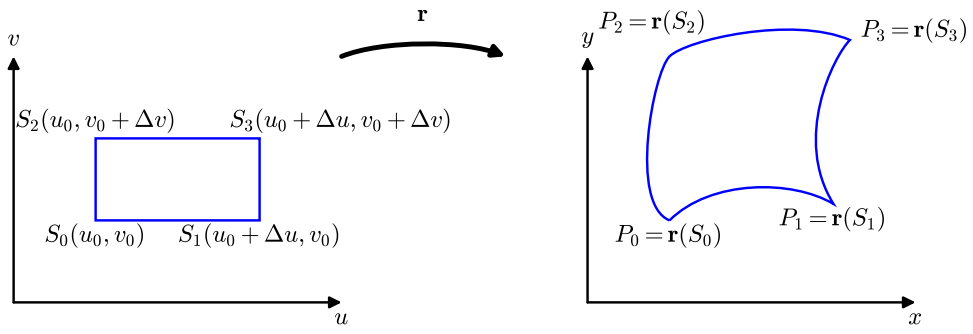


Figure 3.6.2 Le changement de variables est donné par une fonction $\mathbf{r}$ qui transforme un rectangle en une région qui est approximativement un parallélogramme.

Nous avons alors l'approximation linéaire de $\mathbf{r}$ autour de $S_0 = (u_0, v_0)$. Pour une variation $\mathbf{\Delta}S = (\Delta u, \Delta v)$ près de S_0,

$$\mathbf{r}(S_0 + \mathbf{\Delta}S) \approx \mathbf{r}(S_0) + \mathbf{D}\mathbf{r}(S_0)\mathbf{\Delta}S,$$

ou encore

$$\mathbf{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) \simeq \mathbf{r}(u_0,v_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v,$$

ce qui, à son tour, peut s'écrire composante à composante :

$$\begin{aligned} x(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) &\simeq x(u_0,v_0) + \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v,\\ y(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) &\simeq y(u_0,v_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v. \end{aligned}$$

Ainsi, on invoque trois fois ces formules pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{r}(u_0,\, v_0),\\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{r}(u_0+\Delta u, v_0) && \approx \mathbf{r}(u_0,\, v_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0)\,\Delta u,\\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{r}(u_0, v_0+\Delta v) && \approx \mathbf{r}(u_0,\, v_0) && + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)\,\Delta v,\\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) && \approx \mathbf{r}(u_0,\, v_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0)\,\Delta u && + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)\,\Delta v. \end{aligned}$$

Notons que nous avons laissé tomber les termes de degré 2 ou plus dans l'approximation de Taylor de $\mathbf{r}$. Nous ne le ferons pas ici, mais il est possible de démontrer que ces termes ont une contribution nulle à l'intégrale : le passage à la limite les annule.

L'image de notre région $\mathcal{S}$ de départ peut être approchée par le quadrilatère de $\mathbf{r}(S_0), \mathbf{r}(S_1), \mathbf{r}(S_2)$ et $\mathbf{r}(S_3)$, qui est lui-même approximativement un parallélogramme, puisque

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P_1} &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(S_0)\Delta u \approx \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 = \overrightarrow{P_3P_2},\\ \overrightarrow{P_0P_2} &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(S_0)\Delta v \approx \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 = \overrightarrow{P_1P_3}. \end{aligned}$$

L'aire du parallélogramme en question est la norme du produit vectoriel des vecteurs correspondant aux côtés du parallélogramme[1]. Or, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(S_0) &= \frac{\partial x}{\partial u}(S_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(S_0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k},\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(S_0) &= \frac{\partial x}{\partial v}(S_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(S_0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Afin d'alléger l'écriture, omettons le point d'évaluation des dérivées partielles. Nous devons calculer le produit vectoriel

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \mathbf{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Delta u\,\Delta v = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\Delta u\,\Delta v\,\mathbf{k}.$$

Le vecteur $\mathbf{k}$ étant unitaire, l'aire qui nous intéresse est donc

$$\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right|\,\Delta u\,\Delta v = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| \Delta u\,\Delta v.$$

Ceci nous mène à la définition suivante.

[1] Qu'on considère comme des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, en ajoutant une troisième composante nulle.

Définition 3.6.3

Étant donné une transformation $\mathbf{r}$ donnée par $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j}$, son **jacobien** est le déterminant

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}.$$

Avec ces notations, la petite région $\mathcal{S}$ du plan Ouv est transformée en une région $\mathcal{R}$ du plan Oxy dont l'aire vaut

$$\Delta A = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u\, \Delta v.$$

Prenons maintenant une région générale $\mathcal{S}$ dans Ouv telle que lorsque (u,v) parcourt $\mathcal{S}$, alors $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j}$ parcourt $\mathcal{R}$ une seule fois[2]. On divise $\mathcal{S}$ en plusieurs rectangles $\mathcal{S}_{ij}$, puis on dénote par $\mathcal{R}_{ij}$ leurs images par $\mathbf{r}$.

Quand nous avons construit les intégrales doubles, nous avons considéré des divisions du domaine d'intégration $\mathcal{R}$ en rectangles pour construire les sommes de Riemann. Il se trouve que cette division peut être faite de façon plus générale, les rectangles ne sont pas nécessaires. Ici, nous allons utiliser les $\mathcal{R}_{ij}$ comme sous-régions. L'aire de chacune de ces régions sera notée ΔA_{ij}. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dA &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta A_{ij} \\ &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_i,v_i)\right| \Delta u\, \Delta v. \end{aligned}$$

Cette double somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r}(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv.$$

Théorème 3.6.4

Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ deux régions élémentaires des plans Ouv et Oxy respectivement, $\mathbf{r} : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ une transformation de classe C^1 telle que $\mathbf{r}(u,v)$ parcourt $\mathcal{R}$ une seule fois lorsque (u,v) parcourt $\mathcal{S}$, et f une fonction continue sur $\mathcal{R}$, alors

$$\iint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r}(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dx\, dy. \qquad (**)$$

Avec les composantes et les variables écrites explicitement, ceci devient

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dx\, dy.$$

En particulier,

$$dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv. \qquad (\dagger)$$

[2] En réalité, on peut affaiblir un peu cette condition : les points du bord de $\mathcal{R}$ pourraient être atteints plus d'une fois. En termes précis, on dira que la transformation $\mathbf{r}$ est *injective* sur $\mathcal{S}$, sauf peut-être sur son bord.

Nous verrons quelques exemples, mais avant faisons la remarque qui suit.

Remarque 3.6.5

Nous avons que la dérivée de la transformation $\mathbf{r}$ est la matrice des dérivées partielles de ses composantes par rapport aux différentes variables, à savoir

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le jacobien de la transformation $\mathbf{r}$ est simplement le déterminant de la matrice $\mathbf{D}(\mathbf{r})$.

Les formules (∗) et (∗∗) sont donc très similaires.

Regardons maintenant quelques exemples. Commençons par regarder les coordonnées polaires à nouveau.

Exemple 3.6.6 dA **en coordonnées polaires.**

Les coordonnées polaires peuvent être interprétées comme une transformation $\boldsymbol{\phi}(r,\theta) = x(r,\theta)\mathbf{i} + y(r,\theta)\mathbf{j}$ avec

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= r\cos\theta, \\ y(r,\theta) &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\sin\theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

la formule (†), avec r dans le rôle de u et avec θ dans celui de v, donne alors

$$\begin{aligned} dA &= \left|\det \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}\right| dr d\theta = \left(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right) dr d\theta \\ &= r\, dr\, d\theta, \end{aligned}$$

qui est exactement ce que nous avons trouvé dans la formule 3.2.6.

Exemple 3.6.7 dA **en coordonnées paraboliques.**

Les « coordonnées paraboliques » sont données par

$$x(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad y(u,v) = uv.$$

Le nom vient de ce que les courbes obtenues lorsque u ou v sont constantes sont des paraboles.

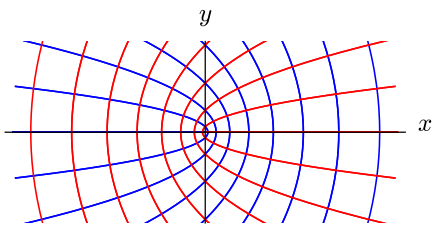


Figure 3.6.8 Courbes à u constant (bleu) ou v constant (rouge).

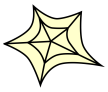
On calcule aisément

$$\frac{\partial x}{\partial u} = u, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = v,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -v, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = u,$$

et (†) donne alors

$$dA = \left|\det \begin{bmatrix} u & v \\ -v & u \end{bmatrix}\right| du dv = (u^2 + v^2)\, du\, dv.$$



À vous de jouer 3.6.9

Considérer le changement le variables $T : x = \frac{28}{53}u - \frac{45}{53}v, \quad y = \frac{45}{53}u + \frac{28}{53}v$

A. Calculer le Jacobien :

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} =$ _____

B. La transformation est linéaire et donc envoie les droites sur des droites. Elle envoie donc le carré $S : -53 \leq u \leq 53, -53 \leq v \leq 53$ sur un quadrilatère $T(S)$ de sommets :

T(53, 53) = (_____, _____)

T(-53, 53) = (_____, _____)

T(-53, -53) = (_____, _____)

T(53, -53) = (_____, _____)

C. Utiliser la transformation T pour évaluer l'intégrale suivante :

$\iint_{T(S)} x^2 + y^2 \, dA$



À vous de jouer 3.6.10

Utiliser le changement de variable $s = x + 3y$, $t = y$ pour calculer l'aire de l'ellipse $x^2 + 6xy + 10y^2 \leq 1$.

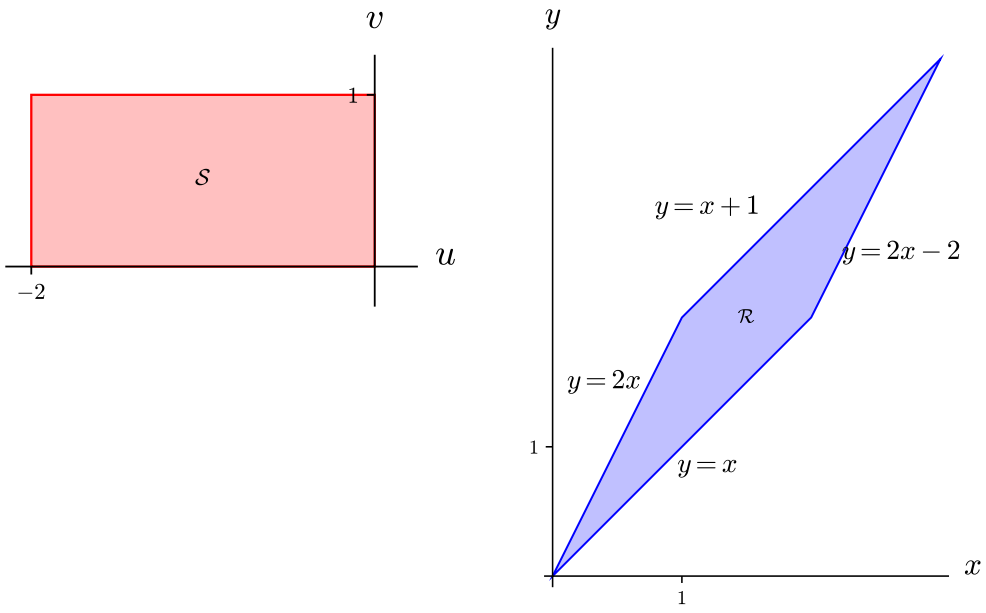
Aire = _____

Utiliser en pratique le théorème 3.6.4 peut être complexe. Afin de choisir le changement de variables à effectuer, on doit tenir compte tant de la région d'intégration que de l'intégrande. Voyons un premier exemple.

Exemple 3.6.11

Soit $\mathcal{R}$ la région à l'intérieur du parallélogramme limité par les droites $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ et $y = x + 1$. Calculer la valeur de $\iint_{\mathcal{R}} xy \, dA$.

Solution. Bien que l'intégrande soit simple, la région d'intégration suggère de faire un changement de variables. En effet, le bord du parallélogramme est donné par les droites d'équations $y - 2x = 0$, $y - 2x = -2$, $y - x = 0$ et $y - x = 1$.



Ceci suggère de poser $u = y - 2x$ et $v = y - x$. Notons qu'il s'agit d'un changement de variables qui est linéaire, puisque nous pouvons également écrire

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

La région $\mathcal{S}$ du plan Ouv qui correspond à $\mathcal{R}$ est le rectangle limité par les droites d'équations $u = 0$, $u = -2$, $v = 0$ et $v = 1$.

Nous devons exprimer x, y en fonction de u, v. Dans notre cas, le changement de variables est une transformation linéaire, nous pouvons donc simplement inverser la matrice :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire $x = -u + v$ et $y = -u + 2v$. Le jacobien de la transformation est alors

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

L'intégrande est

$$f(x, y) = xy = (-u + v)(-u + 2v) = u^2 - 3uv + 2v^2.$$

Nous pouvons maintenant invoquer le théorème 3.6.4 et effectuer les calculs :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} xy dx\, dy &= \iint_{\mathcal{S}} \left(u^2 - 3uv + 2v^2\right) |-1| du\, dv = \iint_{\mathcal{S}} u^2 - 3uv + 2v^2 du\, dv \\
&= \int_0^1 \int_{-2}^0 u^2 - 3uv + 2v^2 \; du\, dv = \int_0^1 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2 v}{2} + 2uv^2\right]_{u=-2}^{u=0} dv \\
&= \int_0^1 \frac{8}{3} + 6v + 4v^2 \; dv = \left[\frac{4}{3}v^3 + 3v^2 + \frac{8}{3}v\right]_{v=0}^{v=1} \\
&= 7.
\end{aligned}$$

Exemple 3.6.12

Soit $\mathcal{R}$ la région du plan définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $1 + x \leqslant y \leqslant 2 + 2x$. Évaluer l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{1+x}\, dx\, dy.$$

Solution. On peut simplifier l'intégrande considérablement en faisant la substitution

$$\begin{aligned} s &= x, & x &= s, \\ t &= \frac{y}{1+x}, & y &= t(1+x) = t(1+s). \end{aligned}$$

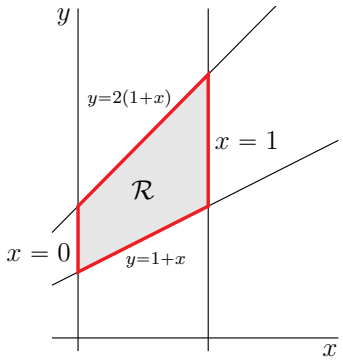
Notons que ce changement de variables n'est pas un changement linéaire. À gauche, nous avons l'expression de (s,t) en termes de (x,y). À droite, ce sont (x,y) qui sont données en fonction de (s,t). Pour obtenir ceci, il faut simplement isoler les variables. Notons que ceci nous permet d'obtenir l'intégrande en fonction de (s,t). Bien entendu, afin d'effectuer le calcul, nous devons aussi :

- exprimer le domaine d'intégration $\mathcal{S}$ en fonction des variables s et t, puis
- calculer le jacobien de la transformation afin d'exprimer $dx\, dy$ en termes de $ds\, dt$.

Le jacobien de la transformation est

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1+s \end{vmatrix} = (1+s).$$

Afin d'étudier l'effet du changement de variables $(x,y) \mapsto (s,t)$ sur le domaine $\mathcal{R}$, considérons son bord, puis voyons comment ce bord est exprimé en termes de s et t. Voici $\mathcal{R}$ dans le plan Oxy.



Cette région est un quadrilatère, ses côtés sont :

- À gauche, une portion de la droite $x = 0$. Comme nous avons $x = s$, en termes de s et t, nous devons avoir $s = 0$.
- À droite, une portion de la droite $x = 1$. Nous devons avoir $s = 1$.
- Le bord inférieur est une portion de la droite $y = 1 + x$, où $\frac{y}{1+x} = 1$. Puisque $t = \frac{y}{1+x}$, la portion du bord qui correspond en termes de s et t est $t = 1$.
- Le bord supérieur est une portion de la droite $y = 2(1 + x)$, ou encore $\frac{y}{1+x} = 2$. En termes de s et t, la portion correspondante est $t = 2$.

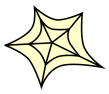
Ainsi, la région $\mathcal{S}$ dans le plan Ost qui correspond à $\mathcal{R}$ est

$$\mathcal{S} = \big\{\ (s,t) \ \big|\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ 1 \leqslant t \leqslant 2\ \big\}.$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour appliquer le théorème 3.6.4. Notons que le jacobien de la transformation est $1+s$, qui est positif sur $\mathcal{S}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{1+x}\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_1^2 t(1+s)dt\,ds \\ &= \left[\int_0^1 1+s\,ds\right]\left[\int_1^2 t\,dt\right] \\ &= \left[s+\frac{s^2}{2}\right]_{s=0}^{1}\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=1}^{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} \\ &= \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

À vous de jouer 3.6.13



Calculer l'aire de la région D bornée par

$$xy=1,\ xy=9,\quad xy^2=1,\ xy^2=25$$

dans le premier quadrant du plan xy
(a) Dessiner un graphe représentant la région D.
(b) Utiliser le changement de variable non-linéaire
$u=xy$ et $v=xy^2$, trouver x et y comme fonction de u et v.
$x=x(u,v)=$ _____
$y=y(u,v)=$ _____
(c) Calculer le déterminant du Jacobien de ce changement de variable.

Table 3.6.14

$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \det$

_____	_____
_____	_____

$=$ _____

(d) Utiliser ce changement de variable calculer l'aire de la région D avec une intégrale double.

$$\int\int_D dx\,dy = \int_a^b\int_c^d \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int \_\_\_\_\,\_\_\_\_ \int \_\_\_\_ \_\_\_\_\_ \,du\,dv$$

(e) Évaluer l'intégrale double pour trouver la valeur de l'aire de la région D.
Aire = _____

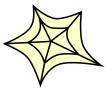
À vous de jouer 3.6.15



(a) Find an affine change of coordinates that takes the unit square with vertices

$$P^*=(0,0),\ Q^*=(1,0),\ R^*=(0,1),\ S^*=(1,1)$$

in the uv-plane to the rectangle with vertices



$$P = (3,4)\,,\ Q = (5,4)\,,\ R = (3,10)\,,\ S = (5,10)$$

in the xy-plane.
$x = x(u,v) =$ _____
$y = y(u,v) =$ _____

(b) Find the absolute value of the determinant of the Jacobian for this change of coordinates.

Table 3.6.16

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det \begin{matrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{matrix}\right| = \_\_\_\_\_$$

Exemple 3.6.17

Soit $\mathcal{R}$ la région du premier quadrant limitée par les courbes $xy = 1$, $xy = 9$ et par les droites $y = x$, $y = 4x$. Calculer

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\; dA.$$

Solution 1. Considérons le changement de variables

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u/v \\ uv \end{bmatrix} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{xy} \\ \sqrt{y/x} \end{bmatrix}.$$

Ce changement de variables rend l'intégrande très simple, puisque

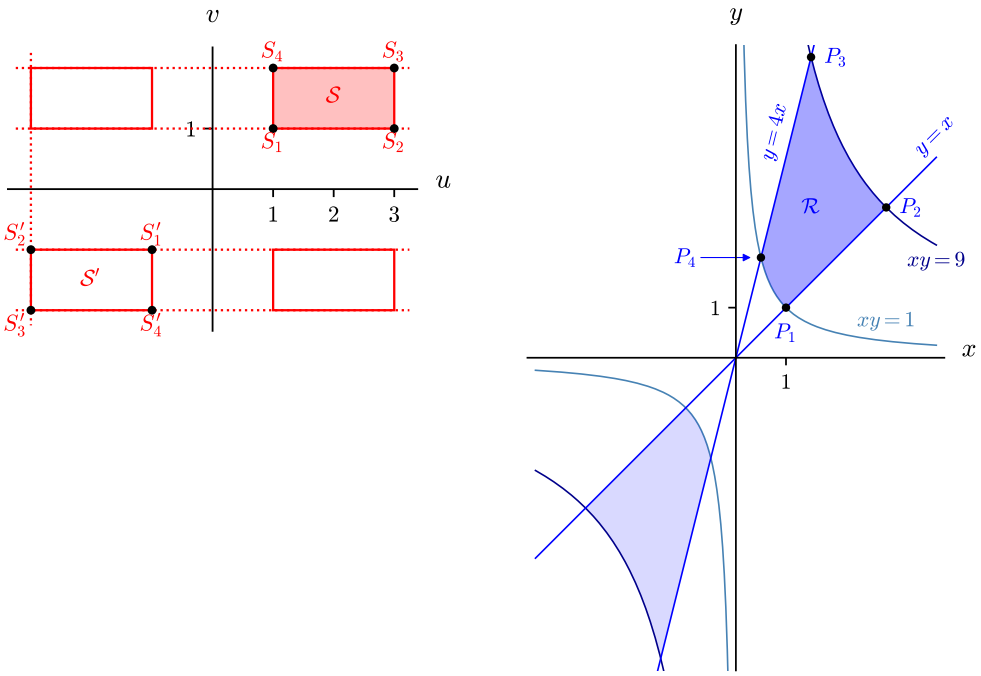
$$\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} = \sqrt{v^2} + \sqrt{u^2} = v + u.$$

Le jacobien se calcule aisément :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ v & u \end{vmatrix} = 2u/v.$$

La région $\mathcal{R}$ qui nous intéresse est limitée par 4 courbes qui se coupent aux points $P_1(1,1)$, $P_2(3,3)$, $P_3(\frac{3}{2},6)$ et $P_4(\frac{1}{2},2)$. Chacun de ces points, à son tour, correspond à deux points différents du plan Ouv sous la transformation $\mathbf{r}$ choisie :

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{r}(S_1) = \mathbf{r}(S_1'), \text{ où } S_1(1,1), S_1'(-1,-1), \\ P_2 &= \mathbf{r}(S_2) = \mathbf{r}(S_2'), \text{ où } S_2(3,1), S_2'(-3,-1), \\ P_3 &= \mathbf{r}(S_3) = \mathbf{r}(S_3'), \text{ où } S_3(3,2), S_3'(-3,-2), \\ P_4 &= \mathbf{r}(S_4) = \mathbf{r}(S_4'), \text{ où } S_4(1,2), S_4'(-1,-2). \end{aligned}$$



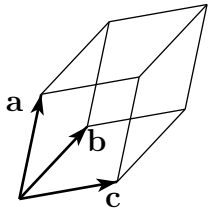
Par ailleurs, la droite $y = x$ correspond à $v^2 = 1$, c'est-à-dire à la paire de droites $v = \pm 1$. La droite $y = 4x$ correspond à la paire de droites $v = \pm 2$. De même, l'hyperbole $xy = 1$ correspond à $u^2 = 1$, c'est-à-dire à la paire de droites $u = \pm 1$, et l'hyperbole $xy = 9$ correspond à la paire de droites $u = \pm 3$. Nous avons donc deux régions $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ du plan Ouv qui correspondent à $\mathcal{R}$ sous la transformation choisie. Afin de calculer l'intégrale qui nous intéresse, nous devons choisir l'une d'entre elles. Choisissons $\mathcal{S} = \{(u, v) | 1 \leqslant u \leqslant 3,\ 1 \leqslant v \leqslant 2\}$. Notons que, sur cette région, le jacobien de la transformation est positif et que nous pouvons calculer notre intégrale :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\, dx\, dy &= \iint_{\mathcal{S}} (u+v)\frac{2u}{v} du\, dv = 2\int_1^2 \int_1^3 \frac{u^2}{v} + u\, du\, dv \\ &= 2\int_1^2 \left[\frac{u^3}{3v} + \frac{u^2}{2}\right]_{u=1}^{u=3} dv = 2\int_1^2 \frac{26}{3v} + 4\, dv \\ &= 2\left[\frac{26}{3}\ln v + 4v\right]_{v=1}^{v=2} = \frac{52}{3}\ln 2 + 8.\end{aligned}$$

Solution 2. Un autre changement de variables est possible. On peut poser $v = xy$ et $u = y/x$. Les calculs sont d'une complexité équivalente. Cependant, au niveau des régions d'intégration, on n'a pas à se soucier de la duplication des courbes. On laisse en exercice le calcul par cette méthode.

Changements de variables pour les intégrales triples

Il existe une généralisation naturelle du théorème 3.6.4 pour les intégrales triples (et même en plus haute dimension). Elles sont établies exactement de la même façon que ce qu'on a fait plus haut. Pour les intégrales triples, la pierre angulaire de la construction est le fait établi au corollaire 1.3.7, qui exprime le volume d'un parallélépipède comme un déterminant.



Si l'on pose

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{bmatrix}$$

lorsqu'on passe des coordonnées u, v, w aux coordonnées x, y, z, on aura aussi un jacobien, ce sera un déterminant 3×3.

Définition 3.6.18

Étant donné une transformation $\mathbf{r}$ donnée par $\mathbf{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\mathbf{i}+y(u,v,w)\mathbf{j}+z(u,v,w)\mathbf{k}$, son **jacobien** est le déterminant

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Nous avons bien entendu l'énoncé analogue du théorème 3.6.4 pour les intégrales triples, à savoir :

Théorème 3.6.19

Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ deux régions élémentaires dans $Ouvw$ et $Oxyz$ respectivement, $\mathbf{r} : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ une transformation de classe C^1 telle que $\mathbf{r}(u,v,w)$ parcourt $\mathcal{R}$ une seule fois lorsque (u,v,w) parcourt $\mathcal{S}$, et f une fonction continue sur $\mathcal{R}$, alors

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r}(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \qquad (***) \\ = \iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\; dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

Avec les composantes et les variables écrites explicitement, ceci devient

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{S}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \\ = \iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\; dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

En particulier,

$$dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw. \qquad (\dagger\dagger)$$

Voyons quelques exemples.

Exemple 3.6.20 dV **en coordonnées cylindriques.**

Les coordonnées cylindriques se calculent au moyen de

$$\begin{aligned} x(r,\theta,z) &= r\cos\theta,\\ y(r,\theta,z) &= r\sin\theta,\\ z(r,\theta,z) &= z. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta, & \frac{\partial z}{\partial r} &= 0,\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\sin\theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos\theta, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= 0,\\ \frac{\partial x}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial z} &= 1, \end{aligned}$$

le théorème 3.6.19, mais avec r dans le rôle de u et avec θ dans celui de v, donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} &= \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}\\ &= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r, \end{aligned}$$

et donc

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz,$$

exactement ce que nous avions trouvé dans la formule 3.5.3.

Exemple 3.6.21 dV **en coordonnées sphériques.**

Les coordonnées sphériques sont données par

$$\begin{aligned} x(\rho,\theta,\varphi) &= \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi,\\ y(\rho,\theta,\varphi) &= \rho\,\sin\theta\,\sin\varphi,\\ z(\rho,\theta,\varphi) &= \rho\,\cos\varphi. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \rho} &= \cos\theta\,\sin\varphi, & \frac{\partial y}{\partial \rho} &= \sin\theta\,\sin\varphi, & \frac{\partial z}{\partial \rho} &= \cos\varphi,\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= 0,\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \rho\,\cos\theta\,\cos\varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \rho\,\sin\theta\,\cos\varphi, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= -\rho\,\sin\varphi, \end{aligned}$$

l'égalité (††), avec ρ dans le rôle de u, avec θ dans le rôle de v et avec φ dans celui de w, donne

$$\begin{aligned} dV &= \left|\det\begin{bmatrix} \cos\theta\,\sin\varphi & \sin\theta\,\sin\varphi & \cos\varphi\\ -\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi & \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi & 0\\ \rho\,\cos\theta\,\cos\varphi & \rho\,\sin\theta\,\cos\varphi & -\rho\,\sin\varphi \end{bmatrix}\right| d\rho\,d\theta\,d\varphi\\ &= \left|\cos\theta\,\sin\varphi\,\det\begin{bmatrix} \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi & 0\\ \rho\,\sin\theta\,\cos\varphi & -\rho\,\sin\varphi \end{bmatrix}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \sin\theta\,\sin\varphi \det\begin{bmatrix} -\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi & 0 \\ \rho\,\cos\theta\,\cos\varphi & -\rho\,\sin\varphi \end{bmatrix} \\
&\quad + \cos\varphi \det\begin{bmatrix} -\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi & \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi \\ \rho\,\cos\theta\,\cos\varphi & \rho\,\sin\theta\,\cos\varphi \end{bmatrix} \Big| \, d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \rho^2 \big| -\cos^2\theta \sin^3\varphi - \sin^2\theta \sin^3\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi \big| \, d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \rho^2 \big| -\sin\varphi \sin^2\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi \big| \, d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\,d\theta\,d\varphi,
\end{aligned}
$$

qui est exactement ce qui a été établi dans la formule 3.5.11.



À vous de jouer 3.6.22

Évaluez l'intégrale triple

$$\iiint_D z\,dV$$

où D est le solide délimité par le paraboloïde $z = 25 - x^2 - 4y^2$ et le plan $z = 0$, à l'aide du changement de variables

$$x = 4u\cos v, \qquad y = 2u\sin v, \qquad z = w.$$

(a) Calculez le jacobien du changement de variables :
$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} =$ _____
(b) La borne supérieure de u (lorsque $v \in [0, 2\pi]$) est :
$u_{\max} =$ _____
(c) La borne supérieure de w en fonction de u est :
$w_{\max}(u) =$ _____
(d) Évaluez l'intégrale :
$\iiint_D z\,dV =$ _____

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Soit $\mathcal{S} = \{(u,v) | 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$ le carré unité, et soit $\mathbf{r} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ la transformation définie par $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix}$. Notons $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ l'image de $\mathcal{S}$ sous $\mathbf{r}$. Pour chaque définition de $\mathbf{r}(u,v)$:

i. Justifiez que la fonction $\mathbf{r}$ est une transformation de classe C^1.

ii. Trouvez l'image des sommets du carré unité $\mathcal{S}$ sous la fonction $\mathbf{r}$.

iii. Déterminez l'image $\mathcal{R}$ du carré unité $\mathcal{S}$ puis dessinez le graphe.

(a) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} 2u-v \\ u+2v \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{u}{2} \\ \frac{v}{3} \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 \\ v^3 \end{bmatrix}$

2. Déterminez si les transformations $\mathbf{r} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ sont injectives ou non.

(a) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, où $x = u^4$ et $y = u^2 + v$, où $\mathcal{S}$ est le triangle ayant pour sommets $(-2,0)$, $(2,0)$ et $(0,2)$

(b) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, où $x = 2u - v$ et $y = u$, où $\mathcal{S}$ est le triangle ayant pour sommets $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$

(c) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, où $x = u^2$ et $y = v^2$, où $\mathcal{S}$ est le rectangle ayant pour sommets $(-1,0)$ $(1,0)$, $(1,1)$ et $(-1,1)$

(d) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, où $x = 2u$ et $y = 3v$, où $\mathcal{S}$ est le carré ayant pour sommets $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ et $(1,1)$

3. Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ et soit la transformation injective $\mathbf{r} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Pour chacun des cas suivants, déterminez l'image $\mathcal{R}$ de $\mathcal{S}$ sous $\mathbf{r}$, ainsi que la transformation inverse $\mathbf{r}^{-1} : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$:

(a) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} 4u \\ 5v \end{bmatrix}$, où $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$

(b) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u+2v \\ -u+v \end{bmatrix}$, où $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$

(c) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} e^{2u+v} \\ e^{u-v} \end{bmatrix}$, où $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$

(d) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} \ln(u) \\ \ln(uv) \end{bmatrix}$, où $\mathcal{S} = \{(u,v) | u > 0, v > 0\}$

4. Soit $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformation définie par $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Pour chacun des cas suivants, la région $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ donnée est l'image d'une région $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ sous $\mathbf{r}$; déterminez $\mathcal{S}$.

(a) $x = au$, $y = bv$ et $\mathcal{R} = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant a^2 b^2\}$, où $a, b > 0$

(b) $x = au$, $y = bv$ et $\mathcal{R} = \{(x,y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$, où $a, b > 0$

5. Pour chacune des transformations, déterminez le Jacobien.

(a) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{u^3}{2} \\ \frac{v}{u^2} \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} ue^v \\ e^{-v} \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} v\sin(u^2) \\ v\cos(u^2) \end{bmatrix}$

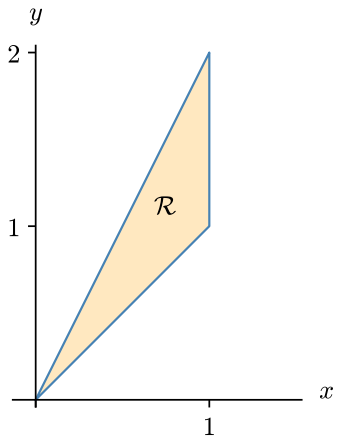
(d) $\mathbf{r}(u,v,w) = \begin{bmatrix} v\cosh\left(\frac{1}{u}\right) \\ v\sinh\left(\frac{1}{u}\right) \\ u+w^2 \end{bmatrix}$

(e) $r(u,v,w) = (u - v, u + v, u + v + w)$

Pour mieux comprendre.

6.

La région triangulaire $\mathcal{R}$ ayant pour sommets $(0,0)$, $(1,1)$ et $(1,2)$ est montrée dans la figure ci-contre.

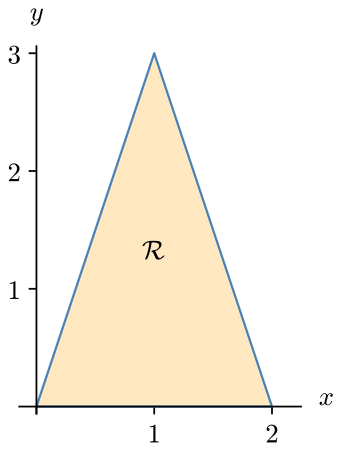


(a) Trouvez une transformation $\mathbf{r} : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ de la forme $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix}$, où a, b, c et d sont des nombres réels avec $ad - bc \neq 0$, telle que $\mathbf{r}^{-1}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}^{-1}(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{r}^{-1}(1,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Utilisez la transformation $\mathbf{r}$ afin de déterminer l'aire $A(\mathcal{R})$ de la région $\mathcal{R}$.

7.

La région triangulaire $\mathcal{R}$ ayant pour sommets $(0,0)$, $(2,0)$ et $(1,3)$ est montrée dans la figure ci-contre.



(a) Trouvez une transformation $\mathbf{r} : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ de la forme $\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix}$, où a, b, c et d sont des nombres réels avec $ad - bc \neq 0$, telle que $\mathbf{r}^{-1}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}^{-1}(2,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{r}^{-1}(1,3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

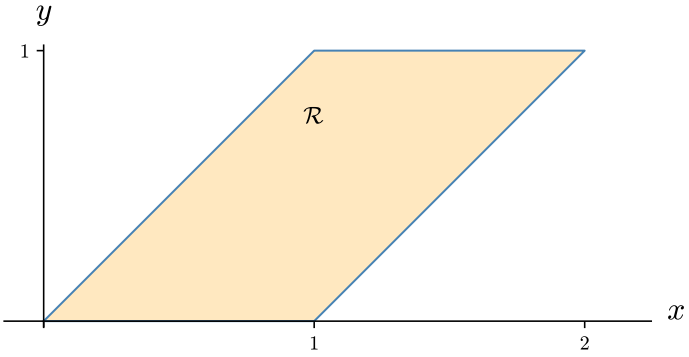
(b) Utilisez la transformation $\mathbf{r}$ afin de déterminer l'aire $A(\mathcal{R})$ de la région $\mathcal{R}$.

8. Utilisez la transformation $u = y - x$, $v = y$ afin d'évaluer les intégrales

(a) $\iint_{\mathcal{R}} (y^2 - xy)dA$

(b) $\iint_{\mathcal{R}} (y - x)dA$

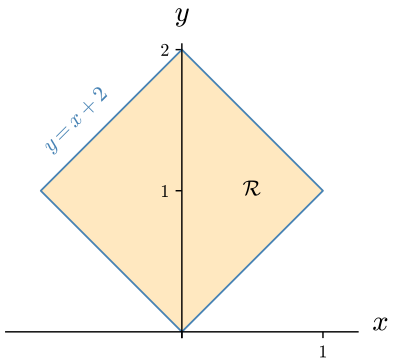
sur le parallélogramme $\mathcal{R}$ ayant pour sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ et $(1,1)$ montrée dans la figure ci-dessous.



9. Soit $\mathcal{R}$ le carré limité par les droites $y = x$ et $y = x + 2$, et par les droites $y = -x$ et $y = -x + 2$ (voir la figure ci-dessous). À l'aide du changement de variables $u = y - x$, $v = x + y$, évaluez les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \sin(x - y)\, dA$

(b) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} e^{x+y}\, dA$



10. Évaluez l'intégrale triple

$$\int_0^1 \int_1^2 \int_z^{z+1} (y + 1) dx dy dz$$

en utilisant la transformation $u = x - z$, $v = 3y$ et $w = \frac{z}{2}$.

11. Évaluez l'intégrale triple

$$\int_0^2 \int_4^6 \int_{3z}^{3z+2} (5 - 4y) dx dz dy$$

en utilisant la transformation $u = x - 3z$, $v = 4y$ et $w = z$.

Chapitre 4

Calcul vectoriel

Ce chapitre traite des champs de vecteurs et des théorèmes fondamentaux du calcul vectoriel, c'est-à-dire le théorème de Green et celui de Stokes.

4.1 Champs de vecteurs

Champs de vecteurs

Nous avons déjà rencontré la notion de champ gradient d'une fonction f de deux ou trois variables, à la section 2.6. Il s'agit d'une nouvelle fonction $\boldsymbol{\nabla} f$ qui à chaque point $\mathbf{r}$ associe un vecteur $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r})$. Au-delà des champs gradients et de leur utilité pour le calcul des dérivées directionnelles, la notion de champ de vecteurs est très utile pour modéliser plusieurs phénomènes. Pensons par exemple à la force $\mathbf{F}$ qui s'exerce sur une particule qui se déplace. La force $\mathbf{F}$ peut varier en fonction de la position de la particule (pensons à la proximité d'une charge électrique). De même, imaginons un fluide qui s'écoule dans une région du plan ou de l'espace. À chaque point de cette région, le fluide possède une vitesse spécifique ; celle-ci variera en fonction d'éventuels obstacles rencontrés par le fluide et de la géométrie du milieu d'écoulement. Ceci motive la définition suivante.

Définition 4.1.1

Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ une région donnée. Un *champ de vecteurs* sur $\mathcal{D}$ est une fonction $\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ qui à chaque point $\mathbf{r}$ de $\mathcal{D}$ associe un vecteur $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Les cas qui nous intéressent davantage sont :

(a) Lorsque $n = 2$, $\mathcal{D}$ est une région du plan. Dans ce cas, le champ $\mathbf{F}$ s'écrit au moyen de ses composantes $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, c'est-à-dire $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})\mathbf{i} + Q(\mathbf{r})\mathbf{j}$, ou encore $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$.

(b) Lorsque $n = 3$, $\mathcal{D}$ est une région de l'espace. Dans ce cas, on écrit $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, c'est-à-dire $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})\mathbf{i}+Q(\mathbf{r})\mathbf{j}+R(\mathbf{r})\mathbf{k}$, ou encore $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+R(x, y, z)\mathbf{k}$.

On représente les champs de vecteurs au moyen de diagrammes. Cette représentation est surtout utile en deux dimensions, elle consiste à considérer un certain nombre de points sur la région $\mathcal{D}$ et d'en dessiner, au point $\mathbf{r} \in \mathcal{D}$, le vecteur $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ou un multiple scalaire de celui-ci (la constante sera la même pour tous les points).

Exemple 4.1.2

Soit $\mathbf{F}(x, y) = (1 - y^2)\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ défini pour $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Notons que la composante verticale du champ est nulle, de sorte qu'en tout point les flèches représentant ce champ seront horizontales. De plus, lorsque $y = \pm 1$, on aura $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$. Par ailleurs, les composantes du champ ne dépendent pas de la variable x. Ceci entraîne que le champ est invariant par translation horizontale. Notons aussi que la composante horizontale du champ, $1-y^2$, est toujours positive (les flèches pointent toujours vers la droite) et maximale lorsque $y = 0$.

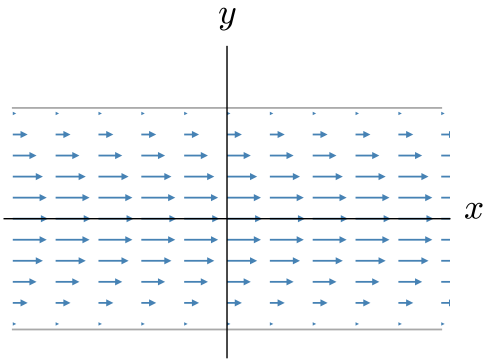


Figure 4.1.3 Le champ $\mathbf{v} = (1 - y^2)\mathbf{i}$

Ce champ peut être utilisé pour modéliser l'écoulement d'un fluide le long d'un canal se trouvant sur la bande horizontale $-1 \leqslant y \leqslant 1$. La vitesse du fluide est plus grande au milieu du canal, le frottement avec la paroi entraîne un ralentissement à mesure qu'on s'éloigne du milieu.

Exemple 4.1.4 Le tourbillon.

Dans cet exemple, nous allons esquisser le champ de vecteurs

$$\mathbf{v}(x, y) = \Omega\,(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})\,,$$

où Ω est une constante positive. Nous allons donner une procédure efficace pour produire une esquisse grossière, elle sera suffisante pour avoir une idée réaliste du contexte. Cette procédure se généralise à d'autres champs de vecteurs.

Pour commencer, concentrons-nous sur la composante horizontale $\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}(x, y)$ de notre champ. Voyons dans quelle région du plan Oxy celle-ci est positive, négative ou nulle.

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}(x, y) = -\Omega y \quad \begin{cases} = 0 & \text{si } y = 0 \\ < 0 & \text{si } y > 0 \\ > 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Nous en faisons autant avec la composante verticale.

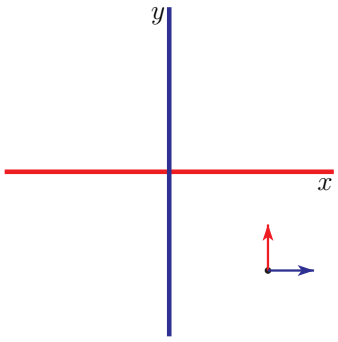
$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}(x, y) = \Omega x \quad \begin{cases} = 0 & \text{si } x = 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \\ > 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ceci partitionne naturellement le plan Oxy en 9 morceaux, selon que chacune de ces composantes est positive, négative ou nulle :

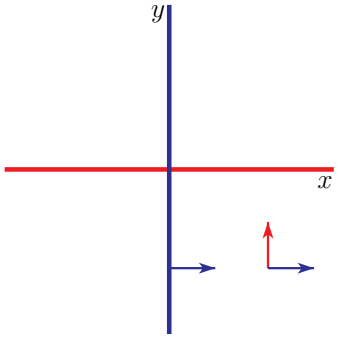
- $\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} > 0$ et $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v} > 0$ sur $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < 0,\ x > 0 \right\}$;
- $\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} > 0$ et $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v} = 0$ sur $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < 0,\ x = 0 \right\}$;
- $\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} > 0$ et $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v} < 0$ sur $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < 0,\ x < 0 \right\}$;
- $\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} = 0$ et $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v} > 0$ sur $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 0,\ x > 0 \right\}$;
- et ainsi de suite.

Pensons maintenant à $\mathbf{v}(x, y)$ comme la vitesse au point (x, y) d'un fluide.

- Regardons le premier point ci-haut. Il nous dit que, sur la première des 9 régions, c'est-à-dire, sur $\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0,\ x > 0\ \}$, qui est le quatrième quadrant, la vitesse horizontale $\mathbf{i}\cdot\mathbf{v} > 0$. Ceci veut dire que le fluide bouge vers la droite. Nous signifions ceci dans notre esquisse par une flèche qui va horizontalement vers la droite (il s'agit de la flèche bleue dans la figure ci-contre). La composante verticale $\mathbf{j}\cdot\mathbf{v} > 0$, ce qui signifie que le fluide bouge aussi vers le haut. On signifie ceci par la flèche verticale vers le haut (c'est la flèche rouge).



- Par la suite, concentrons-nous sur le deuxième point dans la liste ci-haut. Il nous dit que, sur la deuxième région, c'est-à-dire sur $\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0,\ x = 0\ \}$, qui est la moitié inférieure de l'axe Oy, la composante horizontale $\mathbf{i}\cdot\mathbf{v} > 0$, ce qui veut dire que le fluide bouge vers la droite. On indique ceci par une flèche horizontale vers la droite dont la source est un point sur la moitié inférieure de l'axe Oy (c'est la deuxième flèche bleue dans la figure ci-contre). La composante verticale est $\mathbf{j}\cdot\mathbf{v} = 0$, ce qui veut dire que le fluide n'a pas de vitesse verticale. On indique ceci par l'absence de flèche verticale ayant pour source un point sur la partie inférieure de l'axe des y.



- On poursuit de la sorte.

Lorsque nous aurons considéré les 9 régions, nous aurons l'esquisse ci-contre.

De ceci, on voit que, par exemple, dans le premier quadrant,

- le fluide bouge vers la gauche et vers le haut ;
- le fluide croise l'axe x verticalement (donc, près de l'axe x, les flèches seront presque verticales) ;
- le fluide croise l'axe des y horizontalement (donc, près de l'axe y, les flèches seront presque horizontales) ;
- il y a un point, à savoir $(0,0)$, où le champ de vitesses est exactement $\mathbf{0}$. De plus, $\mathbf{v}(x,y) = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ est plus petit lorsque (x,y) est plus près de $(0,0)$, et $\mathbf{v}(x,y)$ a une grande norme lorsque (x,y) est loin de $(0,0)$.

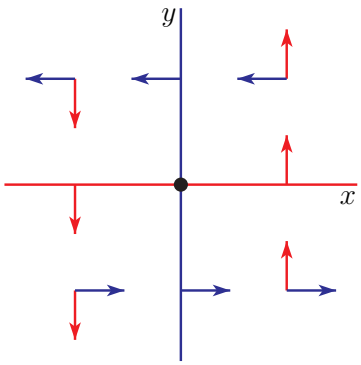


Figure 4.1.5

Avec toute cette information, nous pouvons esquisser notre champ de vecteurs.

Avec cette esquisse composée de 9 morceaux à titre de guide, nous pouvons maintenant produire une esquisse plus fine du champ de vecteurs, illustrée ci-contre.

On y retrouve bien le comportement attendu : les flèches sont courtes près de l'origine, où le champ s'annule, et s'allongent à mesure qu'on s'en éloigne. Ceci montre le champ qui *tourbillonne* autour de l'origine, d'où son nom.

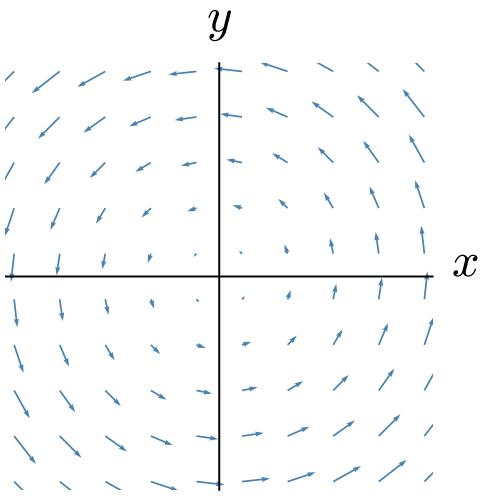


Figure 4.1.6 $\mathbf{v} = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

Exemple 4.1.7 La source ponctuelle.

Imaginons que

- tout l'espace est rempli avec un fluide incompressible, disons de l'eau ;
- d'une façon à déterminer, on trouve un moyen de produire plus d'eau à l'origine, disons $4\pi m$ litres par seconde ;
- ceci force l'eau à couler vers l'extérieur, créant un « flux » symétrique en s'éloignant de l'origine.

Voyons quel est le champ de vecteurs résultant, $\mathbf{v}(x, y, z)$. Comme le flux est symétrique, la vitesse au point (x, y, z)

- doit pointer en s'éloignant de l'origine, c'est-à-dire que le vecteur de direction du champ $\mathbf{v}(x, y, z)$ doit être le vecteur unitaire radial :

$$\hat{\mathbf{r}}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ;$$

- doit avoir une norme $\|\mathbf{v}(x, y, z)\|$ qui ne dépend que de la distance à l'origine, c'est-à-dire qui est fonction de

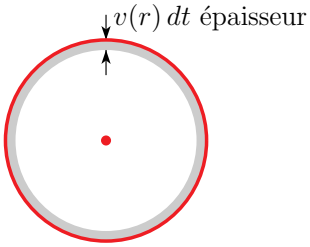
$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ainsi, le champ de vitesses est de la forme

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v\left(r(x, y, z)\right)\, \hat{\mathbf{r}}(x, y, z).$$

Nous devons simplement déterminer la fonction $v(r)$. Fixons $r > 0$ et concentrons-nous sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Elle est esquissée dans la figure ci-contre.

Pendant un très bref laps de temps de dt secondes, $4\pi m\,dt$ litres d'eau sont créés à l'origine (le point rouge au centre). Puisque l'eau est incompressible, $4\pi m\,dt$ litres d'eau doivent sortir à travers la sphère pendant cet intervalle de temps, afin de faire de la place pour la nouvelle eau.



En tout point de la sphère, l'eau s'écoule vers l'extérieur avec vitesse $v(r)$. Ainsi, pendant ce laps de temps, l'eau près de la surface de la sphère bouge d'une distance $v(r)\,dt$. En particulier, l'eau qui se trouvait dans la croûte mince $r - v(r)\,dt \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant r$ au début sort à travers la sphère $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ pendant cet intervalle de temps. La croûte est esquissée en gris dans la figure.

Le volume d'eau dans la partie grise est essentiellement l'aire de $4\pi r^2$ multipliée par l'épaisseur, c'est-à-dire $v(r)\,dt$. Ainsi, l'égalité de volumes donne

$$4\pi m\,dt = (4\pi r^2)\,(v(r)\,dt) \implies v(r) = \frac{4\pi m}{4\pi r^2} = \frac{m}{r^2}.$$

Notre champ de vitesses est donc

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \frac{m}{r(x,y,z)^2}\,\hat{\mathbf{r}}(x,y,z).$$

Si notre monde avait été de dimension deux plutôt que trois et que la source fournissait $2\pi m$ litres par seconde, le même argument mène à

$$2\pi m\,dt = (2\pi r)\,(v(r)\,dt) \implies v(r) = \frac{2\pi m}{2\pi r} = \frac{m}{r},$$

et le champ de vitesses est

$$\mathbf{v}(x,y) = \frac{m}{r(x,y)}\,\hat{\mathbf{r}}(x,y), \qquad r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \hat{\mathbf{r}}(x,y) = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

La représentation de ce champ est obtenue comme suit. Pour chaque (x,y), le vecteur $\frac{m}{r(x,y)}\,\hat{\mathbf{r}}(x,y)$ est dessiné avec son origine en (x,y). Notons que $\frac{m}{r(x,y)}\,\hat{\mathbf{r}}(x,y)$

- pointe en direction opposée à l'origine ;
- a une norme $\frac{m}{r(x,y)}$ qui
  - dépend seulement de $r = \|(x,y)\|$;
  - est très grande lorsque (x,y) est près de l'origine ;
  - décroît comme $\frac{1}{r}$ lorsque $r = \|(x,y)\|$ grandit.

Voici une esquisse de quelques-uns de ces vecteurs.

Notons que, lorsque $\|(x,y)\| \to 0$, la norme de la vitesse $\|\mathbf{v}(x,y)\| \to \infty$. Ceci est une conséquence de notre simplification qui consiste à penser que l'eau est produite en un seul point.

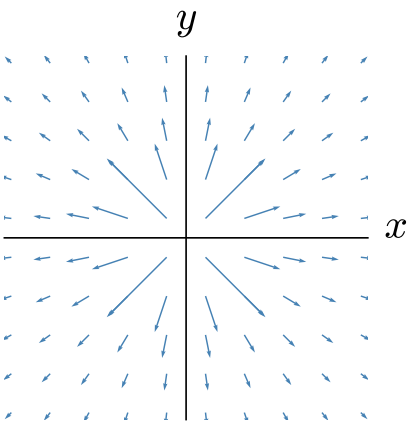
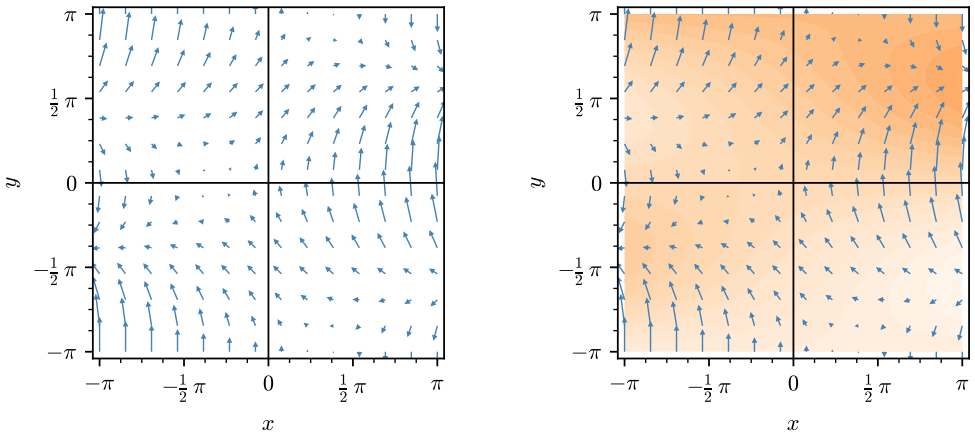


Figure 4.1.8 $\mathbf{v} = \frac{m}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{r}$

Si f est une fonction de deux ou trois variables, alors son gradient $\boldsymbol{\nabla} f$ définit un champ de vecteurs (là où il existe !). Nous avons déjà considéré le gradient à la section 2.6, mais d'un point de vue un peu différent. Supposons que nous ayons une fonction de deux variables, $f(x,y)$. Son champ gradient est le champ de vecteurs $\boldsymbol{\nabla} f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j}$ ou, plus explicitement, $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j}$. De la même façon, si l'on a une fonction de trois variables f, son gradient est $\boldsymbol{\nabla} f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$, ou encore $\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\mathbf{i} + f_y(x,y,z)\mathbf{j} + f_z(x,y,z)\mathbf{k}$.

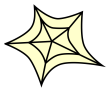
Exemple 4.1.9

Soit $f(x,y) = x\sin y + y$. Son champ gradient est le champ $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (\sin y)\,\mathbf{i} + (x\cos y + 1)\mathbf{j}$. La figure ci-après, à gauche, montre le champ gradient. Dans la figure de droite, on trouve le champ gradient $\boldsymbol{\nabla} f$ ainsi que les courbes de niveau de f.



On remarque que la norme du gradient est plus grande là où les courbes de niveau de f sont le plus près les unes des autres. Ceci résulte du fait que la norme du gradient est la dérivée directionnelle de la fonction dans la direction du gradient. Plus cette dérivée est grande, plus la valeur de f change vite.

À vous de jouer 4.1.10



Écrire une formule pour un champ de vecteurs en deux dimensions dont tous les vecteurs sont parallèles à l'axe des y et dont tous les vecteurs situés sur une droite vertical ont la même norme.

$\mathbf{V} =$ _____

Dans les sections qui suivent, nous devrons faire face au problème de décider si un champ $\mathbf{F}$ est un champ gradient ou pas. Nous reviendrons sur ce point. Contentons-nous de donner un exemple.

Exemple 4.1.11

Montrer qu'il n'existe pas de fonction f continue telle que $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (y^2+1)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$.

Solution. Si f était une telle fonction, ses dérivées partielles seraient P et Q, qui sont de classe C^1. On devrait donc avoir f de classe C^2. Ainsi, en vertu du théorème de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Or, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = y$. Ainsi, une telle fonction f ne peut pas exister.

En trois dimensions, le concept est le même. La représentation graphique est toujours de mise, même si elle pourrait être un peu plus difficile à interpréter. Dans ce cas, il est commun d'utiliser aussi des couleurs pour les flèches.

Exemple 4.1.12

On considère le champ de vecteurs $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + \mathbf{j} + (z^2-1)\mathbf{k}$.

La composante y du champ est constante, les flèches pointent toujours dans la direction des y positifs. Les deux autres composantes dépendent de la position.

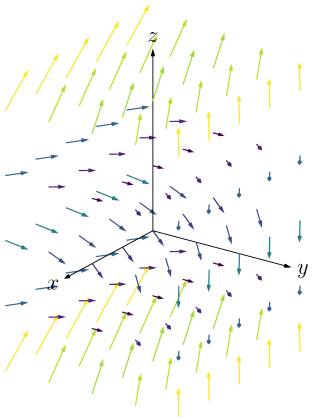


Figure 4.1.13 Le champ $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + \mathbf{j} + (z^2-1)\mathbf{k}$. La longueur des flèches est proportionnelle à la norme du champ, que leur couleur indique aussi : du violet pour les plus petites normes au jaune pour les plus grandes.

Les lignes de courant

Étant donné un champ de vecteurs $\mathbf{F}$, une ligne de courant de $\mathbf{F}$ est une courbe paramétrée $\mathcal{C}$ telle que, en tout point de $\mathcal{C}$, le vecteur vitesse est donné par $\mathbf{F}$ évalué en ce point. Si le champ est le champ de vitesses d'un fluide et que l'on dépose un objet qui flotte en un point donné, la ligne de courant passant par ce point représente la trajectoire que cet objet suivrait, mené par le courant.

Définition 4.1.14

Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ est un champ de vecteurs donné, une **ligne de courant** $\mathcal{C}$ est une courbe paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, telle que le vecteur vitesse $\mathbf{v}(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ vérifie

$$x'(t) = P(x(t), y(t))$$
$$y'(t) = Q(x(t), y(t))$$

ou, de façon plus concise,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$

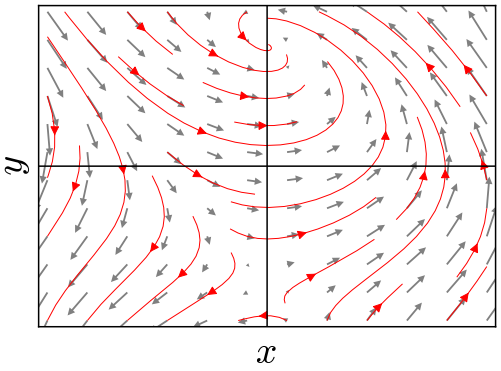


Figure 4.1.15 Un champ et quelques portions de lignes de courant.

Exemple 4.1.16

Montrer que la courbe paramétrée par $\mathbf{r}(t) = C_1 e^t\,\mathbf{i} + C_2 e^{-t}\,\mathbf{j}$ est une ligne de courant pour $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

Solution. En effet, $\mathbf{r}(t) = C_1 e^t\,\mathbf{i} + C_2 e^{-t}\,\mathbf{j}$ donne

$$\mathbf{r}'(t) = C_1 e^t\,\mathbf{i} - C_2 e^{-t}\,\mathbf{j} = x(t)\mathbf{i} - y(t)\mathbf{j}.$$

Remarquons que différentes valeurs de C_1 et C_2 donnent différentes lignes de courant. L'interprétation est claire : non seulement il faut connaître la vitesse $\mathbf{F}$, mais il faut aussi connaître un point sur la trajectoire, ce qui permet de déterminer C_1 et C_2.

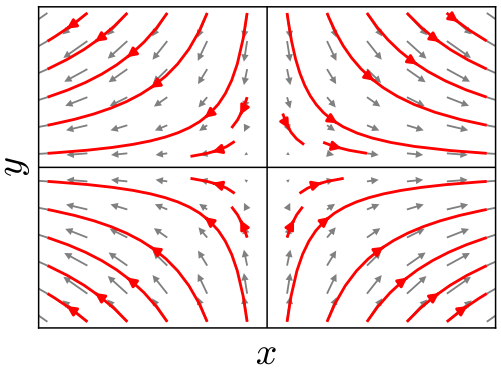


Figure 4.1.17 Le champ de vecteurs $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$, en gris, ainsi que quelques portions de lignes de courant, en rouge

Dans cet exemple, nous avons $x(t) \cdot y(t) = C_1 C_2$, de sorte que les lignes de courant se trouvent sur des hyperboles d'équations $xy = k$. Notons que l'équation $xy = 0$ a pour courbe la réunion des deux axes. Chaque demi-axe est à lui tout seul une ligne de courant.

Voyons maintenant comment trouver les lignes de courant d'un champ donné.

Exemple 4.1.18

Trouver les lignes de courant du champ de vecteurs $\mathbf{F}(x,y) = -2y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$.

Solution. Supposons que nous avons une ligne de courant $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$. Puisqu'il s'agit d'une ligne de courant, nous devons avoir $x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = -2y(t)\mathbf{i} + x(t)\mathbf{j}$. Ainsi, lorsque $y(t) \neq 0$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, de sorte que la courbe vérifie l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{-2y}$, ou encore $2y\frac{dy}{dx} = -x$. En intégrant les deux côtés par rapport à x, on obtient

$$\int 2y\frac{dy}{dx}\,dx = \int -x\,dx, \text{ d'où } y^2 = \frac{-x^2}{2} + C,$$

où C regroupe les constantes d'intégration.

On reconnaît l'équation d'une ellipse

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = C.$$

On peut la paramétrer en posant $\mathbf{r}(u) = \sqrt{2C}\cos u\,\mathbf{i} + \sqrt{C}\sin u\,\mathbf{j}$.

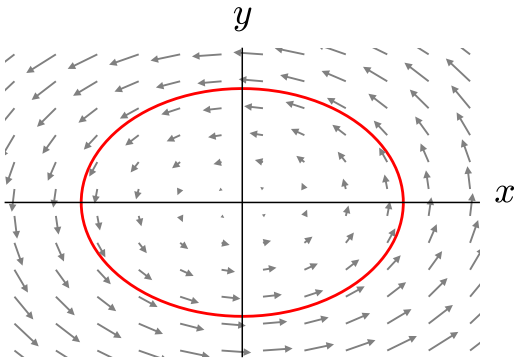


Figure 4.1.19 Le champ de vecteurs $\mathbf{F}(x,y) = -2y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, en gris, et une ligne de courant, en rouge

En effet, on calcule $\frac{x(u)^2}{2} + y(u)^2 = \frac{2C\cos^2 u}{2} + C\sin^2 u = C$.
Cependant, on a

$$\begin{aligned} x'(u)\mathbf{i} + y'(u)\mathbf{j} &= -\sqrt{2C}\sin u\,\mathbf{i} + \sqrt{C}\cos u\,\mathbf{j} \\ &= -\sqrt{2}y(u)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}x(u)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

On remarque que ce vecteur n'est pas égal à $-2y(u)\mathbf{i} + x(u)\mathbf{j}$, il lui est seulement proportionnel. Ce paramétrage ne vérifie donc pas la définition des lignes de courant. Cependant, posons plutôt $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2C}\cos(t\sqrt{2})\,\mathbf{i} + \sqrt{C}\sin(t\sqrt{2})\,\mathbf{j}$. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un paramétrage de l'ellipse et, par ailleurs, la condition de la définition des lignes de courant est satisfaite.

En général il est difficile de déterminer les lignes de courant d'un champ de vecteurs. Il s'agit de quelque chose qui est plutôt abordé dans les cours d'équations différentielles ou de mathématiques avancées.

À vous de jouer 4.1.20



Considérer la courbe paramétrée

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}(0) = (1,\,0).$$

Parmi les trois champs de vecteurs suivants, lequel admet cette courbe comme ligne de courant passant par $(1,0)$?

I. $\mathbf{F}(x,y) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$

II. $\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$

III. $\mathbf{F}(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

Réponse : (☐ I ☐ II ☐ III)

À vous de jouer 4.1.21

On considère la courbe paramétrée $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

Parmi les trois champs de vecteurs suivants, lequel admet cette courbe comme ligne de courant ?

Champ A : $\mathbf{F}_1(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j},$

Champ B : $\mathbf{F}_2(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \mathbf{k},$

Champ C : $\mathbf{F}_3(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$

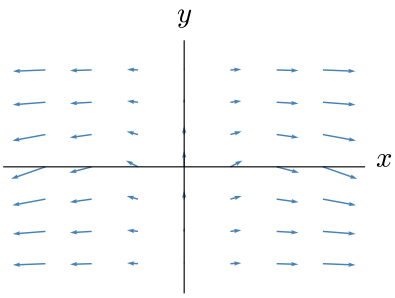
Sélectionnez le champ de vecteurs dont la courbe donnée est une ligne de courant.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Esquisser le champ de vecteurs $\mathbf{v}(x,y) = x^2\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$.

2. Voici une esquisse du champ de vecteurs $\mathbf{v}(x,y)$.



Trouver les régions où les coordonnées x et y sont positives, négatives et nulles :

$$\mathbf{v}(x,y)\cdot\mathbf{i} \begin{cases} > 0 & \text{lorsque } \square \\ = 0 & \text{lorsque } \square \\ < 0 & \text{lorsque } \square \end{cases}$$

$$\mathbf{v}(x,y)\cdot\mathbf{j} \begin{cases} > 0 & \text{lorsque } \square \\ = 0 & \text{lorsque } \square \\ < 0 & \text{lorsque } \square \end{cases}$$

Supposer que $\mathbf{v}(x,y)$ se comporte comme prévu aux points qui ne sont pas visibles. Autrement dit, les échantillons sont représentatifs d'une fonction vectorielle continue et lisse. Supposer également que les repères sur les axes correspondent à des distances unitaires.

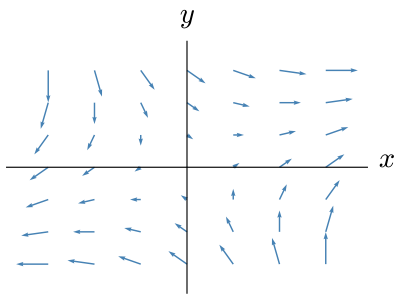
3. Ci-dessous se trouve une esquisse du champ de vecteurs $\mathbf{v}(x,y)$.

Trouver les régions où les coordonnées x et y sont positives, négatives et nulles :

$$\mathbf{v}(x,y)\cdot\mathbf{i}\begin{cases}>0 & \text{lorsque } \square\\ =0 & \text{lorsque } \square\\ <0 & \text{lorsque } \square\end{cases}$$

$$\mathbf{v}(x,y)\cdot\mathbf{j}\begin{cases}>0 & \text{lorsque } \square\\ =0 & \text{lorsque } \square\\ <0 & \text{lorsque } \square\end{cases}$$

Supposer que $\mathbf{v}(x,y)$ se comporte comme prévu aux points qui ne sont pas visibles. Supposer également que les repères sur les axes correspondent à des distances unitaires.



4. Une plateforme comportant de nombreux petits tapis roulants est alignée sur un plan de coordonnées. Chaque bande transporteuse déplace un objet situé au-dessus d'elle dans la direction de l'origine, et une bande transporteuse en position (x,y) provoque le déplacement d'un objet situé au-dessus d'elle à une vitesse y. Supposer que les objets n'interfèrent pas les uns avec les autres.

Donner une formule vectorielle pour la vitesse d'un objet en position (x,y).

5.

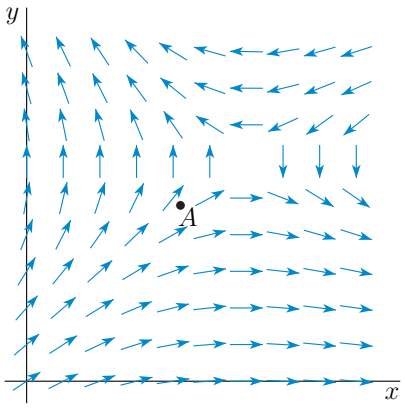
(a) Trouver les lignes de courant du champ de vecteurs $\mathbf{F}(x,y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$.

(b) Trouver les lignes de courant du tourbillon $\mathbf{v}(x,y) = \Omega\,(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$ de l'exemple Exemple 4.1.4, où Ω est une constante positive.

6.

Soit $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ le champ de vecteurs à deux dimensions esquissé ci-contre.

Déterminer les signes de P, Q, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ au point A.



Pour mieux comprendre.

7. Imaginer que le champ de vecteurs $\mathbf{v}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ est le champ de vitesses d'un fluide en mouvement.

(a) Au temps 0, vous laissez tomber une brindille dans le fluide au point $(1,1)$. Quelle est la position approximative de la brindille au temps $t = 0.01$?

(b) Au temps 0, vous laissez tomber une brindille dans le fluide au point $(0,0)$. Quelle

est la position de la brindille au temps $t = 0.01$?

(c) Au temps 0, vous laissez tomber une brindille dans le fluide au point $(0, 0)$. Quelle est la position de la brindille au temps $t = 10$?

8. Imaginer que le champ de vecteurs $\mathbf{v}(x, y) = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$ est le champ de vitesses d'un fluide en mouvement. Au temps 0, vous laissez tomber une brindille dans le fluide au point $(0, 0)$. Quelle est la position de la brindille au temps $t = 10$?

9. Des abeilles amicales volent vers votre visage depuis toutes les directions. La norme de la vitesse de chaque abeille est inversement proportionnelle à sa distance par rapport à votre visage. Trouver un champ de vecteurs pour la vitesse de l'essaim.

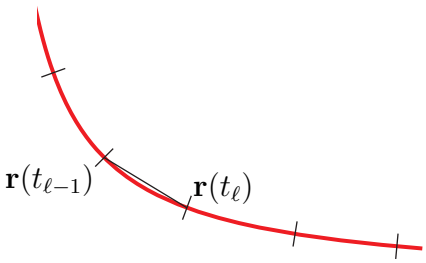
4.2 Intégrales de ligne

Dans cette section, nous étudions les intégrales de ligne, ce que nous ferons en deux temps. Tout d'abord, nous verrons les intégrales de ligne des fonctions à valeurs scalaires, puis les intégrales des champs de vecteurs.

Intégrales de ligne de fonctions à valeurs scalaires

Supposons que nous avons une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par un chemin $\mathbf{r}(t)$ avec $a \leqslant t \leqslant b$. Supposons de plus que $\mathcal{C}$ est un fil mince, dont la densité au point $\mathbf{r}$ est donnée par une fonction $\rho(\mathbf{r})$. Nous voulons calculer la masse de notre fil. Pour ceci, nous adoptons la stratégie usuelle du calcul intégral : faire des divisions en petits morceaux, calculer des approximations, puis additionner pour passer à la limite et obtenir une intégrale. Soit donc n un nombre naturel.

- Nous divisons l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Posons en plus $t_\ell = a + \ell\Delta t$ pour $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.
- La longueur de la portion de la courbe entre $\mathbf{r}(t_{\ell-1})$ et $\mathbf{r}(t_\ell)$ est approximativement $\|\mathbf{r}(t_\ell) - \mathbf{r}(t_{\ell-1})\|$. La masse de cette portion de courbe est approximativement $\rho(\mathbf{r}(t_\ell))\,\|\mathbf{r}(t_\ell) - \mathbf{r}(t_{\ell-1})\|$.



Ceci donne une approximation de la masse de notre fil $\mathcal{C}$, à savoir

$$\sum_{\ell=1}^{n} \rho(\mathbf{r}(t_\ell))\,\|\mathbf{r}(t_\ell) - \mathbf{r}(t_{\ell-1})\| = \sum_{\ell=1}^{n} \rho(\mathbf{r}(t_\ell)) \left\| \frac{\mathbf{r}(t_\ell) - \mathbf{r}(t_{\ell-1})}{t_\ell - t_{\ell-1}} \right\| \Delta t.$$

Puis, on prend la limite lorsque $n \to \infty$. Si nous supposons que le chemin $\mathbf{r}$ est simple (définition 1.5.3) et lisse (définition 1.5.20) et que $\rho(\mathbf{r})$ est continue, on obtient

$$\text{Masse de } \mathcal{C} = \int_a^b \rho(\mathbf{r}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt,$$

ce qui nous mènera à la définition de l'intégrale de ligne. Tout ceci reste valable lorsque la courbe est formée de plusieurs morceaux lisses mis bout à bout : il suffit d'additionner les intégrales obtenues sur chacun des morceaux. Précisons cette idée.

Définition 4.2.1

Un chemin $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est dit **lisse par morceaux** s'il est continu et qu'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ telle que $\mathbf{r}$ est lisse sur chacun des intervalles $[t_{i-1}, t_i]$.

Définition 4.2.2

Soit $\mathcal{C}$ une courbe dans $\mathbb{R}^n$ paramétrée par un chemin simple et lisse par morceaux $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, et f une fonction continue définie dans une région de $\mathbb{R}^n$ contenant $\mathcal{C}$. On définit alors

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f \circ \mathbf{r}(t) \, \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt.$$

Dans cette notation, l'indice $\mathcal{C}$ spécifie la courbe, et ds est la longueur d'arc.

- Si $\mathcal{C}$ est une courbe de $\mathbb{R}^3$ et qu'elle est paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, alors la formule ci-haut se lit

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt.$$

- Si $\mathcal{C}$ est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ (et donc que f est une fonction de deux variables) paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, alors la formule devient

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) \, ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

Remarque 4.2.3

Dans la définition donnée, $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$ est définie en termes du paramétrage de la courbe, mais le chemin $\mathbf{r}$ n'apparaît pas dans le terme défini. Ceci laisse penser que, même si $\mathbf{r}$ apparaît dans la formule, deux paramétrages différents pour la courbe $\mathcal{C}$ donnent le même résultat. C'est en effet le cas, c'est-à-dire que l'intégrale de ligne dépend de la courbe et non du paramétrage. Cette question est traitée à l'exercice 6.

À la lumière de la définition ci-haut, on peut interpréter la longueur d'arc d'une courbe. En effet, le théorème 1.6.1 se lit, avec les notations introduites dans la définition 4.2.2, comme

$$L = \int_{\mathcal{C}} ds,$$

qu'on peut interpréter en disant que la longueur totale L est la somme des petits éléments de longueur de courbe ds.

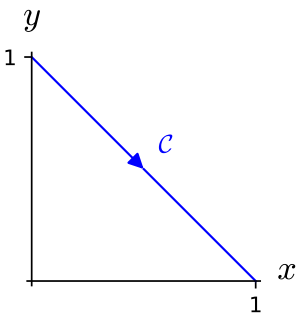
Exemple 4.2.4

Soit $\mathcal{C}$ le segment de droite allant de $A(0, 1)$ vers $B(1, 0)$, et $f(x, y) = x + y$. Calculer $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$.

Solution.

Commençons par donner un paramétrage du segment de droite $\mathcal{C}$. La façon standard de paramétrer un segment allant de A à B est d'écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.\end{aligned}$$



Dans notre cas, puisque $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ et $\mathbf{a} = \mathbf{j}$, ceci revient à écrire

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

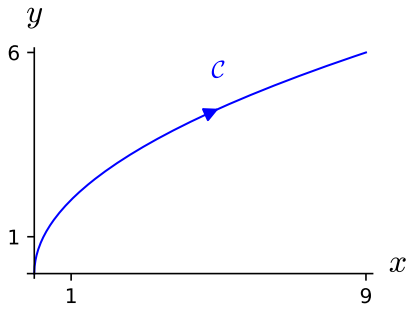
Nous avons aussi $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, de sorte que $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}$. Ainsi, nous pouvons calculer directement

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f\,ds &= \int_0^1 [x(t) + y(t)]\,\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 [t + (1-t)]\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Exemple 4.2.5

Soit $f(x,y) = y$. Calculer $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ lorsque $\mathcal{C}$ est la portion de la parabole $y^2 = 4x$ allant de $(0,0)$ à $(9,6)$.

Solution.
Nous commençons par obtenir un paramétrage de $\mathcal{C}$. L'équation $y^2 = 4x$ donne $x = (y/2)^2$. Nous posons donc $x(t) = t^2$ et $y(t) = 2t$, pour $t \in [0,3]$. Ainsi, notre chemin est $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$.



On calcule aisément $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, et donc $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4t^2+4} = 2\sqrt{1+t^2}$, puis on calcule l'intégrale de ligne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f\,ds &= \int_0^3 f(\mathbf{r}(t))\,\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_0^3 2t\cdot 2\sqrt{1+t^2}\,dt \\ &= 2\int_0^3 2t\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\frac{2}{3}\left(1+t^2\right)^{3/2}\Big|_{t=0}^{t=3} = \frac{4}{3}\left(10^{3/2} - 1\right).\end{aligned}$$

Voyons maintenant un exemple avec une courbe dans l'espace. De plus, la courbe considérée est obtenue comme l'union de deux courbes. Naturellement, il faut additionner les deux résultats.

Exemple 4.2.6

Soit $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ et $\mathcal{C}$ la trajectoire de $(0,0,0)$ à $(1,1,0)$ suivant la parabole $y = x^2$ du plan Oxy, suivie du segment de droite de $(1,1,0)$ à $(1,1,1)$. Calculer $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$.

Solution. Soit $\mathcal{C}_1$ la portion de parabole, puis $\mathcal{C}_2$ le segment de droite. Nous avons alors [a]

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_{\mathcal{C}_1} f\,ds + \int_{\mathcal{C}_2} f\,ds.$$

Afin de calculer l'intégrale voulue, calculons les deux termes indépendamment.

- La courbe $\mathcal{C}_1$ est paramétrée par $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, avec $t \in [0,1]$. On calcule $\mathbf{r}_1'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$, et donc $\|\mathbf{r}_1'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$, et donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} f\,ds &= \int_0^1 \left(t + \sqrt{t^2} - 0^2\right)\sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{6}\left(4\,t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{6}\left(5^{3/2}-1\right).\end{aligned}$$

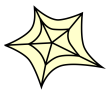
- Comme précédemment, on a un paramétrage de $\mathcal{C}_2$ donné par $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$ pour $t \in [0,1]$. Ceci donne $\mathbf{r}_2'(t) = \mathbf{k}$, et donc $\|\mathbf{r}_2'(t)\| = 1$, et donc

$$\int_{\mathcal{C}_2} f\,ds = \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1} - t^2\right)\cdot 1\,dt = \int_0^1 \left(2 - t^2\right)dt = \frac{5}{3}.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_{\mathcal{C}_1} f\,ds + \int_{\mathcal{C}_2} f\,ds = \frac{1}{6}\left(5^{3/2}-1\right) + \frac{5}{3} = \frac{1}{6}\left(5^{3/2}+9\right).$$

À vous de jouer 4.2.7



Trouvez l'intégrale de ligne par rapport à la longueur d'arc $\int_C (4x+9y)ds$, où C est le segment de droite dans le plan xy joignant les points $P = (4,0)$ et $Q = (0,3)$.

(a) Trouvez une paramétrisation $\vec{r}(t)$ pour le segment C de sorte que les points P et Q correspondent à $t = 0$ et $t = 1$, respectivement.

$\vec{r}(t) =$ _____

(b) Utilisez votre paramétrisation de (a) pour écrire l'intégrale de ligne par rapport à t

$\int_C (4x+9y)ds = \int_a^b$ _____ dt

avec bornes d'intégration $a =$ _____ et $b =$ _____

(c) Évaluez l'intégrale de ligne de la partie (b).

$\int_C (4x+9y)ds =$ _____

Nous avons motivé les intégrales de ligne par le problème du calcul de la masse d'un fil mince de densité variable donnée par une fonction $\rho(\mathbf{r})$. Ce contexte mène naturellement au problème du calcul du centre de gravité, ou des moments d'inertie d'un tel fil par rapport à différents axes de rotation. Supposons donc que la courbe $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la forme de notre fil, est une courbe

[a] Il est très tentant d'écrire que « $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ ».

dans $\mathbb{R}^3$ (s'il s'agit d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$, il faut simplement ignorer la coordonnée z). La masse totale est

$$\text{Masse} = \int_{\mathcal{C}} \rho(x,y,z)\,ds.$$

De même, les coordonnées de son centre de gravité sont

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\,\rho(x,y,z)\,ds}{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \rho(x,y,z)\,ds}, & \bar{y} &= \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,\rho(x,y,z)\,ds}{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \rho(x,y,z)\,ds}, & \bar{z} &= \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z\,\rho(x,y,z)\,ds}{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \rho(x,y,z)\,ds} \\
&= \frac{1}{M}\int_{\mathcal{C}} x\rho\,ds & &= \frac{1}{M}\int_{\mathcal{C}} y\rho\,ds & &= \frac{1}{M}\int_{\mathcal{C}} z\rho\,ds.
\end{aligned}$$

On comparera ces formules à celle pour le centre de masse d'une plaque occupant une région $\mathcal{R}$ du plan (voir formule 3.3.6).

Naturellement, les moments d'inertie de notre fil par rapport à l'axe des x, des y ou des z, que nous notons I_x, I_y et I_z respectivement, sont donnés par

$$I_x = \int_{\mathcal{C}} (y^2+z^2)\rho\,ds, \qquad I_y = \int_{\mathcal{C}} (x^2+z^2)\rho\,ds, \qquad I_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\rho\,ds.$$

Notons que le terme y^2+z^2 dans l'expression de I_x provient du carré de la distance du point (x,y,z) à l'axe de rotation, c'est-à-dire l'axe Ox.

De même, la valeur moyenne de la fonction f sur la courbe $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\bar{f} = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f\,ds}{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} ds} = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{C}} f\,ds.$$

On comparera cette formule à celles de la définition 3.3.2.

Voyons un exemple.

Exemple 4.2.8

Supposons que nous avons un fil hélicoïdal [a] dont la forme est donnée par

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

et que ce fil a une densité de masse constante ρ. Trouver le centre de masse du fil. Nous avons en particulier

$$\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k},$$

de sorte que

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt} = \frac{\int_0^{2\pi} a\cos(t)\,dt}{2\pi} = 0, \\
\bar{y} &= \frac{\int y ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt} = \frac{\int_0^{2\pi} a\sin(t)\,dt}{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{2\pi} z(t)\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt} = \frac{\int_0^{2\pi} bt\,dt}{2\pi} = \frac{b}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = b\pi,$$

de sorte que le centre de masse se trouve sur l'axe de la spirale, à mi-chemin entre l'extrémité inférieure et l'extrémité supérieure.

Intégrales de ligne des champs de vecteurs

Rappelons qu'un champ de vecteurs $\mathbf{F}$ est une fonction qui, à chaque point $\mathbf{r}$ d'une région de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, associe un vecteur $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ou $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ (les composantes P, Q, R sont des fonctions de la variable vectorielle $\mathbf{r}$).

Cette notion pouvant paraître un peu abstraite, voyons quelques exemples familiers.

- Si un gaz ou un liquide occupe une région $\mathcal{D}$ de l'espace et qu'il bouge à un instant t donné à chaque point de $\mathcal{D}$, le gaz ou le liquide considéré a un vecteur vitesse. Nous avons alors un *champ de vitesses*.
- Dans une région de l'espace, nous avons des forces qui dépendent de la position (entre autres). Nous avons alors un *champ de forces* $\mathbf{F}$.
- Si f est une fonction de deux ou trois variables définie sur une région $\mathcal{D}$, alors, en chaque point $\mathbf{r}$, nous avons le vecteur gradient $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r})$. Nous avons donc un champ de vecteurs, le *champ gradient* de la fonction f.

Supposons que nous voulons trouver le travail effectué par une force $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ qui déplace une particule le long d'un chemin $\mathbf{r}(t)$. Pendant « l'intervalle infinitésimal » [1] entre t et $t + dt$, la particule se déplace de $\mathbf{r}(t)$ à $\mathbf{r}(t) + d\mathbf{r}$, où $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\,dt$. Par définition, le travail effectué pendant ce laps de temps est

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\,dt.$$

Le travail total pendant la durée du déplacement entre t_0 et t_1 est donc

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\,dt.$$

Ceci nous mène à définir ce qui suit.

Définition 4.2.9

Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par un chemin simple et lisse par morceaux $\mathbf{r} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, et $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs continu défini sur une région contenant $\mathcal{C}$. Alors,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt.$$

Le chemin $\mathbf{r}$ donne à $\mathcal{C}$ une **orientation** : celle du sens de parcours, de $\mathbf{r}(t_0)$ vers $\mathbf{r}(t_1)$.

[a] Par exemple, votre *slinky* préféré.

[1] Oui, oui, il faudrait, en toute rigueur, considérer de petits intervalles de temps $\Delta t > 0$, puis prendre la limite lorsque $\Delta t \to 0$. Mais, à ce stade-ci, nous avons l'habitude de cette mécanique.

Remarque 4.2.10 Orientation et courbes fermées.

(a) Contrairement à l'intégrale de ligne d'une fonction scalaire, l'intégrale de ligne d'un champ de vecteurs dépend de l'orientation de la courbe. Un reparamétrage qui conserve le sens de parcours donne le même résultat, mais un anti-reparamétrage, qui parcourt $\mathcal{C}$ dans le sens inverse, change le signe de l'intégrale (partie (b) de l'exercice 6). On doit donc toujours préciser le sens de parcours lorsqu'on intègre un champ de vecteurs.

(b) Un chemin $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est dit **fermé** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, c'est-à-dire si l'on revient au point de départ. Une **courbe fermée simple** est l'image d'un chemin fermé et simple (définition 1.5.3) : elle ne se recoupe pas, comme un cercle ou le bord d'un triangle. Lorsque la courbe $\mathcal{C}$ est fermée, on écrit parfois $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ plutôt que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Le petit cercle rappelle seulement que la courbe est fermée : il n'indique pas l'orientation et ne change rien au calcul. Nous l'emploierons avec parcimonie, lorsque le fait que la courbe est fermée n'apparaît pas déjà ailleurs, et jamais pour le bord d'une région (noté $\partial\mathcal{R}$, voir la section sur le théorème de Green), qui est toujours fermé.

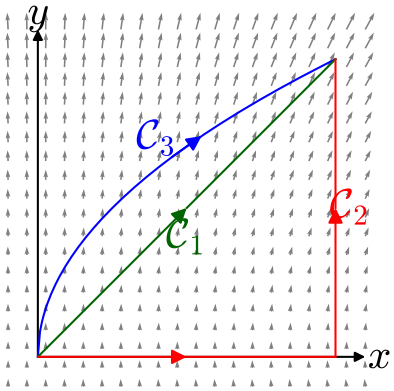
(c) Pour une courbe fermée, le point de départ n'a pas d'importance, mais le sens de parcours en a une. Dans le plan, on le précise en disant que la courbe est parcourue dans le sens antihoraire (contraire à celui des aiguilles d'une montre) ou dans le sens horaire. Dans l'espace, il faut ajouter d'où l'on regarde, par exemple « dans le sens antihoraire lorsque vue d'en haut ». Nous y reviendrons avec les théorèmes de Green et de Stokes.

Voyons maintenant quelques exemples.

Exemple 4.2.11

Soit $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 1)$ et

$$\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + (y^2 + 1)\,\mathbf{j}.$$



Nous considérons trois trajectoires, toutes allant de P_0 à P_1 pour calculer les intégrales de ligne correspondantes.

(a) Soit $\mathcal{C}_1$ le segment de droite de P_0 à P_1.

(b) Soit $\mathcal{C}_2$ la trajectoire obtenue par juxtaposition de deux segments de droite, partant de P_0, suivant l'axe des x jusqu'à $(1, 0)$, puis suivant la droite verticale $x = 1$ de $(1, 0)$ à P_1.

(c) Soit $\mathcal{C}_3$ la portion de la parabole $x = y^2$ de P_0 à P_1.

Nous allons calculer l'intégrale de $\mathbf{F}$ le long de ces trois trajectoires.

(a) Nous paramétrons $\mathcal{C}_1$ par $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}$ avec $t \in [0, 1]$. Ainsi, $x(t) = t$ et $y(t) = t$, de sorte que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^2\,\mathbf{i} + (t^2 + 1)\,\mathbf{j}$ et $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, ce qui permet de calculer

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\,dt = \int_0^1 \left[t^2\,\mathbf{i} + (t^2 + 1)\,\mathbf{j}\right] \cdot [\mathbf{i} + \mathbf{j}]\,dt \\ &= \int_0^1 \left[2t^2 + 1\right] dt = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

(b) Nous séparons $\mathcal{C}_2$ en deux morceaux : $\mathcal{C}_{2,x}$ de P_0 à $(1, 0)$ en suivant l'axe des x, et $\mathcal{C}_{2,y}$

allant de $(1,0)$ à P_1 le long de la droite $x=1$. Nous paramétrons $\mathcal{C}_{2,x}$ par $\mathbf{r}(x)=x\,\mathbf{i}$ avec $x\in[0,1]$, et $\mathcal{C}_{2,y}$ par $\mathbf{r}(y)=\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}$ avec $y\in[0,1]$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\int_{\mathcal{C}_{2,x}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{\mathcal{C}_{2,y}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\&=\int_0^1\left[(x)(0)\,\mathbf{i}+(0^2+1)\,\mathbf{j}\right]\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}\,(x\,\mathbf{i})}^{\mathbf{i}}\,dx\\&\qquad+\int_0^1\left[(1)(y)\,\mathbf{i}+(y^2+1)\,\mathbf{j}\right]\cdot\overbrace{\frac{d}{dy}\,(\mathbf{i}+y\,\mathbf{j})}^{\mathbf{j}}\,dy\\&=\int_0^1 0\,dx+\int_0^1\left(y^2+1\right)\,dy=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Notons que l'intégrale le long de $\mathcal{C}_{2,x}$ est nulle parce que, le long de cette portion de la trajectoire, le champ $\mathbf{F}$ est orthogonal à la trajectoire. Nous pouvons observer ceci dans la figure ci-haut.

(c) Nous paramétrons $\mathcal{C}_3$ par $\mathbf{r}(t)=t^2\,\mathbf{i}+t\,\mathbf{j}$ avec $t\in[0,1]$. Alors, $x(t)=t^2$ et $y(t)=t$, de sorte que $\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)=t^3\,\mathbf{i}+(t^2+1)\,\mathbf{j}$ et $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)=2t\,\mathbf{i}+\mathbf{j}$, ce qui permet de calculer

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\int_0^1\left[t^3\,\mathbf{i}+(t^2+1)\,\mathbf{j}\right]\cdot\left[2t\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right]dt\\&=\int_0^1\left[2t^4+t^2+1\right]dt\\&=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+1=\frac{26}{15}.\end{aligned}$$

Il importe de remarquer que, même si les points initial et final des trois trajectoires coïncident, les valeurs des intégrales $\int_{\mathcal{C}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, $\int_{\mathcal{C}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ et $\int_{\mathcal{C}_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ diffèrent.

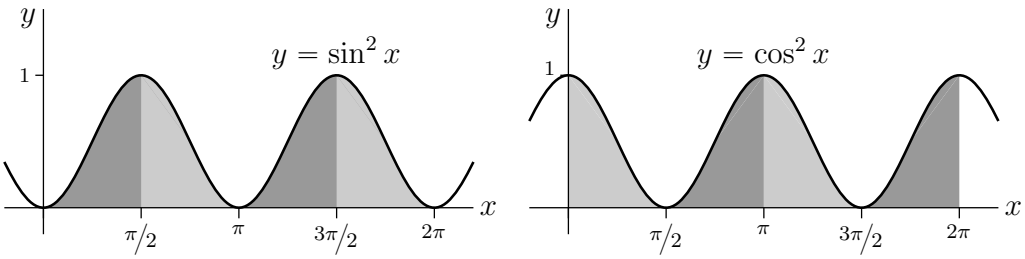
Exemple 4.2.12

Soit $\mathbf{F}(x,y)=2y\,\mathbf{i}+3x\,\mathbf{j}$ et $\mathcal{C}$ le cercle $x^2+y^2=1$, parcouru une fois dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, en partant (et finissant) en $(1,0)$. Calculer l'intégrale de ligne de $\mathbf{F}$ le long de $\mathcal{C}$.

Solution. Nous paramétrons $\mathcal{C}$ par $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}$ avec $t\in[0,2\pi]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\int_0^{2\pi}\left[2\sin t\,\mathbf{i}+3\cos t\,\mathbf{j}\right]\cdot\left[-\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}\right]dt\\&=\int_0^{2\pi}\left[-2\sin^2 t+3\cos^2 t\right]dt.\end{aligned}$$

On pourrait calculer ces intégrales au moyen des identités trigonométriques des angles doubles, mais on peut s'en tirer avec moins d'effort. Puisque $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ s'obtiennent l'une de l'autre par translation et que les deux sont périodiques de période π, les deux intégrales $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$ et $\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt$ sont égales (puisqu'elles représentent la même aire, voir la figure ci-bas).



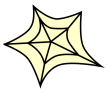
Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big[\sin^2 t + \cos^2 t\big]\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi$$

et

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt + 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi.$$

Il convient de noter que, même si la courbe $\mathcal{C}$ commence et se termine au même point, l'intégrale de $\mathbf{F}$ le long de $\mathcal{C}$ n'est pas nulle.



À vous de jouer 4.2.13

Soit $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ et C le segment de droite du point $P = (3,0)$ au point $Q = (0,5)$.

(a) Trouver une équation paramétrique vectorielle $\mathbf{r}(t)$ pour le segment C telle que les points P et Q correspondent à $t = 0$ et $t = 1$ respectivement.

$\mathbf{r}(t) =$ _____

(b) En utilisant la paramétrisation de la partie (a), l'intégrale de ligne de $\mathbf{F}$ le long de C est

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}\,'(t)\, dt = \int_a^b \_\_\_\_\_\, dt$$

avec les bornes d'intégration $a =$ _____ et $b =$ _____

(c) Évaluer l'intégrale de ligne de la partie (b).

(d) Quelle est la valeur de l'intégrale de ligne de $\mathbf{F}$ autour du triangle orienté dans le sens des aiguilles d'une montre dont les sommets sont l'origine, P et Q ? Indice : Dessiner le champ de vecteurs et le triangle.

Rappelons que le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}$ est tel que $\mathbf{r}' = \|\mathbf{r}'\|\,\mathbf{T}$. Par ailleurs, l'abscisse curviligne s vérifie $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'\|$ (et l'on écrit souvent $ds = \|\mathbf{r}'\|\, dt$). Ainsi, nous avons, en vertu de la définition de l'intégrale de ligne d'une fonction scalaire, la formule qui suit.

Formule 4.2.14

Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par un chemin simple et lisse par morceaux $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{T}$ le vecteur tangent unitaire (définition 1.5.23) et $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs continu défini sur une région contenant $\mathcal{C}$. Alors,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{T}(t)\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathbf{T}\, ds.$$

L'intégrale de ligne qui nous occupe calcule la somme des projections du champ $\mathbf{F}$ tangentiellement à la courbe $\mathcal{C}$. Pour cette raison, on appelle souvent cette intégrale le **flux de F le long de** $\mathcal{C}$, ou encore la **circulation de F le long de** $\mathcal{C}$. Il sera utile de penser en ces termes.

Par ailleurs, si l'on a un champ de vecteurs $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ et un chemin $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, on aura

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t),$$

qu'on écrit de façon plus compacte sous la forme

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = P\, x' + Q\, y'.$$

L'intégrale de ligne devient donc

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\ dt = \int_a^b P\, x' + Q\, y'\ dt,$$

qu'on note naturellement

$$\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy.$$

Cette écriture équivalente pour $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donne lieu aux intégrales de ligne de la forme

$$\int_{\mathcal{C}} P dx \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathcal{C}} Q dy.$$

Une remarque analogue tient pour les champs (et les chemins) dans $\mathbb{R}^3$: si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, on aura

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Voyons maintenant deux exemples.

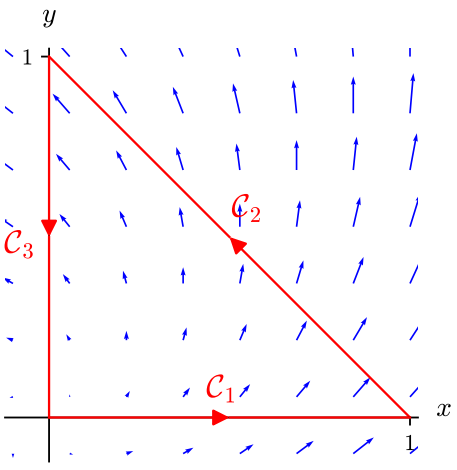
Exemple 4.2.15

Calculer l'intégrale de ligne $\int_{\mathcal{C}} (x-y)dx + (x+y)dy$, où $\mathcal{C}$ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Solution.

On divise $\mathcal{C}$ en trois portions, chacune correspondant à un des côtés du triangle : $\mathcal{C}_1$ le segment allant de $(0,0)$ à $(1,0)$, $\mathcal{C}_2$ le segment allant de $(1,0)$ à $(0,1)$, puis $\mathcal{C}_3$ celui de $(0,1)$ à $(0,0)$. Dans la figure ci-contre, nous avons aussi le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x,y) = (x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}.$$



- La portion $\mathcal{C}_1$ est paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = t\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ pour $t \in [0,1]$. Nous

avons alors $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = \mathbf{i}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_1} (x-y)dx + (x+y)dy \\ &= \int_0^1 \Big[(x(t)-y(t))\,x'(t) + (x(t)+y(t))\,y'(t)\Big]dt \\ &= \int_0^1 \big[(t-0)\cdot 1 + (t+0)\cdot 0\big]dt \\ &= \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- La portion $\mathcal{C}_2$ est paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = (1-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ pour $t \in [0,1]$. Nous avons alors $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_2} (x-y)dx + (x+y)dy \\ &= \int_0^1 \Big[(x(t)-y(t))\,x'(t) + (x(t)+y(t))\,y'(t)\Big]dt \\ &= \int_0^1 \big[((1-t)-t)(-1) + ((1-t)+t)(1)\big]dt \\ &= \int_0^1 2t\,dt = 1.\end{aligned}$$

- La portion $\mathcal{C}_3$ est paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$ pour $t \in [0,1]$. Nous avons alors $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = -\mathbf{j}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_3} (x-y)dx + (x+y)dy \\ &= \int_0^1 \Big[(x(t)-y(t))\,x'(t) + (x(t)+y(t))\,y'(t)\Big]dt \\ &= \int_0^1 \big[(0-(1-t))\cdot 0 + (0+(1-t))(-1)\big]dt \\ &= \int_0^1 (t-1)\,dt = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} (x-y)dx + (x+y)dy &= \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Le fait que l'intégrale sur $\mathcal{C}_3$ soit négative et les deux autres positives peut être lu dans le graphique ci-haut. En effet, le long de la portion du trajet sur $\mathcal{C}_3$, on observe que le champ $\mathbf{F}$ pointe en s'opposant au déplacement : le champ a une composante verticale positive, tandis que le déplacement se fait vers le bas.

Exemple 4.2.16

Calculer le travail effectué par le champ

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y-x^2)\mathbf{i} + (z-y^2)\mathbf{j} + (x-z^2)\mathbf{k}$$

entre l'origine et le point $(1,1,1)$ le long de la courbe paramétrée par $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ avec $t \in [0,1]$.

Solution. Pour commencer, calculons

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \big(y(t)-x(t)^2\big)\,\mathbf{i} + \big(z(t)-y(t)^2\big)\,\mathbf{j} + \big(x(t)-z(t)^2\big)\,\mathbf{k}\\ &= (t^2-t^2)\mathbf{i} + (t^3-t^4)\mathbf{j} + (t-t^6)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

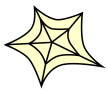
Par ailleurs, on a directement $\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\left(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}\right) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, de sorte que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8.$$

L'intégrale voulue est donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \int_0^1 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\ dt\\ &= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{29}{60}.\end{aligned}$$

À vous de jouer 4.2.17



Trouver le travail effectué par le champ de force $\mathbf{F}(x,y,z) = 1x\,\mathbf{i} + 1y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ sur une particule qui se déplace le long de l'hélice $\mathbf{r}(t) = 4\cos(t)\,\mathbf{i} + 4\sin(t)\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Supposons maintenant que nous voulons calculer le taux d'entrée ou de sortie d'un fluide dans une région du plan limitée par une courbe fermée $\mathcal{C}$. Si $\mathbf{F}$ est le champ de vitesses du fluide, on ne doit plus projeter $\mathbf{F}$ tangentiellement à $\mathcal{C}$ (ce qu'on fait lorsqu'on calcule $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$), mais plutôt projeter $\mathbf{F}$ sur un vecteur $\mathbf{n}$ unitaire et orthogonal à la courbe en chaque point. Dans ce cas, le **flux de F à travers** $\mathcal{C}$ sera donné par

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds.$$

Notre courbe étant fermée, nous devons choisir un vecteur unitaire qui pointe vers l'extérieur. Puisque la courbe est plane, le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}$ a une composante $\mathbf{k}$ nulle. Ainsi, en chaque point de la courbe, les vecteurs $\mathbf{k}\times\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}\times\mathbf{k}$ sont tous les deux unitaires et orthogonaux à la courbe. Prenons pour acquis que le paramétrage $\mathbf{r}$ de $\mathcal{C}$ fait parcourir la courbe dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Dans ce cas, c'est le vecteur $\mathbf{n} = \mathbf{T}\times\mathbf{k}$ qui pointe vers l'extérieur.

Afin de faire les calculs explicites, rappelons que

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{1}{\|\mathbf{r}'\|}\mathbf{r}' = \frac{1}{ds/dt}\mathbf{r}' = \frac{dt}{ds}\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}\right)\\ &= \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Ainsi, on calcule le produit vectoriel

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & dx/ds & 0 \\ \mathbf{j} & dy/ds & 0 \\ \mathbf{k} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}.$$

Si notre champ de vitesses est $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, nous aurons

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P\frac{dy}{ds} - Q\frac{dx}{ds},$$

et le flux à travers la courbe est donné par

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\mathcal{C}} P\frac{dy}{ds} - Q\frac{dx}{ds}\, ds = \int_{\mathcal{C}} P dy - Q dx. \qquad (*)$$

Exemple 4.2.18

Soit $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j} = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Calculer le flux de $\mathbf{F}$ à travers (vers l'extérieur) le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

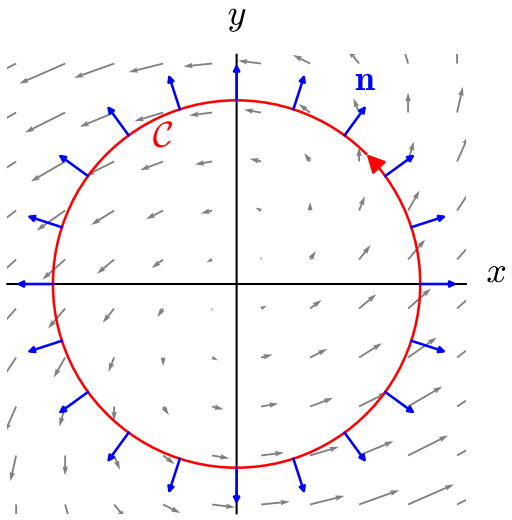


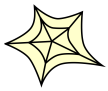
Figure 4.2.19 Le cercle $\mathcal{C}$ et le champ $\mathbf{F}$

Solution. Nous avons un paramétrage du cercle $\mathcal{C}$ qui le parcourt dans le sens trigonométrique, à savoir $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. On calcule $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$, et le flux est

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} P dy - Q dx &= \int_0^{2\pi} (x(t) - y(t))y'(t) - x(t)x'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t) - (\cos t)(-\sin t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos 2t\, dt = \pi. \end{aligned}$$

Remarquons que le flux vers l'extérieur est positif, en accord avec ce que nous observons dans la figure : lorsque le champ de vecteurs traverse la courbe $\mathcal{C}$, il le fait en allant de l'intérieur vers l'extérieur.

À vous de jouer 4.2.20



Calculer le flux vers l'extérieur du champ de vecteurs $\mathbf{F}(x,y) = 3x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ à travers la frontière $\mathcal{C}$ du triangle de sommets $O = (0,0)$, $A = (6,0)$ et $B = (0,1)$, où $\mathcal{C}$ est orientée dans le sens antihoraire.

Rappel : le flux de $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ à travers $\mathcal{C}$ est donné par $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} P\,dy - Q\,dx$.

Flux = _____

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy$ en sens antihoraire autour du carré ayant pour sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$.

2. Considérer le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x,y) = (e^x \cos y + x^2)\,\mathbf{i} + (x^2y + 3)\,\mathbf{j}.$$

Évaluer l'intégrale de ligne $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ le long de la courbe orientée $\mathcal{C}$ obtenue en se déplaçant de $(0,0)$ à $(1,0)$ à $(1,\pi)$ et finalement à $(0,\pi)$ le long de segments droits.

3. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ pour

(a) $\mathbf{F}(x,y) = xy\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j}$ le long de $y = x^2$ de $(0,0)$ à $(1,1)$;

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-z)\,\mathbf{i} + (y-z)\,\mathbf{j} - (x+y)\,\mathbf{k}$ le long du chemin polygonal de $(0,0,0)$ à $(1,0,0)$ à $(1,1,0)$ à $(1,1,1)$.

4. Trouver le travail effectué par le champ de forces

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x-y^2)\,\mathbf{i} + (y-z^2)\,\mathbf{j} + (z-x^2)\,\mathbf{k}$$

sur une particule se déplaçant le long du segment droit allant de $(0,0,1)$ à $(2,1,0)$.

5. Soit $\mathcal{C}$ la moitié supérieure du cercle unité centré en $(1,0)$ (c'est-à-dire la partie du cercle se situant au-dessus de l'axe x), orientée en sens horaire. Calculer l'intégrale de ligne $\int_{\mathcal{C}} xy\,dy$.

Pour aller plus loin.

6. **L'intégrale de ligne ne dépend pas du paramétrage.** Soit $\mathbf{r} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ un chemin simple et lisse, de courbe $\mathcal{C}$, et $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r}\circ h$ un reparamétrage ou un anti-reparamétrage de $\mathbf{r}$, au sens de l'exercice 10 de la section 1.6. Soit enfin f une fonction continue et $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs continu, définis sur une région contenant $\mathcal{C}$.

(a) Montrer que l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ donne le même résultat, qu'on la calcule avec $\mathbf{r}$ ou avec $\boldsymbol{\gamma}$, et ce dans les deux cas.

(b) Montrer que l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donne le même résultat avec $\mathbf{r}$ et avec $\boldsymbol{\gamma}$ si $\boldsymbol{\gamma}$ est un reparamétrage, et qu'elle change de signe si $\boldsymbol{\gamma}$ est un anti-reparamétrage.

4.3 Le rotationnel et la divergence

Dans cette section, nous nous intéressons au calcul différentiel des champs vectoriels. Plus précisément, nous considérons le rotationnel et la divergence d'un champ de vecteurs. Si l'on pense au champ comme à un champ de vitesses, il s'agit de mesures qui permettent, jusqu'à un certain point, de caractériser ce champ par sa tendance à créer des rotations (sans déplacement) ou comme une source. Ces quantités seront intimement liées aux intégrales de flux rencontrées dans la section précédente, à savoir la circulation d'un champ (en lien avec le rotationnel) et le flux d'un champ à travers une courbe (en lien avec la divergence).

Le rotationnel

Nous voulons mesurer la tendance que notre champ $\mathbf{F}$ a à créer un tourbillon en un point (x_0, y_0) donné. Imaginons que nous disposons d'une roue à palettes, que nous déposons sur la surface de notre liquide. La roue ne peut pas bouger vers un autre point, mais le liquide peut faire tourner la roue. La rotation a un axe dirigé par le vecteur $\mathbf{n}$, normal au plan de rotation ; dans le cas des champs dans $\mathbb{R}^2$, cet axe est le vecteur $\mathbf{k}$.

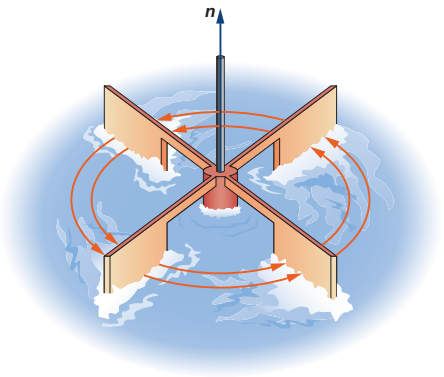
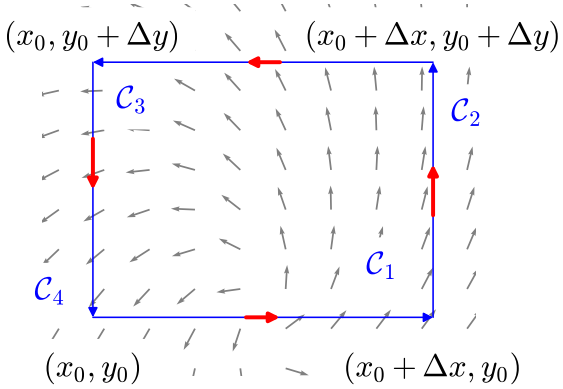


Figure 4.3.1 Figure tirée de *Calculus Volume 3, d'OpenStax*[8]

Considérons une trajectoire rectangulaire fermée $\mathcal{C}$, formée par la réunion de quatre segments $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre :



- $\mathcal{C}_1$ de (x_0, y_0) à $(x_0 + \Delta x, y_0)$;
- $\mathcal{C}_2$ de $(x_0 + \Delta x, y_0)$ à $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$;
- $\mathcal{C}_3$ de $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ à $(x_0, y_0 + \Delta y)$;
- $\mathcal{C}_4$ de $(x_0, y_0 + \Delta y)$ à (x_0, y_0).

Ainsi, la circulation de $\mathbf{F}$ le long de $\mathcal{C}$ est

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Comme d'habitude, nous supposons Δx et Δy petits et que les composantes du champ $\mathbf{F}$ sont continues et possèdent des dérivées partielles continues. Sur chacun des segments, nous voulons une approximation de $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$, ce que nous obtenons en choisissant un point d'échantillonnage pour l'évaluation du champ $\mathbf{F}$ sur chaque portion du trajet.

Portion	Point d'évaluation	$\Delta\mathbf{r}$	$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$
$\mathcal{C}_1$, bas	(x_0, y_0)	$\Delta x\,\mathbf{i}$	$P(x_0, y_0)\Delta x$
$\mathcal{C}_2$, droite	$(x_0 + \Delta x, y_0)$	$\Delta y\,\mathbf{j}$	$Q(x_0 + \Delta x, y_0)\Delta y$
$\mathcal{C}_3$, haut	$(x_0, y_0 + \Delta y)$	$-\Delta x\,\mathbf{i}$	$-P(x_0, y_0 + \Delta y)\Delta x$
$\mathcal{C}_4$, gauche	(x_0, y_0)	$-\Delta y\,\mathbf{j}$	$-Q(x_0, y_0)\Delta y$

Ainsi, le flux correspondant aux portions horizontales du trajet est

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &\approx \left[P(x_0, y_0) - P(x_0, y_0 + \Delta y)\right]\Delta x\\ &= -\left[P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0)\right]\Delta x\\ &\approx -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\,\Delta x,\end{aligned}$$

puisque nous avons l'hypothèse de la continuité de la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial y}$.

De la même façon, le flux correspondant aux composantes verticales de la trajectoire est

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_4}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &\approx \left[Q(x_0 + \Delta x, y_0) - Q(x_0, y_0)\right]\Delta y\\ &\approx \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x\,\Delta y,\end{aligned}$$

puisque nous avons l'hypothèse de la continuité de la dérivée partielle $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

La circulation totale est donc

$$\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{4}\int_{\mathcal{C}_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \approx \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)\right]\Delta y\Delta x.$$

La *densité de circulation*, c'est-à-dire la circulation par unité d'aire, est donc

$$\frac{\text{Flux}}{\text{Aire}} \approx \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Exemple 4.3.2

Considérons le champ $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 1)\mathbf{j}$. Sa densité de circulation est $\frac{\partial(x^2-1)}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} = 2x$.

Le champ est représenté dans la figure ci-contre. Notons que toutes les flèches sont verticales vers le bas. On pourrait donc penser que ce champ représente une translation et que le rotationnel devrait être nul. En bout de ligne, ce n'est pas à une figure comme celle-ci qu'on pense lorsque l'idée d'un tourbillon est considérée.

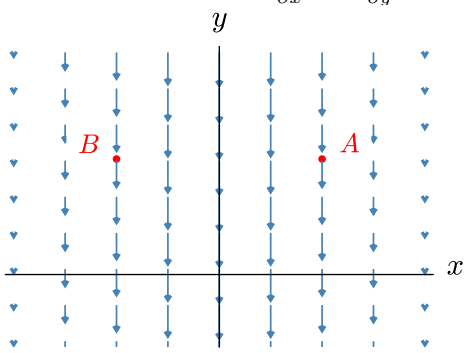


Figure 4.3.3 $\mathbf{F} = (x^2 - 1)\mathbf{j}$

Cependant, pensons à notre roue à palettes. S'il est vrai qu'elle voyagerait en suivant une translation donnée par des lignes droites vers le bas (les lignes de courant de ce champ sont effectivement ces droites), elle voyagerait en tournant sur elle-même. Au point A, par exemple, la vitesse du fluide à la droite de la roulette est légèrement inférieure à celle à la gauche (mais toujours près de A). Il en résulterait une faible rotation dans le sens contraire

des aiguilles d'une montre. Ceci correspond au fait que $x_A > 0$, et donc la densité de circulation en ce point vaut $2x_A > 0$.

Autour du point B, la situation est inversée.

Pour les champs à 3 composantes, les choses sont passablement plus complexes. S'il est vrai qu'une rotation dans le plan ne peut avoir comme axe qu'un point (ou une droite perpendiculaire au plan passant par ce point si l'on tient à voir les choses en trois dimensions), dans l'espace, les axes de rotation peuvent avoir n'importe quelle orientation. La densité de circulation doit tenir compte de ceci, on devra avoir une densité de circulation pour chaque axe ! Pour cette raison, il devra s'agir d'un champ de vecteurs à son tour.

On peut effectuer un raisonnement comme celui qui a mené à la notion de densité de circulation pour les champs à trois composantes. Ceci mène à la définition suivante.

Définition 4.3.4

Soit $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ un champ de vecteurs différentiable. Le **rotationnel** de $\mathbf{F}$ est le champ $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z)$, aussi noté $\operatorname{rot} \mathbf{F}$, défini par

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} &= \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathbf{i} + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathbf{j} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathbf{k} \\ &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

- En particulier, lorsqu'on a affaire à un champ dans le plan, le rotationnel devient $\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathbf{k}$. C'est un champ dont une seule composante est non nulle. Pour cette raison, on commet souvent l'abus de langage qui consiste à dire que le rotationnel de $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ est la quantité $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$.
- L'utilisation du déterminant est en réalité un procédé mnémotechnique, souvent utilisé afin de faire les calculs, puisqu'il est facile de se tromper dans les signes.

Exemple 4.3.5

Soit $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$. Calculer le rotationnel de $\mathbf{F}$.

Solution. On calcule directement

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & x^2 - y \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & 4z \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & x^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial x^2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}(4z)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)\right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right)\mathbf{k} \\ &= -4\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Nous savons que le champ gradient d'une fonction f donne la direction de plus forte augmentation de la valeur de cette fonction. Nous verrons dans la section 4.4 d'autres raisons pour lesquelles il est important de pouvoir décider si un champ est un champ gradient ou pas.

Une des utilités du rotationnel est qu'il peut être utilisé pour dépister les champs gradients.

En effet, le résultat suivant nous dit que ceux-ci sont irrotationnels[1].

Théorème 4.3.6 Les gradients sont irrotationnels.

Si f est une fonction de classe C^2, alors

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{0},$$

ou encore

$$rot\,(grad\, f) = \mathbf{0}.$$

Démonstration. Soit f une fonction de classe C^2. Alors, $\boldsymbol{\nabla} f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & f_x \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & f_y \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & f_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= (f_{zy} - f_{yz})\,\mathbf{i} + (f_{xz} - f_{zx})\,\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

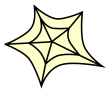
Or, f étant supposée de classe C^2, le théorème 2.3.19 donne l'égalité des dérivées partielles croisées, et la conclusion suit. ■

Exemple 4.3.7

Nous avons vu à l'exemple 4.1.11 qu'il n'existe pas de fonction f telle que $\boldsymbol{\nabla} f = xy\,\mathbf{i} + (y^2+1)\,\mathbf{j}$.

Avec les notations et les concepts introduits dans cette section, nous pouvons revoir ceci comme suit : posons $\mathbf{G} = xy\,\mathbf{i} + (y^2+1)\,\mathbf{j}$. Comme $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G} = -x\,\mathbf{k}$, qui est non nul, le champ $\mathbf{G}$ n'est pas irrotationnel. Il ne peut donc pas être un champ gradient.

À vous de jouer 4.3.8



Montrez que le champ de vecteurs $\mathbf{F}(x,y,z) = (5y\cos(5x), 5x\sin(5y), 0)$ n'est pas un champ gradient en calculant son rotationnel.

Dans cet exercice, afin de faciliter la saisie des réponses, un champ de vecteurs est donné par ses composantes : la notation (P,Q,R) désigne le champ $P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$.

$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = (\,$_____, _____, _____$)$.

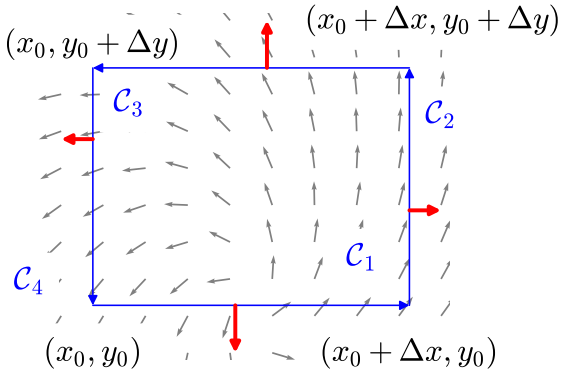
[1] C'est-à-dire que leur rotationnel est nul.

La divergence

Nous voulons maintenant savoir dans quelle mesure le champ $\mathbf{F}$ se comporte comme une source (voir l'exemple 4.1.7) dans un voisinage d'un point (x_0, y_0) donné. Ceci revient à considérer le flux de $\mathbf{F}$ *à travers* une courbe fermée $\mathcal{C}$.

Considérons une trajectoire rectangulaire fermée $\mathcal{C}$, formée par la réunion de quatre segments $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre :

- $\mathcal{C}_1$ de (x_0, y_0) à $(x_0 + \Delta x, y_0)$;
- $\mathcal{C}_2$ de $(x_0 + \Delta x, y_0)$ à $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$;
- $\mathcal{C}_3$ de $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ à $(x_0, y_0 + \Delta y)$;
- $\mathcal{C}_4$ de $(x_0, y_0 + \Delta y)$ à (x_0, y_0).



Soit, par ailleurs, $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire normal à la courbe, pointant vers l'extérieur. Comme nous l'avons vu, le flux à travers $\mathcal{C}$ est

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds + \int_{\mathcal{C}_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

Comme précédemment, nous faisons une approximation de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sur chaque portion de la trajectoire en choisissant un point d'évaluation pour $\mathbf{F}$. Par ailleurs, la longueur de chaque portion de déplacement est $\Delta s = \Delta x$ ou $\Delta s = \Delta y$, selon qu'on se trouve sur une portion horizontale ou verticale.

Portion	**Point d'évaluation**	$\mathbf{n}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ \Delta s$
$\mathcal{C}_1$, bas	(x_0, y_0)	$-\mathbf{j}$	$-Q(x_0, y_0)\Delta x$
$\mathcal{C}_2$, droite	$(x_0 + \Delta x, y_0)$	$\mathbf{i}$	$P(x_0 + \Delta x, y_0)\Delta y$
$\mathcal{C}_3$, haut	$(x_0, y_0 + \Delta y)$	$\mathbf{j}$	$Q(x_0, y_0 + \Delta y)\Delta x$
$\mathcal{C}_4$, gauche	(x_0, y_0)	$-\mathbf{i}$	$-P(x_0, y_0)\Delta y$

Ainsi, le flux correspondant aux portions horizontales du trajet est

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &\approx [-Q(x_0, y_0) + Q(x_0, y_0 + \Delta y)]\, \Delta x \\ &\approx \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\, \Delta x,\end{aligned}$$

puisque nous avons supposé la continuité de $\frac{\partial Q}{\partial y}$.

De la même façon, le flux correspondant aux portions verticales est

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds + \int_{\mathcal{C}_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &\approx [P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0)]\, \Delta y \\ &\approx \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x\, \Delta y.\end{aligned}$$

Le flux total est donc

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{i=1}^{4} \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds \approx \left[\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)\right] \Delta y \Delta x.$$

La *densité de flux à travers*, c'est-à-dire le flux par unité d'aire, est donc

$$\frac{\text{Flux}}{\text{Aire}} \approx \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Définition 4.3.9

La **divergence** du champ de vecteurs $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ est la fonction scalaire $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$, aussi notée $\operatorname{div} \mathbf{F}$, définie par

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

- En particulier, lorsqu'on a affaire à un champ dans le plan, la divergence est $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.
- À nouveau, l'écriture $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$ est un léger abus de notation, on conçoit $\boldsymbol{\nabla}$ comme un vecteur formel, $\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$.

Il faut noter que la divergence d'un champ vectoriel est une fonction à valeurs scalaires, à la différence du rotationnel qui, lui, est un champ vectoriel.

Exemple 4.3.10

Calculer la divergence du champ $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$.

Solution. On calcule directement

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0.$$

Exemple 4.3.11

Calculer la divergence du champ de vecteurs $\mathbf{F} = x^2 y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$.

Solution. On calcule directement :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy.$$

Tout comme le rotationnel permet de dépister les champs gradients, la divergence permet de dépister les champs rotationnels. En effet, la divergence d'un tel champ est nulle, ce qu'on exprime en disant que les champs rotationnels sont *« incompressibles »*.

Théorème 4.3.12 Les rotationnels sont incompressibles.

Soit $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ *un champ de classe* C^2. *Alors*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = 0,$$

ou encore

$$div\,(rot\,(\mathbf{F})) = 0.$$

Démonstration. En effet, avec les notations de l'énoncé, nous avons

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = (R_y - Q_z)\,\mathbf{i} + (P_z - R_x)\,\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\,\mathbf{k}$$

et donc

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(R_y - Q_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P_z - R_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q_x - P_y)\\ &= R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz}\\ &= 0,\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient encore une fois du théorème 2.3.19 de Clairaut-Schwarz. ■

Exemple 4.3.13

Montrer qu'il n'existe pas de champ dont le rotationnel soit $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

Solution. On calcule $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$. Or, la divergence d'un rotationnel est toujours nulle (théorème 4.3.12). Le champ $\mathbf{F}$ ne peut donc pas être le rotationnel d'un champ.



À vous de jouer 4.3.14

Calculez la divergence du champ de vecteurs $\mathbf{F} = \mathbf{a}\times\mathbf{r}$, si $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ et $\mathbf{a} = 8\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}+4\,\mathbf{k}$, en calculant d'abord le produit vectoriel.

$\mathbf{F} =$ _____

de sorte que div $\mathbf{F} =$ _____



À vous de jouer 4.3.15

Soit $\mathbf{F}(x,y,z) = (9xz^2, -8xyz, 5xy^3z)$ un champ de vecteurs et $f(x,y,z) = x^3y^2z$.

Dans cet exercice, afin de faciliter la saisie des réponses, un champ de vecteurs est donné par ses composantes : la notation (P,Q,R) désigne le champ $P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$.

$\nabla f =$ (_____, _____, _____).

$\nabla\times\mathbf{F} =$ (_____, _____, _____).

$\mathbf{F}\times\nabla f =$ (_____, _____, _____).

$\mathbf{F}\cdot\nabla f =$ _____.

Le laplacien, et quelques identités

Il existe un autre opérateur différentiel souvent rencontré en sciences : il s'agit du **laplacien**[2]. À la différence des autres opérateurs, il peut agir sur les fonctions ou sur les champs. De plus, il fait intervenir les dérivées du deuxième ordre.

Définition 4.3.16

(a) Si $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ est une fonction à valeurs scalaires, alors son laplacien est

$$\Delta f = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

(b) Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ est un champ de vecteurs, alors son laplacien est le champ de

[2] Pierre-Simon Laplace (1749-1827) était un mathématicien et astronome français. Il est également le Laplace de l'équation de Laplace, de la transformée de Laplace et de l'estimateur de Laplace-Bayes. Il fut l'examinateur de Napoléon lorsque celui-ci fréquentait l'École militaire de Paris.

vecteurs

$$\Delta\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{F} = \frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial z^2} = (\Delta P)\,\mathbf{i} + (\Delta Q)\,\mathbf{j} + (\Delta R)\,\mathbf{k}.$$

Remarquons que le laplacien d'une fonction est une fonction, tandis que celui d'un champ est un champ, en contraste avec ce que les autres opérateurs font.

Les opérateurs gradient, divergence, rotationnel et laplacien héritent des propriétés de la dérivation, mais, pour nos nouveaux opérateurs, nous avons un grand nombre de propriétés. Nous en donnons une liste de certaines identités. Les preuves viendront plus tard, mais il sera utile d'avoir un aide-mémoire[3]. Dans ce qui suit, nous utilisons la couleur bleue pour les identités qui sont souvent utilisées.

Théorème 4.3.17 Identités pour le gradient.

(a) $\boldsymbol{\nabla}(f+g) = \boldsymbol{\nabla}f + \boldsymbol{\nabla}g$

(b) $\boldsymbol{\nabla}(cf) = c\,\boldsymbol{\nabla}f$, *pour toute* constante c

(c) $\boldsymbol{\nabla}(fg) = (\boldsymbol{\nabla}f)g + f(\boldsymbol{\nabla}g)$

(d) $\boldsymbol{\nabla}(f/g) = (g\,\boldsymbol{\nabla}f - f\,\boldsymbol{\nabla}g)/g^2$ *aux points* $\mathbf{x}$ *où* $g(\mathbf{x}) \neq 0$

(e) Si $\mathbf{F}$ *et* $\mathbf{G}$ *sont deux champs de vecteurs, le gradient de la* fonction (à valeurs scalaires) $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ *est donné par*

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = \mathbf{F}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{G}) - (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\times\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F} + (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{G}.$$

Ici[a], $(\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F} = G_1\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} + G_2\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y} + G_3\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}$.

Théorème 4.3.18 Identités pour la divergence.

(a) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{G}$

(b) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(c\mathbf{F}) = c\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}$, *pour toute* constante c

(c) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{F}) = (\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\mathbf{F} + f\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}$

(d) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{G})$.

Théorème 4.3.19 Identités pour le rotationnel.

(a) $\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} + \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{G}$

(b) $\boldsymbol{\nabla}\times(c\mathbf{F}) = c\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$, *pour toute* constante c

(c) $\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{F}) = (\boldsymbol{\nabla}f)\times\mathbf{F} + f\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$

(d) $\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{G}) - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{G}$
Ici, $(\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F} = G_1\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} + G_2\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y} + G_3\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}$.

[3] Qui non seulement économise de l'espace, mais aide aussi à la compréhension.

[a] Il s'agit de la seule définition qui a du sens ; par exemple, $\mathbf{G}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{F})$ n'a pas de sens parce que nous ne pouvons pas calculer le gradient d'un champ.

Théorème 4.3.20 Identités pour le laplacien.

(a) $\boldsymbol{\nabla}^2(f+g) = \boldsymbol{\nabla}^2 f + \boldsymbol{\nabla}^2 g$

(b) $\boldsymbol{\nabla}^2(cf) = c\boldsymbol{\nabla}^2 f$, *pour toute* constante c

(c) $\boldsymbol{\nabla}^2(fg) = f\boldsymbol{\nabla}^2 g + 2\boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g + g\boldsymbol{\nabla}^2 f$

Théorème 4.3.21 Autres identités du deuxième ordre.

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = 0$ *(divergence d'un rotationnel, c'est la formule du théorème 4.3.12)*

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \mathbf{0}$ *(rotationnel d'un gradient, c'est la formule du théorème 4.3.6)*

(c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\{\boldsymbol{\nabla} g \times \boldsymbol{\nabla} h\}) = \boldsymbol{\nabla} f \cdot (\boldsymbol{\nabla} g \times \boldsymbol{\nabla} h)$

(d) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\boldsymbol{\nabla} g - g\boldsymbol{\nabla} f) = f\boldsymbol{\nabla}^2 g - g\boldsymbol{\nabla}^2 f$

(e) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{F}$ *(rotationnel d'un rotationnel)*

Aide-mémoire. La plupart des identités listées ci-haut (en fait toutes sauf l'identité (e) du théorème 4.3.17, l'identité (d) du théorème 4.3.19 et celles du théorème 4.3.21) sont faciles à imaginer. Il faut simplement combiner la linéarité, les règles des produits avec les faits suivants :

- si le terme de gauche est un vecteur (ou un scalaire), alors le terme de droite doit aussi être un vecteur (ou un scalaire) ;
- les seuls produits valables entre des vecteurs sont le produit scalaire et le produit vectoriel ;
- le produit d'un scalaire avec un scalaire ou un vecteur ne peut être ni un produit scalaire ni un produit vectoriel ;
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, le produit vectoriel est anticommutatif.

Par exemple, considérons l'identité (c) du théorème 4.3.18, qui dit que $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{F}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \mathbf{F} + f\,\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$.

- Le terme de gauche, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{F})$, est un scalaire, de sorte que celui de droite doit être un scalaire également.
- Le terme de gauche, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{F})$, est la dérivée du produit de f et $\mathbf{F}$, de sorte que, imitant la règle du produit, le terme de droite sera la somme de deux termes : l'un d'eux avec $\mathbf{F}$ multiplié par la « dérivée » de f, et un autre avec f multiplié par la « dérivée » de $\mathbf{F}$.
- La « dérivée » de f doit être $\boldsymbol{\nabla} f$, car $\boldsymbol{\nabla} \cdot f$ et $\boldsymbol{\nabla} \times f$ n'ont pas de sens. Pour obtenir un scalaire et non un vecteur, on doit prendre le produit scalaire de $\boldsymbol{\nabla} f$ et $\mathbf{F}$. Ainsi, le terme voulu est $(\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \mathbf{F}$.
- La « dérivée » de $\mathbf{F}$ doit être $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$ ou $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$. Nous avons aussi besoin de multiplier par le scalaire f pour obtenir un scalaire. Ainsi, la « dérivée » doit être un scalaire, c'est-à-dire $f\{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\}$.
- Notre intuition est donc $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{F}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \mathbf{F} + f\,\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$, qui est, heureusement, correcte.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Est-ce que $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ doit être orthogonal à $\mathbf{F}$?

2. Évaluer $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$ et $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ pour chacun des champs de vecteurs suivants.

(a) $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

(b) $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$.

(c) $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (le vecteur polaire de base $\hat{\mathbf{r}}$ en 2D)

(d) $\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (le vecteur polaire de base $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ en 2D)

3.

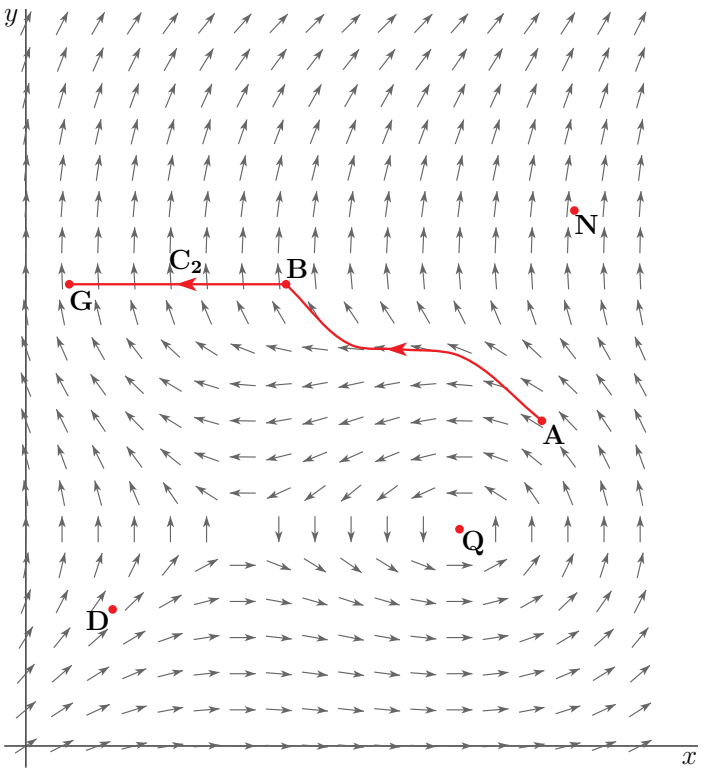
(a) Calculer et simplifier $\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ pour $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ et $r = \|\mathbf{r}\|$. Exprimer la réponse en termes de r.

(b) Calculer $\boldsymbol{\nabla} \times (yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k})$.

Pour mieux comprendre.

4.

Soit $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ le champ de vecteurs à deux dimensions montré ci-contre.



(a) En supposant que le champ vectoriel dans l'image est un champ de forces, le travail effectué par le champ vectoriel sur une particule se déplaçant du point A au point B le long du chemin donné est :

(A) positif ;
(B) négatif ;
(C) nul ;
(D) Pas assez d'information pour le déterminer.

(b) Quel énoncé est « le plus vrai » à propos de l'intégrale de ligne $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$?

(A) $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$.
(B) $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.
(C) $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} < 0$.
(D) Pas assez d'information pour le déterminer.

(c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$ au point N (dans la figure) est :

(A) positif ;
(B) négatif ;
(C) nul ;
(D) pas assez d'information pour le déterminer.

(d) $Q_x - P_y$ au point Q est :

(A) positif ;
(B) négatif ;
(C) nul ;
(D) pas assez d'information pour le déterminer.

(e) En supposant que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, lequel des énoncés suivants est correct à propos de $\frac{\partial P}{\partial x}$ au point D ?

(A) $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ en D.
(B) $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ en D.
(C) $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ en D.
(D) Le signe de $\frac{\partial P}{\partial x}$ en D ne peut être déterminé avec l'information donnée.

5. Vérifier les identités vectorielles suivantes.

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{F}) = f\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla} f$.

(b) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G})$.

(c) $\boldsymbol{\nabla}^2(fg) = f\,\boldsymbol{\nabla}^2 g + 2\boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g + g\,\boldsymbol{\nabla}^2 f$.

6. Dans ce qui suit, on utilise la notation $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = \|\mathbf{r}\|$, et k est un entier ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

(a) Trouver la valeur k pour laquelle $\boldsymbol{\nabla}(r^k) = -3\frac{\mathbf{r}}{r^5}$.

(b) Trouver la valeur k pour laquelle $\boldsymbol{\nabla} \cdot (r^k \mathbf{r}) = 5r^2$.

(c) Trouver la valeur k pour laquelle $\boldsymbol{\nabla}^2(r^k) = \frac{2}{r^4}$.

7. Soit $\mathbf{r}$ le champ de vecteurs $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ et soit r la fonction $r = \|\mathbf{r}\|$. Soit $\mathbf{a}$ le vecteur *constant* $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$. Calculer et simplifier les quantités suivantes. Les réponses doivent être exprimées en termes de $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}$ et r. Il ne devrait pas y avoir de x, y ou z dans les réponses.

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r}$.
(b) $\boldsymbol{\nabla}(r^2)$.
(c) $\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})$.
(d) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}(r))$.

8. Soit $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ et $r = \|\mathbf{r}\|$.

(a) Calculer a, où $\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -r^a\,\mathbf{r}$.

(b) Calculer a, où $\boldsymbol{\nabla} \cdot (r\,\mathbf{r}) = ar$.

(c) Calculer a, où $\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{\nabla}(r^3)\big) = ar$.

9. Trouver, si possible, un potentiel vectoriel $\mathbf{A}$ dont la troisième composante est nulle, c'est-à-dire de la forme $\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j}$, pour chacun des champs suivants.

(a) $\mathbf{F} = (1 + yz)\,\mathbf{i} + (2y + zx)\,\mathbf{j} + (3z^2 + xy)\,\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{G} = yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$

10. Soit

$$\mathbf{F} = \frac{-z}{x^2 + z^2}\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \frac{x}{x^2 + z^2}\,\mathbf{k}.$$

(a) Déterminer le domaine de $\mathbf{F}$.

(b) Déterminer le rotationnel de $\mathbf{F}$. Simplifier si possible.

(c) Déterminer la divergence de $\mathbf{F}$. Simplifier si possible.

(d) Est-ce que $\mathbf{F}$ est conservatif ? Donner une raison pour la réponse.

11. Un physicien étudie un champ de vecteurs $\mathbf{F}$ dans son laboratoire. Il sait, d'après des considérations théoriques, que $\mathbf{F}$ doit être de la forme $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, pour un certain champ de vecteurs lisse $\mathbf{G}$. Des expériences montrent également que $\mathbf{F}$ doit être de la forme

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz + xy)\mathbf{i} + \alpha(yz - xy)\mathbf{j} + \beta(yz + xz)\mathbf{k},$$

où α et β sont des constantes.

(a) Déterminer α et β.

(b) Des expériences supplémentaires montrent que

$$\mathbf{G} = xyz\,\mathbf{i} - xyz\,\mathbf{j} + g(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Trouver la fonction inconnue $g(x, y, z)$.

Pour aller plus loin.

12. Un corps rigide effectue une rotation à une vitesse angulaire de Ω rad/s autour d'un axe passant par l'origine et de direction $\hat{\mathbf{a}}$. Lorsqu'on se tient à la tête de $\hat{\mathbf{a}}$ en regardant vers l'origine, la rotation est en sens antihoraire. Soit $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{a}}$.

(a) Montrer que le vecteur vitesse d'un point $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ du corps est $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$.

(b) Évaluer $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ et $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$, en traitant $\boldsymbol{\Omega}$ comme une constante.

(c) Trouver la vitesse des personnes étudiantes dans une classe située à la latitude 49° N due à la rotation de la Terre. Ignorer les mouvements de la Terre autour du Soleil, du Soleil dans la Galaxie et ainsi de suite. Le rayon de la Terre est de 6378 km.

13. Supposer que le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ vérifie $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ au complet. Soit

$$\mathbf{r}(t) = tx\,\mathbf{i} + ty\,\mathbf{j} + tz\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

un paramétrage du segment allant de l'origine à (x, y, z). Définir

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \int_0^1 t\, \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\, dt.$$

Montrer que $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$ sur $\mathbb{R}^3$.

4.4 Champs conservatifs et indépendance de la trajectoire

Les champs de vecteurs ne sont pas tous créés de la même façon. En particulier, il y a des champs avec lesquels il est plus facile de travailler.

Les champs de vecteurs qui apparaissent comme gradients d'une fonction scalaire jouent un rôle crucial, tant dans les applications que dans la théorie.

Définition 4.4.1

Un champ $\mathbf{F}$ est dit **conservatif** sur une région $\mathcal{D}$ s'il existe une fonction f telle que $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ sur $\mathcal{D}$. Dans ce cas, on dit que f est une **fonction potentielle** pour $\mathbf{F}$.

Mise en garde 4.4.2

En physique, lorsqu'un champ est de la forme $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} f$, alors f est dite *fonction potentielle* pour $\mathbf{F}$: *notez* le signe dans $\mathbf{F} = \underset{\uparrow}{-}\boldsymbol{\nabla} f$.

Exemple 4.4.3 Énergie potentielle.

Le mot « conservatif » est là en allusion à la « conservation de l'énergie ». Imaginons que nous avons une particule de masse m qui bouge, soumise à un champ de forces $\mathbf{F}$ qui se trouve à être de la forme $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ pour une certaine fonction f. Si la position de la particule au temps t est $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, alors, en accord avec la loi de Newton,

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} = \mathbf{F} \qquad &\Longrightarrow \qquad m\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \mathbf{F}\left(x(t), y(t), z(t)\right) \\ &\Longrightarrow \qquad m\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \boldsymbol{\nabla} f\left(x(t), y(t), z(t)\right). \end{aligned}$$

On prend le produit scalaire des deux côtés avec $\mathbf{v}(t)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} m\,\mathbf{v}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) &= \mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\nabla} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \\ &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t), z(t)\right) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t), z(t)\right) \\ &\qquad + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}\left(x(t), y(t), z(t)\right). \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le fait que $\frac{d}{dt}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ainsi que la règle de dérivation des fonctions composées pour obtenir

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}m\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\Big)$$

$$\implies \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}m\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t) - f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\Big) = 0$$
$$\implies \qquad \frac{1}{2}m\left\|\mathbf{v}(t)\right\|^2 - f\left(x(t),y(t),z(t)\right) = \text{const.}$$

Ainsi, $\frac{1}{2}m\left\|\mathbf{v}(t)\right\|^2 - f\left(x(t),y(t),z(t)\right)$, qui est appelée l'énergie [a] de la particule au temps t, ne dépend pas du temps t : elle est conservée. Si nous appelons l'énergie initiale E, c'est-à-dire $E = \frac{1}{2}m\left\|\mathbf{v}(0)\right\|^2 - f\left(x(0),y(0),z(0)\right)$, alors $\frac{1}{2}m\left\|\mathbf{v}(t)\right\|^2 - f\left(x(t),y(t),z(t)\right) = E$ pour tout t, et, en particulier,

$$f\left(x(t),y(t),z(t)\right) = \frac{1}{2}m\left\|\mathbf{v}(t)\right\|^2 - E \geqslant -E,$$

de sorte que, même sans trouver $(x(t),\, y(t),\, z(t))$, nous savons que notre particule ne pourra pas quitter la région de l'espace $\left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ f(x,y,z) \geqslant -E\ \right\}$.

Exemple 4.4.4 Gravité.

La force gravitationnelle qu'un corps de masse M, situé à l'origine, exerce sur un corps de masse m situé à $\mathbf{r} = (x,y,z)$ est

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r},$$

où $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et où G est la constante gravitationnelle. La force est conservative, avec un potentiel $f(\mathbf{r}) = \frac{GMm}{r}$. En effet, on calcule

$$\frac{\partial}{\partial x}f(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2}\frac{GMm(2x)}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} = -\frac{GMm}{r^3}x,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2}\frac{GMm(2y)}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} = -\frac{GMm}{r^3}y,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}f(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2}\frac{GMm(2z)}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} = -\frac{GMm}{r^3}z.$$

Les exemples précédents contiennent le germe de l'idée de ce qu'on appelle le *théorème fondamental pour les intégrales de ligne*. Imaginons une randonnée en montagne, où l'altitude au point (x,y) est $f(x,y)$. Nous marchons sur la surface d'équation $z = f(x,y)$, au-dessus d'une courbe $\mathcal{C}$ du plan Oxy qui va de P_0 à P_1 (la projection du sentier sur le plan Oxy). Le vecteur $-\boldsymbol{\nabla} f$ pointe dans la direction de plus forte descente, c'est-à-dire la direction dans laquelle la gravité nous entraîne. Plus précisément, si $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ est un paramétrage de $\mathcal{C}$, notre position est $x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + f\big(x(t),y(t)\big)\,\mathbf{k}$, et le travail effectué par la force de gravité $-mg\,\mathbf{k}$ est

$$-mg\int \frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big)\,dt = -mg\big(f(P_1) - f(P_0)\big).$$

Ce travail ne dépend que de l'altitude des points de départ et d'arrivée, et non du sentier emprunté. Or, par la règle de dérivation des fonctions composées, $\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = \boldsymbol{\nabla} f\cdot\mathbf{r}'(t)$. Ce travail est donc l'intégrale de ligne du champ $-mg\,\boldsymbol{\nabla} f$ le long de $\mathcal{C}$. En termes d'intégrales de ligne, nous avons le résultat suivant, souvent appelé *théorème fondamental pour les intégrales de ligne*.

[a] $\frac{1}{2}m\left\|\mathbf{v}(t)\right\|^2$ est l'énergie cinétique, et $-f$ est l'énergie potentielle. Voir la mise en garde 4.4.2.

Théorème 4.4.5

Soit $\mathbf{F} = \nabla f$ un champ vectoriel conservatif de classe C^1 défini sur une région $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{C}$ est une courbe lisse par morceaux contenue dans $\mathcal{D}$ et allant de P_0 à P_1, nous avons

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(P_1) - f(P_0).$$

Ainsi, f joue le rôle des primitives pour l'évaluation des intégrales simples.

Démonstration. En effet, soit $\mathbf{r}$ un paramétrage de $\mathcal{C}$ avec $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ tel que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$ et $\mathbf{r}(t_1) = P_1$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_0}^{t_1} \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(f(\mathbf{r}(t))\right)\, dt \\ &= f(\mathbf{r}(t))\big|_{t=t_0}^{t=t_1} = f(\mathbf{r}(t_1)) - f(\mathbf{r}(t_0)) = f(P_1) - f(P_0),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de dérivation des fonctions composées et le théorème fondamental du calcul intégral. ■

Remarquons que, dans le théorème 4.4.5, la valeur $f(P_1) - f(P_0)$ dans $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dépend seulement de P_0 et P_1, pas du chemin choisi. Nous allons voir plus tard, dans le théorème 4.4.7, que ceci a lieu seulement pour les champs vectoriels conservatifs. Dans la section précédente, nous avons vu plusieurs exemples de champs vectoriels qui ne sont pas conservatifs. Le champ de l'exemple 4.2.11 donne des intégrales dont la valeur dépend du chemin choisi, et celui de l'exemple 4.2.12 donne une intégrale non nulle le long d'une courbe fermée ; ils ne sont donc pas des champs conservatifs.

Ceci nous mène à la question suivante. Soit $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs. Quand est-ce que, pour deux points fixes P_0 et P_1, les intégrales

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pour toutes les courbes (lisses par morceaux) $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ qui vont de P_0 vers P_1 ? Quand pouvons-nous faire fi de la trajectoire empruntée ? Dans ce cas, nous dirons que « $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ est indépendante de la trajectoire » et nous écrirons

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pour toute courbe $\mathcal{C}$ de P_0 à P_1. La suite de cette section est consacrée à la relation très étroite qui existe entre l'indépendance de la trajectoire et le fait qu'un champ soit conservatif ou pas. C'est ce que nous verrons au théorème 4.4.7.

Pour simplifier le problème, nous allons commencer par considérer des champs de vecteurs qui sont continus dans tout $\mathbb{R}^2$ ou tout $\mathbb{R}^3$.

Pour commencer, nous montrons que, s'il existe une paire de points (pas nécessairement distincts !) P_0, P_1 tels que

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pour toutes les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ allant de P_0 vers P_1, alors ceci est aussi vrai pour *n'importe quelle paire de points* P_0', P_1' :

$$\int_{\mathcal{C}_1'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pour toutes les courbes $\mathcal{C}_1'$, $\mathcal{C}_2'$ qui commencent à P_0' et qui terminent à P_1'. Ceci pourrait paraître invraisemblable à première vue, mais l'idée de la preuve est plutôt claire.

Théorème 4.4.6

Soit $\mathbf{F}$ *un champ de vecteurs défini et continu sur* $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*). Soit* P_0, P_1, P_0', P_1' *quatre points quelconques dans* $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*). Supposons que*

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pour toute paire de courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *qui vont de* P_0 *à* P_1*. Alors,*

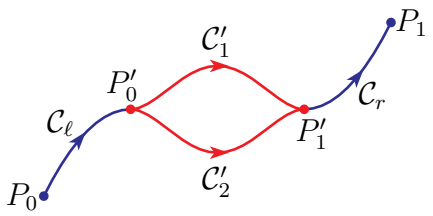
$$\int_{\mathcal{C}_1'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pour toute paire de courbes $\mathcal{C}_1'$, $\mathcal{C}_2'$ *qui vont de* P_0' *à* P_1'*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}_1'$ et $\mathcal{C}_2'$ deux courbes quelconques qui commencent à P_0' et qui finissent à P_1'.

On commence par choisir deux courbes auxiliaires :

- $\mathcal{C}_\ell$ qui va de P_0 à P_0' ;
- $\mathcal{C}_r$ qui va de P_1' à P_1.



Puis, on définit les courbes :

- $\mathcal{C}_1$ comme étant $\mathcal{C}_\ell$ suivie de $\mathcal{C}_1'$ puis suivie de $\mathcal{C}_r$;
- $\mathcal{C}_2$ comme étant $\mathcal{C}_\ell$ suivie de $\mathcal{C}_2'$ puis suivie de $\mathcal{C}_r$.

Alors, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ commencent à P_0 et finissent à P_1, de sorte que, par hypothèse,

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

et, en vertu de la construction de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{C}_\ell} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_1'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_\ell} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ \Longrightarrow\ &\int_{\mathcal{C}_1'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

comme on le voulait. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 4.4.7

Soit $\mathbf{F}$ *un champ de vecteurs défini sur* $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*). Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathbf{F}$ *est conservatif, c'est-à-dire qu'il existe une fonction* f *telle que* $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$*.*

(b) On a $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *pour toute courbe fermée* $\mathcal{C}$.

(c) La valeur de $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *est indépendante de la trajectoire, c'est-à-dire que pour toute paire de points* P_0, P_1, *on a* $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *pour toute paire de courbes* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *qui vont de* P_0 *à* P_1.

Démonstration. Il suffit de montrer que :

- (a) entraîne (b) ;
- (b) entraîne (c) ;
- (c) entraîne (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b) : Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée qui commence et se termine à P_0. Alors, en vertu du théorème 4.4.5 avec $P_1 = P_0$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(P_0) - f(P_0) = 0.$$

(b) $\Longrightarrow$ (c) : Choisissons P_0 un point quelconque, et soit $P_1 = P_0$. Nous supposons donc que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ pour toutes les courbes qui commencent à P_0 et qui finissent à P_1. En particulier, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ prend la même valeur sur toutes les courbes qui commencent à P_0 et qui se terminent à P_1. Ainsi, le théorème 4.4.6 donne immédiatement la propriété (c).

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Nous voulons montrer que $\mathbf{F}$ est conservatif. Nous commençons par exhiber un candidat pour la fonction potentielle, f, et nous montrerons que nous avons effectivement $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$. Notre choix de candidat f est motivé par le théorème 4.4.5. Si $\mathbf{F}$ est vraiment conservatif, son potentiel devra vérifier $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(P_1) - f(P_0)$ pour toute courbe $\mathcal{C}$ qui démarre à P_0 et qui finit à P_1. Choisissons $P_0 = \mathbf{0}$. Il est immédiat, de la définition 4.4.1, que l'ajout d'une constante à un potentiel donne toujours un potentiel. On peut donc choisir $f(\mathbf{0}) = 0$. Alors, $f(P_1) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pour toute courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbf{0}$ à P_1. Ainsi, on définit, pour tout $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pour toute courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbf{0}$ à $\mathbf{x}$. Cette définition est correcte, puisque l'hypothèse (c) nous dit exactement que la valeur de l'intégrale est indépendante de la trajectoire.

Vérifions à présent que f vérifie effectivement $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$. Choisissons un point arbitraire $\mathbf{x}$ et une courbe $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ allant de l'origine à $\mathbf{x}$. Pour n'importe quel vecteur unitaire $\mathbf{u}$, soit $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}$ la courbe paramétrée par

$$\mathbf{r}_{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{u} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Il s'agit d'un segment de droite qui quitte $\mathbf{x}$ à $t = 0$ et qui finit à $\mathbf{x} + \mathbf{u}$ lorsque $t = 1$. Remarquons que $\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}$. Par ailleurs, par hypothèse, nous avons $f(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pour *toute courbe* $\mathcal{C}$ qui va de $\mathbf{0}$ à $\mathbf{x} + s\mathbf{u}$. Ainsi, pour tout réel s, nous avons

$$f(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{x}} + \mathcal{D}_{s\mathbf{u}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

où la notation $\mathcal{C}_{\mathbf{x}} + \mathcal{D}_{s\mathbf{u}}$ désigne la courbe qui suit $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ de l'origine à $\mathbf{x}$, puis qui suit $\mathcal{D}_{s\mathbf{u}}$ de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{x} + s\mathbf{u}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{x}} + \mathcal{D}_{s\mathbf{u}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{D}_{s\mathbf{u}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x} + ts\mathbf{u}) \cdot (s\mathbf{u})\, dt. \end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale, nous faisons le changement de variables $\tau = ts$, $d\tau = s dt$. Ceci donne

$$f(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_0^s \mathbf{F}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}\, d\tau.$$

Le théorème fondamental du calcul, appliqué à la seconde intégrale, donne

$$\frac{d}{ds} f(\mathbf{x}+s\mathbf{u})\Big|_{s=0} = \mathbf{F}(\mathbf{x}+s\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\Big|_{s=0} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}.$$

On applique ceci avec les vecteurs $\mathbf{u}=\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$, ce qui donne

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}),\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}),\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\Big) = \left(\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{i},\ \mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{j},\ \mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{k}\right),$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

comme on le voulait. ■

Le théorème 4.4.5 fournit une méthode pour calculer une intégrale de ligne lorsque le champ est conservatif : il suffit d'évaluer la fonction potentielle aux extrémités du chemin.

Exemple 4.4.8

Vérifier que $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$ est une fonction potentielle pour $\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ et déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}$ est une courbe lisse allant de $(1,0)$ à $(0,1)$.

Solution. En effet, un calcul direct donne

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j} = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} = \mathbf{F}(x,y).$$

En vertu du théorème 4.4.5, nous n'avons même pas besoin de connaître la trajectoire $\mathcal{C}$ pour calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\nabla} f\cdot d\mathbf{r} = f(0,1) - f(1,0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Nous avons vu au théorème 4.3.6 que les champs gradients (donc conservatifs) sont irrotationnels. Il est temps d'étudier une réciproque partielle de ce résultat.

Théorème 4.4.9

Soit $\mathbf{F}$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*). Alors,* $\mathbf{F}$ *est conservatif si et seulement si* $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$*, c'est-à-dire si et seulement si* $\mathbf{F}$ *est* irrotationnel.

Démonstration. Nous donnons la preuve pour les champs définis sur $\mathbb{R}^2$. La preuve pour $\mathbb{R}^3$ est similaire.

Le théorème de Clairaut permet, comme à l'exemple 4.1.11, de montrer que si $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$, alors on a $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Supposons donc que $\mathbf{F}$ vérifie $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ sur *tout le plan* $\mathbb{R}^2$ et montrons que le champ est conservatif. Nous le ferons en utilisant la stratégie de notre exemple 4.1.11 pour construire une fonction potentielle f, c'est-à-dire f vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}$ traite y comme une constante, de sorte que $f(x,y)$ vérifie la première

équation si et seulement s'il existe une fonction $\psi(y)$ telle que

$$f(x,y) = \int_0^x P(X,y)\,dX \;+\; \psi(y).$$

Cette fonction $f(x,y)$ satisfait aussi la seconde équation si et seulement si

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int_0^x P(X,y)\,dX \;+\; \psi(y)\Big) \\ &= \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(X,y)\,dX \;+\; \psi'(y). \end{aligned}$$

Ainsi, nous devons trouver une fonction $\psi(y)$ vérifiant

$$\psi'(y) = Q(x,y) - \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(X,y)\,dX.$$

Ça ne s'annonce pas bien : peu importe ce que $\psi(y)$ est, le terme de gauche est indépendant de x, tandis qu'il semblerait que le terme de droite dépende de x. Heureusement, nous pouvons utiliser l'hypothèse fournie par le test de dépistage :

$$\begin{aligned} Q(x,y) - \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(X,y)\,dX &= Q(x,y) - \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(X,y)\,dX \\ &= Q(x,y) - Q(X,y)\Big|_{X=0}^{X=x} \\ &= Q(0,y). \end{aligned}$$

En passant de la première ligne à la deuxième, nous avons utilisé le théorème fondamental du calcul. Ainsi, on peut choisir

$$\psi(y) = \int_0^y Q(0,Y)\,dY + C$$

pour n'importe quelle constante C, et le tour sera joué. ■

Exemple 4.4.10

Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \sin y\,dx + (x\cos y - \sin y)\,dy$, où $\mathcal{C}$ est le chemin de $(1,0)$ à $(0,1)$ suivant la portion du cercle $x^2+y^2=1$ du premier quadrant.

Solution. Posons $P(x,y) = \sin y$ et $Q(x,y) = x\cos y - \sin y$.

Si le champ $\mathbf{F}$ était conservatif, nous devrions avoir une fonction f telle que $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$, de sorte que notre champ serait un champ gradient et donc (la composante $\mathbf{k}$ de) son rotationnel devrait être $\mathbf{0}$.

On calcule directement

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \cos y = 0.$$

À ce stade-ci, nous savons que notre champ $\mathbf{F}$ passe le test de dépistage pour les champs conservatifs. Afin de calculer l'intégrale de ligne qui nous intéresse, il nous faut plus que ça : nous devons connaître une fonction potentielle. On cherche donc une fonction f vérifiant

$$f_x(x,y) = P(x,y) = \sin y \qquad \text{et} \qquad f_y(x,y) = Q(x,y) = x\cos y - \sin y.$$

En intégrant la première de ces égalités par rapport à x, on obtient

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)\,dx = \int \sin y\,dx = x\sin y + \phi(y).$$

En effet, il faut noter que, lorsqu'on intègre par rapport à x, il faut ajouter la « constante d'intégration ». Ici, « constante » veut dire « constante par rapport à x », il peut donc s'agir d'une fonction de la variable y.

Par ailleurs, on a aussi

$$Q(x,y) = f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\sin y + \phi(y)\right),$$

ce qui donne directement $x\cos y - \sin y = x\cos y + \frac{\partial \phi}{\partial y}$, d'où

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\sin y.$$

Il suffit alors de choisir $\phi(y) = \cos y + K$, ce qui mène à

$$f(x,y) = x\sin y + \cos y + K.$$

La valeur de l'intégrale de ligne est donc

$$\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\mathbf{r} = f(0,1) - f(1,0) = \cos 1 - 1.$$

Remarquons que le calcul de l'intégrale de ligne selon la définition aurait mené, avec le paramétrage usuel du cercle, $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ avec $t \in [0, \pi/2]$, à l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy &= \int_{\mathcal{C}} \sin y\,dx + (x\cos y - \sin y)\;dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin y(t)\;x'(t) + [x(t)\cos(y(t)) - \sin y(t)]\,y'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(\sin t)(-\sin(t)) \\
&\qquad + [(\cos t)\cos(\sin t) - \sin(\sin t)]\cos t\,dt,
\end{aligned}$$

qui n'est pas particulièrement invitante.

Dans cet exemple, on aurait pu commencer en intégrant par rapport à y, c'est-à-dire en partant de

$$f_y(x,y) = x\cos y - \sin y,$$

pour obtenir

$$f(x,y) = \int (x\cos y - \sin y)\,dy = x\sin y + \cos y + \psi(x).$$

Le résultat aurait été le même.

Exemple 4.4.11

Calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{\mathcal{C}} (2xy - z^2)\,dx + (x^2 + 2z)\,dy + (2y - 2xz)\,dz,$$

où $\mathcal{C}$ est une courbe lisse allant de $(0, 1, 1)$ à $(2, 2, 4)$.

Solution. Posons pour commencer

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} = (2xy - z^2)\,\mathbf{i} + (x^2 + 2z)\,\mathbf{j} + (2y - 2xz)\,\mathbf{k}$$

et remarquons que toutes les composantes de notre champ sont continues sur tout $\mathbb{R}^3$.

On calcule alors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{vmatrix} &= (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k} \\ &= (2-2)\mathbf{i} + (-2z - (-2z))\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Ceci montre que le champ est conservatif. Trouvons maintenant une fonction potentielle f. Une telle fonction doit vérifier $f_x = P = 2xy - z^2$.

Nous intégrons par rapport à la variable x pour obtenir

$$f = \int f_x\,dx = \int (2xy - z^2)\,dx = yx^2 - xz^2 + \phi(y, z),$$

où ϕ est la *constante d'intégration*. Mais c'est une constante par rapport à x, il s'agit donc d'une quantité qui peut varier en fonction de y et z. Afin de la trouver, on dérive par rapport à y :

$$x^2 + 2z = Q = f_y = x^2 + \phi_y(y, z),$$

ce qui donne directement $2z = \phi_y$. Après intégration par rapport à y, nous trouvons

$$\phi(y, z) = \int \phi_y(y, z)\,dy = \int 2z\,dy = 2yz + \psi(z),$$

où ψ est une fonction de la variable z seulement.

À ce stade-ci, nous pouvons donc écrire

$$f(x, y, z) = yx^2 - xz^2 + 2yz + \psi(z).$$

Afin de trouver ψ, dérivons par rapport à z, ce qui donne

$$2y - 2xz = R = f_z = -2xz + 2y + \psi'(z),$$

et nous concluons que $\psi'(z) = 0$, d'où $\psi(z) = K$. Ainsi, toute fonction de la forme

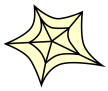
$$f(x, y, z) = yx^2 - xz^2 + 2yz + K \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

est une fonction potentielle pour $\mathbf{F}$.

L'intégrale de ligne qui nous intéresse est alors

$$I = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\mathbf{r} = f(2, 2, 4) - f(0, 1, 1) = -8 - 2 = -10.$$

À vous de jouer 4.4.12

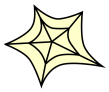


Pour chacun des champs de vecteurs $\boldsymbol{F}$ suivants, déterminez s'il est conservatif ou non en calculant les dérivées partielles du premier ordre appropriées. Donnez une fonction potentielle f (c'est-à-dire $\nabla f = \mathbf{F}$) telle que $f(0,0) = 0$. S'il n'est pas conservatif, écrivez N.

A. $\mathbf{F}(x,y) = (-14x + 4y)\,\mathbf{i} + (4x + 4y)\,\mathbf{j}$
$f(x,y) =$ _____
B. $\mathbf{F}(x,y) = -7y\mathbf{i} - 6x\mathbf{j}$
$f(x,y) =$ _____
C. $\mathbf{F}(x,y) = (-7\sin y)\,\mathbf{i} + (8y - 7x\cos y)\,\mathbf{j}$
$f(x,y) =$ _____

Note : vos réponses doivent être des expressions en x et y (par exemple « 3xy + 2y »), ou la lettre « N ».

À vous de jouer 4.4.13



Lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f\,dx + g\,dy$ est indépendante de la trajectoire, et $\mathcal{C}$ est une courbe allant d'un point A à un point B, il est commun d'écrire $\displaystyle\int_A^B f\,dx + g\,dy$ pour $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f\,dx + g\,dy$.

Montrez que $\displaystyle\int_{(-6,-2)}^{(1,5)} f\,dx + g\,dy = \int_{(-6,-2)}^{(1,5)} 36x^3y^5\,dx + 45y^4x^4\,dy$ est indépendante de la trajectoire.

$\frac{\partial f}{\partial y} =$ _____
$\frac{\partial g}{\partial x} =$ _____
$\displaystyle\int_{(-6,-2)}^{(1,5)} 36x^3y^5\,dx + 45y^4x^4\,dy =$ _____

Mise en garde 4.4.14

Il faut noter que, dans le théorème 4.4.9, l'hypothèse de base est que $\mathbf{F}$ passe le « test de dépistage » *sur tout* $\mathbb{R}^2$ *ou sur tout* $\mathbb{R}^3$. L'exemple suivant, un grand classique, montre que si le champ n'est pas continu en ne serait-ce qu'un point, les conclusions ne tiennent plus.

Exemple 4.4.15 Un champ irrotationnel mais non conservatif.

Soit le champ de vecteurs défini, pour $(x,y) \neq (0,0)$, par

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}.$$

Le champ est représenté dans la figure ci-contre.

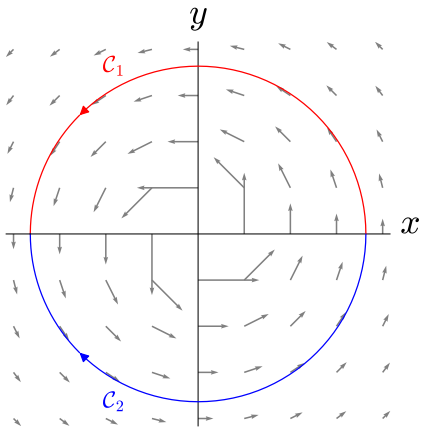


Figure 4.4.16 Un champ irrotationnel non conservatif

(a) Montrer que $\mathbf{F}$ est irrotationnel.

(b) Calculer les intégrales de ligne $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ et $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont respectivement les trajectoires de $(1,0)$ à $(-1,0)$ suivant les moitiés supérieure et inférieure du cercle $x^2+y^2=1$.

(c) Construire une fonction potentielle pour $\mathbf{F}$ et identifier pourquoi on ne peut l'utiliser pour calculer les intégrales de ligne de la partie (b).

Solution.

(a) Posons $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, où $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et où $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Calculons le rotationnel de $\mathbf{F}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = \frac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

On a donc l'égalité $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

(b) Notons d'abord que la figure de l'énoncé nous laisse présager que l'intégrale suivant $\mathcal{C}_1$ sera positive, tandis que celle suivant $\mathcal{C}_2$ sera négative, de par la façon dont le champ de vecteurs est orienté : il a tendance à tourner toujours dans le sens antihoraire.

Nous présentons les calculs détaillés pour l'intégrale le long de $\mathcal{C}_1$.

- La courbe $\mathcal{C}_1$ est paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} = (\cos t)\,\mathbf{i} + (\sin t)\,\mathbf{j}$, avec $t \in [0,\pi]$. Nous calculons alors

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} = -y(t)\,\mathbf{i} + x(t)\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \frac{-y(t)}{x(t)^2+y(t)^2}\mathbf{i} + \frac{x(t)}{x(t)^2+y(t)^2}\mathbf{j} = -y(t)\,\mathbf{i} + x(t)\,\mathbf{j},$$

où nous avons utilisé que $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$. Par la suite, afin d'alléger l'écriture, écrivons x et y à la place de $x(t)$ et $y(t)$. Ainsi, sur $\mathcal{C}_1$, nous avons

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})\cdot(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = y^2 + x^2 = 1,$$

de sorte que $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi dt = \pi$.

- La courbe $\mathcal{C}_2$, pour sa part, est paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} = (\cos t)\,\mathbf{i} - (\sin t)\,\mathbf{j}$, avec $t \in [0, \pi]$. Cette fois, nous avons $y(t) = -\sin t$. Un calcul en tout point semblable à celui fait pour $\mathcal{C}_1$ mène à $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = -1$, de sorte que $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_0^\pi dt = -\pi$.

(c) Pour que $\mathbf{F}$ soit conservatif sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il doit y exister une fonction $f(x,y)$ telle que f ainsi que ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont définies pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, sauf à $(x,y) = (0,0)$, et vérifiant de plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\arctan\frac{y}{x}\Big),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \quad\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\arctan\frac{y}{x}\Big),$$

en vertu de la règle de dérivation des fonctions composées, puisque

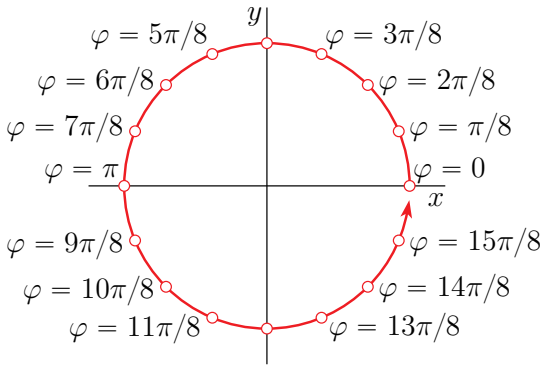
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x}\Big) = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{x}.$$

Il semblerait que nous ayons trouvé une fonction potentielle pour $\mathbf{F}$, à savoir $\arctan\frac{y}{x}$. Mais il y a un problème. Rappelons que, par définition, $\arctan\frac{y}{x}$ est un angle $\theta(x,y)$ qui vérifie $\tan\theta(x,y) = \frac{y}{x}$. Mais, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il y a une infinité de tels angles. Pour définir $f(x,y)$, nous devons choisir un tel angle, et ce, de façon continue. C'est précisément la continuité dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui pose problème.

Pour le voir, fixons un $r > 0$ et imaginons que nous nous promenons sur le cercle $x^2+y^2 = r^2$. Au temps θ, nous sommes au point $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ puis $\frac{y}{x} = \tan\theta$, et nous pouvons définir $f(x,y) = \theta + k\pi$ pour n'importe quelle valeur entière de k.

Supposons que, au temps $\theta = 0$, nous choisissons $k = 0$, c'est-à-dire que nous posons $f(r,0) = 0$. Nous commençons à nous déplacer, choisissant à chaque fois une valeur permise de $f(x,y)$, c'est-à-dire en choisissant une valeur de k pour chaque point (x,y) que nous parcourons. Puisque $f(x,y)$ doit changer de façon continue par rapport à (x,y), nous devons choisir $k = 0$. Mais nous rencontrerons un problème lorsque θ approchera 2π, car alors :

- nous nous approchons de $(r,0)$ par en bas comme dans la figure ci-contre, et
- puisque nous choisissons $k = 0$, $f(x,y)$ doit être tout juste un peu moins que 2π, mais
- nous avons déjà choisi $f(r,0) = 0$, pas $f(r,0) = 2\pi$. Ainsi, $f(x,y)$ a une discontinuité le long de l'axe Ox positif.



Exercices

Pour se pratiquer.

1. Pour chacun des champs suivants, déterminer laquelle des affirmations suivantes s'applique :

A. Le test de dépistage pour les champs vectoriels conservatifs nous dit que $\mathbf{F}$ est conservatif.

B. Le test de dépistage pour les champs vectoriels conservatifs nous dit que $\mathbf{F}$ ***n'est pas*** conservatif

C. Le test de dépistage pour les champs vectoriels conservatifs ne nous dit pas si $\mathbf{F}$ est conservatif ou non.

(Le test de dépistage est le théorème 4.4.9.)

(a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.

(b) $\mathbf{F} = y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$.

(c) $\mathbf{F} = (ye^{xy} + 1)\mathbf{i} + (xe^{xy} + z)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{z} + y\right)\mathbf{k}$.

(d) $\mathbf{F} = y\cos(xy)\mathbf{i} + x\sin(xy)\mathbf{j}$.

2. **Évaluation d'intégrales de ligne.** Évaluer les intégrales $\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ de deux façons :

(1) Avec un paramétrage de $\mathcal{C}$ et l'évaluation directe de l'intégrale de ligne ;

(2) Au moyen du théorème fondamental pour les intégrales de ligne.

Faire ceci pour les fonctions et courbes suivantes.

(a) $f(x, y) = xy$; $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

(b) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$; $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

(c) $f(x, y) = x + 3y$; $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t) = (2 - t, t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2$.

(d) $f(x, y, z) = x + y + z$; $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t/\pi)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

(e) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$; $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/\pi)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(f) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$; $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t) = (t, 2t, 3t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 4$.

3. Supposer que $\mathbf{F}$ est conservatif et soit a, b et c des constantes. Trouver un potentiel pour $\mathbf{F} + (a, b, c)$, OU donner un champ conservatif $\mathbf{F}$ et des constantes a, b, et c pour lesquelles $\mathbf{F} + (a, b, c)$ n'est pas conservatif.

4. Montrer que chacune des intégrales de ligne suivantes est indépendante de la tajectoire, puis donner la valeur de l'intégrale

(a) $\int_{\mathcal{C}} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$ où $\mathcal{C}$ est une courbe allant de $(0, 0, 0)$ à $(2, -3, 6)$.

(b) $\int_{\mathcal{C}} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ où $\mathcal{C}$ est une courbe allant de $(1, 2, 3)$ à $(3, 5, 0)$.

(c) $\int_{\mathcal{C}} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$ où $\mathcal{C}$ est une courbe allant de $(0, 0, 0)$ à $(2, -3, 6)$.

(d) $\int_{\mathcal{C}} 2xy\,dx + (x^2 - z^2)\,dy + -2yz\,dz$ où $\mathcal{C}$ est une courbe allant de $(0, 0, 0)$ à $(1, 2, 3)$.

(e) $\int_{\mathcal{C}} 2x\,dx - y^2\,dy - \frac{4}{1+z^2}\,dz$ où $\mathcal{C}$ est une courbe allant de $(0, 0, 0)$ à $(0, 0, 1)$.

(f) $\int_{\mathcal{C}} \sin x \cos y\,dx + \cos x \sin y\,dy + dz$ où $\mathcal{C}$ est une courbe allant de $(1, 0, 0)$ à $(0, 1, 1)$.

5. Prouver (ou trouver un contre-exemple pour) chacun des énoncés suivants.

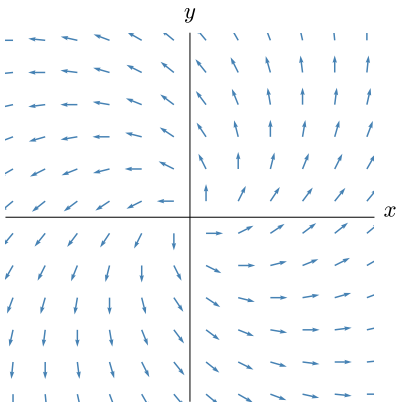
(a) Si $\mathbf{F}$ est un champ conservatif et $\mathbf{G}$ est un champ non conservatif, alors $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ est non conservatif.

(b) Si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont des champs non conservatifs, alors $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ est non conservatif.

(c) Si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont des champs conservatifs, alors $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ est conservatif.

6. L'allure des champs conservatifs.

Le champ vectoriel représenté dans la figure ci-contre est-il conservatif ou pas ? Justifiez.



Pour mieux comprendre.

7. Soit D le domaine consistant en tous les (x,y) vérifiant $x>1$, et soit $\mathbf{F}$ le champ de vecteurs $\mathbf{F}=-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$. Est-ce que $\mathbf{F}$ est conservatif sur D ? Expliquer.

8. Trouver un potentiel φ pour $\mathbf{F}(x,y)=(x+y)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$, ou prouver qu'il n'en existe pas.

9. Trouver un potentiel φ pour $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{x}{y^2}\right)\mathbf{j}$, ou montrer qu'il n'en existe pas.

10. Trouver un potentiel φ pour $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(x^2yz+xz\right)\mathbf{i}+\left(\frac{1}{3}x^3z+y\right)\mathbf{j}+\left(\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{2}x^2+y\right)\mathbf{k}$, ou montrer qu'il n'en existe pas.

11. Trouver un potentiel φ pour

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathbf{k},$$

ou montrer qu'il n'en existe pas.

12. Déterminer si les champs de vecteurs suivants sont conservatifs ou non. Trouver le potentiel le cas échéant.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$.

(b) $\mathbf{F}(x,y)=\frac{x\mathbf{i}-y\mathbf{j}}{x^2+y^2}$.

13. Soit $\mathbf{F}=e^{(z^2)}\,\mathbf{i}+2Byz^3\,\mathbf{j}+\left(Axze^{(z^2)}+3By^2z^2\right)\,\mathbf{k}$.

(a) Pour quelles valeurs des constantes A et B est-ce que le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^3$?

(b) Si A et B prennent les valeurs trouvées en (a), trouver un potentiel pour $\mathbf{F}$.

14. Pour des fonctions différentiables à valeurs réelles $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit

$$\mathbf{F} = 2f(x)f'(x)\mathbf{i} + g'(y)h(z)\mathbf{j} + g(y)h'(z)\mathbf{k}.$$

Vérifier que $\mathbf{F}$ est conservatif.

15. Une décomposition utile. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{F}(x, y) = \left(x + \cos y^2\right)\mathbf{i} + \left(x - 2xy \sin y^2\right)\mathbf{j}$. Décomposez le champ sous la forme $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$ avec $\mathbf{G}$ conservatif, puis calculez la valeur de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ où $\mathcal{C}$ est le segment de droite de $(0, 0)$ à $(1, 1)$.

4.5 Le théorème de Green

Dans cette section, nous verrons le théorème de Green, formulé de deux façons différentes. Il fait le lien entre les intégrales de flux d'un champ de vecteurs et l'intégrale double du rotationnel ou de la divergence de celui-ci. Il s'agit d'une version du théorème fondamental du calcul intégral pour les champs de vecteurs.

Plus précisément, le théorème de Green, dans sa forme tangentielle, stipule que le flux d'un champ $\mathbf{F}$ le long d'une courbe fermée (et simple) $\mathcal{C}$ est égal à l'intégrale double du rotationnel de $\mathbf{F}$ sur la région $\mathcal{R}$ limitée par $\mathcal{C}$. Bien entendu, certaines hypothèses sont nécessaires, tant au sujet du champ de vecteurs que de la région $\mathcal{R}$ et de sa frontière $\mathcal{C}$.

Par ailleurs, la version normale du théorème de Green dit que le flux de $\mathbf{F}$ à travers une courbe $\mathcal{C}$ est donné par l'intégrale double de la divergence de ce champ sur la région $\mathcal{R}$ limitée par $\mathcal{C}$.

Compléments sur les courbes

Afin d'énoncer le théorème de Green, dans ses deux versions, nous devons donner quelques compléments d'information au sujet des courbes et des régions qu'elles délimitent.

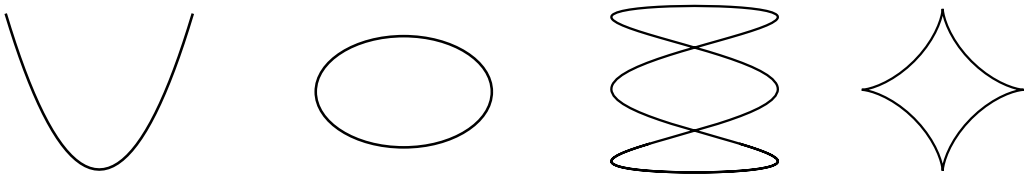
Définition 4.5.1

(a) Une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est dite **fermée** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

(b) Rappelons (définition 1.5.3) que la courbe $\mathcal{C}$ est **simple** si son paramétrage est injectif sur $[a, b[$, c'est-à-dire si elle ne se coupe pas elle-même, sauf peut-être aux extrémités.

(c) Rappelons aussi (définition 4.2.1) que la courbe $\mathcal{C}$ est **lisse par morceaux** si son paramétrage est continu et lisse sur chacun des intervalles d'une subdivision finie de $[a, b]$.

Voici quelques exemples.



courbe simple — courbe simple fermée — n'est pas une courbe simple — courbe lisse par morceaux

Si $\mathcal{C}$ est une courbe fermée et simple, la région bornée qu'elle délimite, disons $\mathcal{R}$, admet pour frontière justement la courbe $\mathcal{C}$, et nous écrirons $\mathcal{C} = \partial\mathcal{R}$. Le symbole de dérivée partielle est utilisé pour désigner la frontière. Nous avons besoin d'orienter la frontière de la région $\mathcal{R}$, c'est-à-dire de donner un sens de parcours. Par convention, une courbe fermée simple sera *orientée positivement* si elle est parcourue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ceci revient à dire que lorsqu'on parcourt la courbe $\mathcal{C}$, la région $\mathcal{R}$ se trouve à gauche.

Finalement, notons que si $\mathcal{C} = \partial\mathcal{R}$, il est habituel d'écrire

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

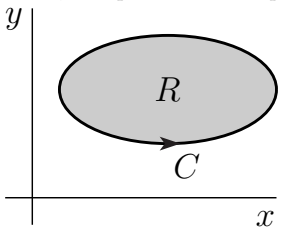
pour l'intégrale de $\mathbf{F}$ sur le bord de $\mathcal{R}$ (une réunion de courbes !) orienté positivement.

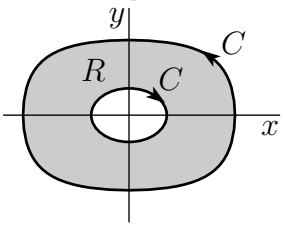
Le théorème de Green

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Green.

Théorème 4.5.2 Théorème de Green, forme tangentielle.

Soit $\mathcal{R}$ une région bornée du plan telle que la frontière $\partial\mathcal{R}$ consiste en un nombre fini de courbes fermées, simples et lisses par morceaux, avec l'orientation positive.





Si $\mathbf{F}(x,y)$ est défini et de classe C^1 sur $\mathcal{R}$, alors

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{R}} rot\mathbf{F}\, dA.$$

Démonstration. Nous nous contenterons de faire une démonstration pour les régions $\mathcal{R}$ dont le bord $\partial\mathcal{R}$ est une courbe simple, lisse par morceaux, et ayant en plus la propriété que $\mathcal{R}$ peut s'exprimer sous les deux formes suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\ \} \\ &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\ \}\end{aligned}$$

pour certaines fonctions ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2. L'exemple 4.5.9 montre comment procéder lorsque le bord de $\mathcal{R}$ est formé de plusieurs courbes ou que $\mathcal{R}$ ne s'exprime pas sous les formes requises.

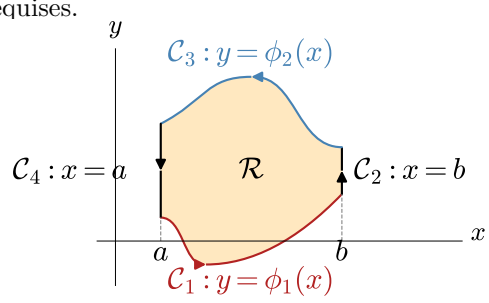


Figure 4.5.3

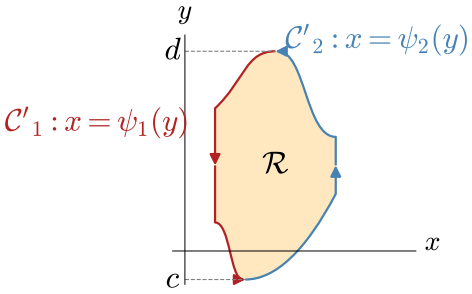


Figure 4.5.4

Dans un premier temps, nous montrerons que

$$\int_{\partial\mathcal{R}} P\,dx = -\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dA. \tag{$*$}$$

En effet, il suit de la description de $\mathcal{R}$ que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dA &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \big[P(x,\phi_2(x)) - P(x,\phi_1(x))\big]\,dx \\ &= \int_a^b P(x,\phi_2(x))\,dx - \int_a^b P(x,\phi_1(x))\,dx.\end{aligned}$$

Or, le bord supérieur de $\mathcal{R}$, la courbe $\mathcal{C}_3$ dans la figure 4.5.3, est paramétré par $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \phi_2(t)\,\mathbf{j}$ pour $t \in [a,b]$. Cependant, l'orientation de $\mathcal{C} = \partial\mathcal{R}$ dans le sens trigonométrique impose à $\mathcal{C}$ d'être parcourue de droite à gauche, c'est-à-dire de $(b,\phi_2(b))$ à $(a,\phi_2(a))$. Ainsi, la première des deux intégrales ci-haut est

$$\int_a^b P(x,\phi_2(x))\,dx = -\int_{\mathcal{C}_3} P\,dx. \tag{$\dagger$}$$

Pour la seconde intégrale, les choses sont plus faciles, il ne faut pas changer le sens de parcours. Ainsi, celle-ci est

$$\int_a^b P(x,\phi_1(x))\,dx = \int_{\mathcal{C}_1} P\,dx. \tag{$\dagger\dagger$}$$

Il vient donc, après addition des équations ($\dagger$) et ($\dagger\dagger$), que

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = -\left[\int_{\mathcal{C}_1} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_3} P\,dx\right].$$

Le bord $\mathcal{C} = \partial\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$ est formé de deux, trois ou quatre courbes. En effet, les portions $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$ pourraient être réduites à un seul point. Ceci arrive si $\phi_1(a) = \phi_2(a)$ ou si $\phi_1(b) = \phi_2(b)$. Mais ça n'a pas d'importance, car sur ces portions, même si elles étaient là, nous aurons que x est constante et donc, dans tout paramétrage, nous aurons $x'(t) = 0$, de sorte que

$$\int_{\mathcal{C}_2} P\,dx = \int_{\mathcal{C}_4} P\,dx = 0.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dA &= -\left[\int_{\mathcal{C}_1} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_3} P\,dx\right] \\ &= -\int_{\partial\mathcal{R}} P\,dx.\end{aligned}$$

Pour montrer que

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA = \int_{\partial\mathcal{R}} Q\,dy, \tag{$**$}$$

on procède de la même façon, mais en exprimant l'intégrale double de départ comme une intégrale itérée dans l'autre ordre d'intégration :

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} Q(x,y)\,dx\,dy.$$

Le résultat s'obtient alors en additionnant les équations ($*$) et ($**$). ■

Le terme « forme tangentielle » vient de ce que l'intégrale considérée calcule la circulation du champ $\mathbf{F}$ autour de la courbe $\mathcal{C}$. Comme nous l'avons vu à la formule 4.2.14, ceci revient à intégrer la projection de $\mathbf{F}$ sur le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}$ à la courbe. Ainsi, informellement, on peut penser que le théorème de Green, dans sa version tangentielle, dit :

> *La circulation d'un champ* $\mathbf{F}$ *d'une courbe* $\mathcal{C}$ *est l'intégrale du rotationnel de* $\mathbf{F}$ *sur la région limitée par* $\mathcal{C}$

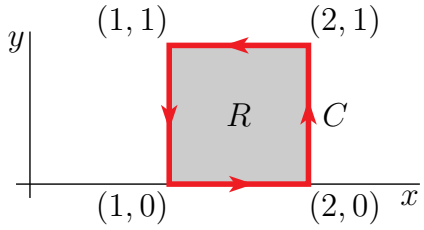
Si le champ $\mathbf{F}(x,y)$ est donné par ses composantes $P(x,y)\,\mathbf{i}+Q(x,y)\,\mathbf{j}$, l'égalité du théorème devient :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial\mathcal{R}} P\,dx + Q\,dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \operatorname{rot}\mathbf{F}\,dA = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA.\end{aligned}$$

Toutes ces égalités sont équivalentes ; chacune des formes d'écrire le théorème de Green présente ses avantages.

Exemple 4.5.5

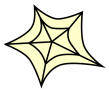
Calculer $\int_{\mathcal{C}}(x-xy)\,dx+(y^3+1)\,dy$, où $\mathcal{C}$ est le carré montré dans la figure ci-contre.



Solution. Soit $\mathcal{R} = \{\ (x,y)\ \mid\ 1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\ \}$. En vertu du théorème de Green,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}}(x-xy)\,dx+(y^3+1)\,dy &= \iint_{\mathcal{R}}\Big[\frac{\partial}{\partial x}(y^3+1)-\frac{\partial}{\partial y}(x-xy)\Big]dxdy \\ &= \int_1^2 dx\int_0^1 dy\ x = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

À vous de jouer 4.5.6



Utilisez le théorème de Green pour évaluer l'intégrale curviligne de $\mathbf{F} = \langle x^2, 4x\rangle$ le long de la frontière du parallélogramme $\mathcal{D}$ dont les sommets sont $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$ et $(2,2)$, parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

$\int_{\mathcal{C}} x^2\,dx+4x\,dy =$ _____

Le théorème de Green demande d'avoir une courbe fermée. L'exemple suivant montre comment on peut s'en tirer lorsque la courbe n'est pas fermée.

Exemple 4.5.7

Calculer la circulation du champ

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(2y+2xy\cos(x^2y)\big)\,\mathbf{i}+\big(x-y+x^2\cos(x^2y)\big)\,\mathbf{j}$$

le long de la portion du cercle $x^2+y^2=1$ se trouvant dans le demi-plan $x\geqslant 0$ allant de $(0,-1)$ à $(0,1)$.

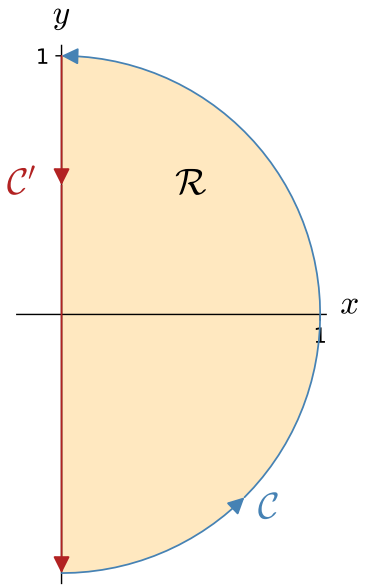
Solution. Notons, pour commencer, que le calcul direct de l'intégrale de ligne est possible, mais laborieux. En effet, le paramétrage usuel $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ avec $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$ mène à intégrer, entre autres, le terme $\cos\left(\cos^2 t \sin t\right)\left(\cos^3 t - 2\cos t \sin^2 t\right)$, dont la primitive n'est pas évidente à trouver.

Par contre, la composante $\mathbf{k}$ du rotationnel de $\mathbf{F}$ est facile à traiter. Si nous dénotons par P et Q les composantes de $\mathbf{F}$, nous avons

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y),$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y),$$

de sorte que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1$.

Cependant, il y a une difficulté additionnelle : la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas une courbe fermée, le théorème de Green ne peut donc pas être appliqué directement. Pour surmonter cet inconvénient, nous allons ajouter une portion de courbe, disons $\mathcal{C}'$, à $\mathcal{C}$ de sorte que la trajectoire résultante Γ obtenue en parcourant d'abord $\mathcal{C}$ puis $\mathcal{C}'$ soit fermée et que le théorème de Green puisse être appliqué. De plus, soit $\mathcal{R}$ la région enfermée par la courbe Γ.



Nous avons alors

$$\iint_{\mathcal{R}} \operatorname{rot}\mathbf{F}\; dA = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Or, $\operatorname{rot}\mathbf{F} = -1$, de sorte que

$$\iint_{\mathcal{R}} \operatorname{rot}\mathbf{F}\, dA = -\iint_{\mathcal{R}} dA = -\text{Aire}(\mathcal{R}) = -\frac{\pi}{2},$$

puisque l'aire d'un demi-disque de rayon 1 est $\frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs, $\mathcal{C}'$ est paramétrée par $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} = 0\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j}$ avec $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Il vient alors que

$$\int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} \left[P(0,-t)\cdot 0 + Q(0,-t)\cdot(-1)\right] dt = \int_{-1}^{1} (t)\,(-1)\, dt = 0,$$

puisque $x(t) = 0$ et $Q(0,y) = -y$.

Ainsi, l'intégrale qui nous intéresse vaut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Remarquons que les termes compliqués des composantes de $\mathbf{F}$ sont en fait les composantes du champ gradient

$$\boldsymbol{\nabla}\sin(x^2y) = 2xy\cos(x^2y)\,\mathbf{i} + x^2\cos(x^2y)\,\mathbf{j},$$

dont le rotationnel est nul (théorème 4.3.6). Le théorème de Green les a donc éliminés automatiquement.

Lorsque la région $\mathcal{R}$ est telle que sa frontière $\partial\mathcal{R}$ est donnée par plus d'une courbe, une

attention particulière est requise pour l'orientation des différentes courbes qui constituent $\partial\mathcal{R}$. Plutôt que de penser au sens de parcours de chacune de ces courbes individuellement, il faut les considérer comme la frontière de $\mathcal{R}$ et les orienter de sorte que, lorsque nous les parcourons (debout sur le plan, avec notre tête dans la direction du vecteur $\mathbf{k}$), la région $\mathcal{R}$ se trouve à gauche. On peut voir la figure de droite dans l'énoncé du théorème de Green. Ci-bas, on présente une situation plus générale.

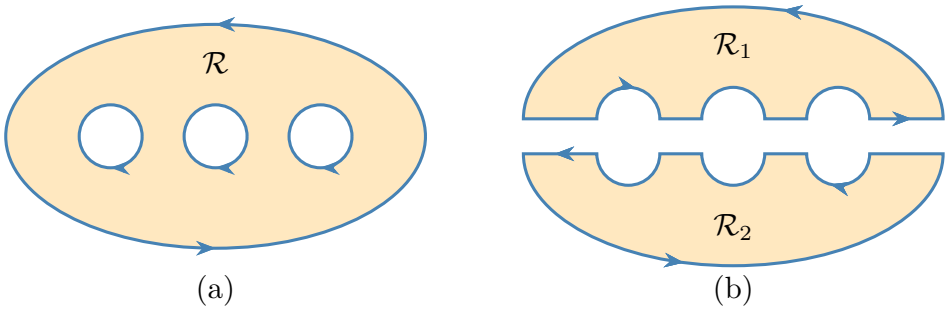


Figure 4.5.8 L'orientation de la frontière d'une région est donnée par la règle de la main droite : (a) une région percée de trois trous ; (b) la même région coupée en deux morceaux, chacun orienté.

Ceci revient à utiliser la règle de la main droite en chaque point de $\mathcal{R}$. Le pouce de la main droite pointe dans la direction du vecteur $\mathbf{k}$, les autres doigts donnent l'orientation de la frontière de $\mathcal{R}$.

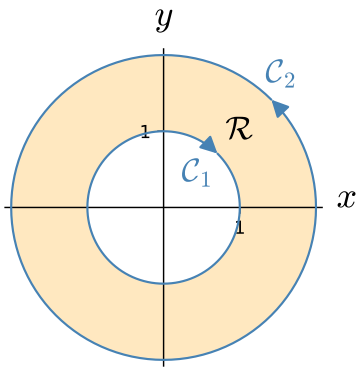
Exemple 4.5.9

Soit $\mathcal{R}$ la région du plan donnée en coordonnées polaires par

$$1 \leqslant r \leqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Calculer la valeur de

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \left(\sin x - \frac{1}{3}y^3\right) dx + \left(\frac{1}{3}x^3 + \sin y\right) dy.$$



Solution. Le calcul par le théorème de Green se fait aisément. Posons $P(x,y) = \sin x - \frac{1}{3}y^3$ et $Q(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \sin y$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{R}} P\,dx + Q\,dy &= \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)\,dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{15}{4} d\theta = \frac{15\pi}{2}.\end{aligned}$$

Mise en garde 4.5.10

Il est important de remarquer que, dans le théorème 4.5.2, on exige que les composantes du champ $\mathbf{F}$ admettent des dérivées partielles continues en *chaque point de* $\mathcal{R}$. Si ce n'est pas le cas, ne serait-ce que pour un seul point, la conclusion sera fausse. L'exemple suivant, que nous avons déjà rencontré, le montre.

Exemple 4.5.11 L'exemple 4.4.15 revisité.

À l'exemple 4.4.15, nous avons considéré le champ de vecteurs défini sur le plan sans l'origine par la formule

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} \qquad \text{pour } (x,y) \neq (0,0).$$

Les calculs que nous avons faits montrent que si $\mathcal{C}$ est la trajectoire fermée partant de $(1,0)$ suivant le cercle $x^2+y^2=1$ dans le sens trigonométrique, nous aurons

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi. \qquad (*)$$

Par ailleurs, nous avons aussi montré que le rotationnel de $\mathbf{F}$ est nul. Soit $\mathcal{R}$ la région du plan définie par $x^2+y^2 \leqslant 1$, de sorte que $\partial\mathcal{R} = \mathcal{C}$. Ainsi, nous avons

$$\iint_{\mathcal{R}} \operatorname{rot}\mathbf{F}\, dA = 0. \qquad (**)$$

Les valeurs des intégrales $(*)$ et $(**)$ diffèrent, en apparente contradiction avec le théorème de Green. Cependant, il n'en est rien. En effet, les composantes de $\mathbf{F}$ ne sont pas continues sur *toute* la région $\mathcal{R}$. En fait, le champ $\mathbf{F}$ n'est même pas défini à l'origine, et il est impossible de le définir de façon à avoir la continuité sur $\mathcal{R}$.



À vous de jouer 4.5.12

Soit $\mathbf{F}(x,y) = (2y, 9x)$. Trouver l'aire de la région $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ si la circulation de $\mathbf{F}$ le long de la frontière $\partial\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$ vaut $\int_{\partial R} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds = 3$.

aire $(R) =$ _____

La « version normale » du théorème de Green traite pour sa part du flux d'un champ $\mathbf{F}$ à travers la frontière d'une région $\mathcal{R}$, pourvu que cette frontière satisfasse aux mêmes hypothèses que celles faites pour la forme tangentielle du théorème. Nous l'avons vu, pour calculer le « flux à travers » une courbe, nous devons choisir un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ orthogonal à la courbe. Pour calculer le flux à travers le bord de $\mathcal{R}$, nous choisissons le vecteur $\mathbf{n}$ pointant vers l'extérieur de $\mathcal{R}$. Comme précédemment, si $\partial\mathcal{R}$ est composée de plusieurs courbes, il faudra tenir compte de ceci pour faire un choix cohérent de $\mathbf{n}$ pour chacune de ces courbes.

Théorème 4.5.13 Théorème de Green, forme normale.

Soit $\mathcal{R}$ une région bornée du plan telle que la frontière $\partial\mathcal{R}$ consiste en un nombre fini de courbes fermées, simples et lisses par morceaux et, en chaque point de $\partial\mathcal{R}$, $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire normal à $\partial\mathcal{R}$ pointant vers l'extérieur de $\mathcal{R}$.

Si $\mathbf{F}(x,y)$ est défini et de classe C^1 sur $\mathcal{R}$, alors

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} ds = \iint_{\mathcal{R}} div\mathbf{F} dA.$$

Ainsi, le théorème de Green, dans sa forme normale, s'interprète comme :

Le flux d'un champ $\mathbf{F}$ la frontière d'une région $\mathcal{R}$ est l'intégrale de la divergence de $\mathbf{F}$ sur la région $\mathcal{R}$

De nouveau, si le champ $\mathbf{F}(x,y)$ s'écrit explicitement $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$, l'égalité

du théorème de Green ainsi que la formule (∗) de la section 4.2 donnent

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_{\partial\mathcal{R}} P\,dy - Q\,dx \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA = \iint_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dA.\end{aligned}$$

Exemple 4.5.14

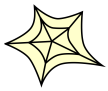
Calculer le flux du champ $\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$ à travers le carré formé par les droites $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$.

Solution. Calculer le flux avec une intégrale de ligne demanderait de calculer quatre intégrales, une pour chaque portion du carré. Aucun calcul n'est compliqué en soi, mais utilisons le théorème de Green pour le faire.

Soit $\mathcal{R}$ la région $[-1,1]\times[-1,1]$ et $\mathcal{C}$ son bord.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_{\mathcal{C}} x\,dy - y^2\,dx = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y^2\right) dA \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (1+2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} [x+2xy]_{x=-1}^{x=1}\,dy \\ &= \int_{-1}^{1} (2+4y)\,dy = \left[2y+2y^2\right]_{-1}^{1} = 4.\end{aligned}$$

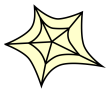
À vous de jouer 4.5.15



Utilisez le théorème de Green pour calculer le flux du champ $\mathbf{F} = (5x^2+y)\,\mathbf{i} + (x+4y^2)\,\mathbf{j}$ à travers la frontière (vers l'extérieur) du carré $\mathcal{D}$ délimité par $x=0$, $x=1$, $y=0$ et $y=1$, parcouru dans le sens antihoraire.

$\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds =$ _____

À vous de jouer 4.5.16



Soit $\mathbf{F}(x,y) = (7x, 9y)$. Trouver l'aire de la région fermée $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2$ si le flux de $\mathbf{F}$ à travers la frontière $\partial\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$ est $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 4$.

Aire(R) = _____

Exemple 4.5.17

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée, simple et lisse par morceaux, ne passant pas par l'origine, orientée par un vecteur normal $\mathbf{n}$ pointant vers l'extérieur lorsque la courbe est parcourue dans le sens antihoraire, et $\mathbf{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$. Montrer que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ peut prendre seulement deux valeurs, selon que $\mathcal{C}$ enferme l'origine ou pas.

Solution. Notons, pour commencer, que le champ $\mathbf{F}$ n'est pas défini à l'origine. Soit $\mathcal{R}$ la région du plan enfermée par $\mathcal{C}$. Nous avons par ailleurs

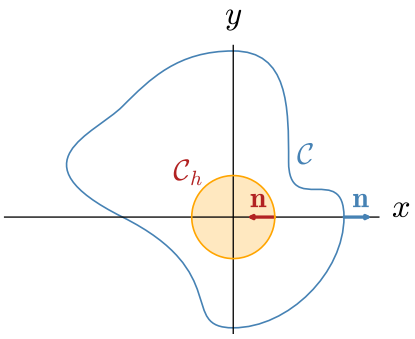
$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

Lorsque $\mathcal{C}$ n'entoure pas l'origine, le champ $\mathbf{F}$ est de classe C^1 sur la région $\mathcal{R}$. Dans ce cas, le théorème de Green donne directement

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA = 0.$$

Le cas où $\mathcal{C}$ entoure l'origine pose problème, l'hypothèse du théorème de Green n'est pas satisfaite. Nous pouvons cependant adapter notre argument comme suit.

Puisque $\mathcal{C}$ contourne l'origine, il existe un réel $h > 0$ tel que $\mathcal{C}$ entoure le cercle $\mathcal{C}_h$ centré à l'origine et de rayon h. Soit alors $\mathcal{R}$ la région comprise entre $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}$. Sur cette région, l'argument de la première partie peut être appliqué. Il faut noter que $\partial\mathcal{R}$ est cette fois composée de deux courbes : d'une part $\mathcal{C}$ orientée en s'éloignant de l'origine, d'autre part $\mathcal{C}_h$ avec le vecteur normal pointant vers l'origine.



Nous avons alors

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\mathcal{R}} 0\,dA = \iint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \\ &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds + \int_{\mathcal{C}_h} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'intégrale qui nous occupe peut être ramenée à l'intégrale sur un cercle et que, mieux encore, le rayon de celui-ci n'a pas d'importance, pourvu qu'il soit assez petit pour être contourné par $\mathcal{C}$.

Afin de calculer l'intégrale sur $\mathcal{C}_h$, on utilise le paramétrage $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = h\cos t\,\mathbf{i} + h\sin t\,\mathbf{j}$, avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Sur $\mathcal{C}_h$, le vecteur normal unitaire $\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ pointe dans la direction qui s'éloigne de l'origine, nous devons donc choisir $\mathbf{n} = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} = -\frac{1}{h}x(t)\mathbf{i} - \frac{1}{h}y(t)\mathbf{j}$. On a alors

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}\right)\cdot\left(\frac{-1}{h}x\,\mathbf{i} - \frac{1}{h}y\,\mathbf{j}\right) = \frac{-1}{h}.$$

Ainsi, puisque $\|\mathbf{r}'\| = h$, nous avons

$$\int_{\mathcal{C}_h} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

Comme $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds + \int_{\mathcal{C}_h} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$, nous avons

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 2\pi.$$

Une application : calcul d'aires

Nous avons vu qu'une intégrale de ligne peut, avec un peu de chance, se ramener au calcul d'une aire (voir l'exemple 4.5.7). Nous exploitons ici ce fait, en donnant quelques exemples.

L'aire d'une région $\mathcal{R}$ est donnée par $\iint_{\mathcal{R}} dA$. Ainsi, si nous disposons d'un champ $\mathbf{F}$ tel que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 1$, nous aurons, en vertu du théorème de Green,

$$\text{Aire}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} dA = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Quelques choix possibles de tels champs sont :

- $\mathbf{F}(x,y) = -\frac{1}{2}y\mathbf{i} + \frac{1}{2}x\mathbf{j}$;
- $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i}$;
- $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{j}$.

Ces choix de champs donnent les formules suivantes.

Formule 4.5.18

Soit $\mathcal{R}$ une région du plan telle que son bord, $\partial\mathcal{R}$, est une réunion finie de courbes fermées, simples et lisses par morceaux, orientées positivement. Alors, l'aire de $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathit{Aire}(\mathcal{R}) &= \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} x\,dy - y\,dx && (*)\\ &= -\int_{\partial\mathcal{R}} y\,dx && (**)\\ &= \int_{\partial\mathcal{R}} x\,dy. && (***) \end{aligned}$$

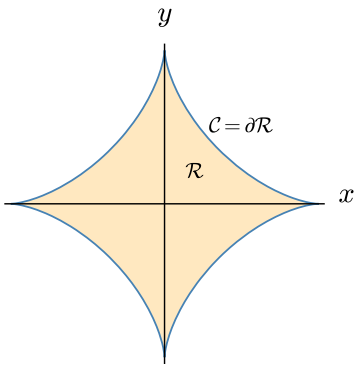
Voyons quelques exemples.

Exemple 4.5.19

Calculer l'aire de la région limitée par l'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Nous avons obtenu un paramétrage de l'astroïde à l'exemple 1.5.6, à savoir $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \sin^3 t\,\mathbf{j}$, pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. L'aire est alors donnée par

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')\,dt.$$

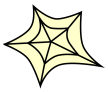


Or, $\mathbf{r}'(t) = -(3\sin t\,\cos^2 t)\,\mathbf{i} + 3(\cos t\,\sin^2 t)\mathbf{j}$, de sorte que

$$\begin{aligned} x(t)y'(t) - y(t)x'(t) &= \cos^3 t\ 3\cos t\ \sin^2 t + \sin^3 t\ 3\sin t\,\cos^2 t\\ &= 3\left(\cos^4 t\,\sin^2 t + \sin^4 t\,\cos^2 t\right)\\ &= 3\cos^2 t\,\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 3\cos^2 t\,\sin^2 t. \end{aligned}$$

Il vient alors que l'aire A vaut

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\cos^2 t\ \sin^2 t\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt$$
$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\, dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\, dt = \frac{3\pi}{8}.$$



À vous de jouer 4.5.20

A)

Utilisez le théorème de Green pour calculer l'aire à l'intérieur de l'ellipse $\dfrac{x^2}{16^2}+\dfrac{y^2}{14^2}=1$.

Utilisez le fait que l'aire peut s'écrire comme

$$\iint_D dx\, dy = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -y\ dx + x\ dy\ .$$

Indication : $x(t) = 16\cos(t)$.

L'aire est _____.

B)

Trouvez une paramétrisation de la courbe $x^{2/3}+y^{2/3}=7^{2/3}$ et utilisez-la pour calculer l'aire de l'intérieur.

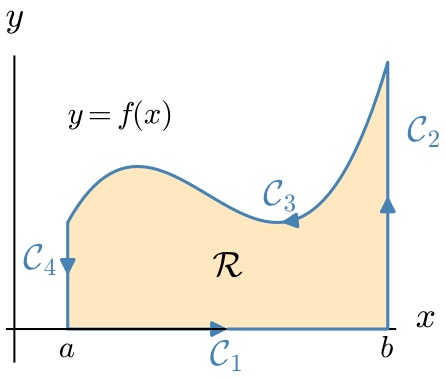
Indication : $x(t) = 7\cos^3(t)$.

Exemple 4.5.21

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $0 \leqslant f(x)$ pour $x \in [a,b]$. Soit $\mathcal{R}$ la région du plan limitée par les droites $x = a$ et $x = b$, au-dessus de l'axe Ox et en dessous de la courbe $y = f(x)$. Calculer l'aire de $\mathcal{R}$ à l'aide du théorème de Green.

Solution.

Nous calculons l'aire au moyen de $\text{Aire}(\mathcal{R}) = -\int_{\partial\mathcal{R}} y\, dx$. Le bord de $\mathcal{R}$ est composé de quatre courbes, dont trois sont des segments de droite : $\mathcal{C}_1$ est le segment de $(a,0)$ à $(b,0)$; $\mathcal{C}_2$, celui de $(b,0)$ à $(b,f(b))$; $\mathcal{C}_3$ est la portion de la courbe $y = f(x)$ *parcourue de droite à gauche, c'est-à-dire de* $x = b$ *à* $x = a$; $\mathcal{C}_4$ est le segment de $(a,f(a))$ à $(a,0)$.



Ainsi, l'aire est

$$\text{Aire}(\mathcal{R}) = -\int_{\partial\mathcal{R}} y\, dx = -\left[\int_{\mathcal{C}_1} y\, dx + \int_{\mathcal{C}_2} y\, dx + \int_{\mathcal{C}_3} y\, dx + \int_{\mathcal{C}_4} y\, dx\right].$$

Or, sur $\mathcal{C}_1$, nous avons $y = 0$ tandis que, sur $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$, la valeur de x est constante, de sorte que $x'(t) = 0$. Ainsi, les trois termes correspondant à ces portions de $\partial\mathcal{R}$ sont nuls.

Le chemin $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}$, avec $a \leqslant t \leqslant b$, est un paramétrage de la

trajectoire $\mathcal{C}_3$, mais allant de gauche à droite. Ainsi,

$$\text{Aire}(\mathcal{R}) = -\int_{\mathcal{C}_3} y\,dx = -\left[-\int_a^b y(t)\,x'(t)\,dt\right] = \int_a^b f(t)\,dt,$$

comme on s'y attendait.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Intégrer $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ en sens antihoraire sur

(a) le cercle $x^2 + y^2 = a^2$;

(b) la frontière du carré formé par les sommets $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ et $(1,-1)$;

(c) la frontière de la région $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$, $y \geqslant 0$.

2. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathbf{F} = x^2y^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$ et $\mathcal{C}$ est la frontière du carré dans le plan xy ayant un sommet à l'origine et un sommet diagonalement opposé au point $(3,3)$, orientée en sens antihoraire.

3. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} (x\sin y^2 - y^2)\,dx + (x^2y\cos y^2 + 3x)\,dy$, où $\mathcal{C}$ est la frontière du trapézoïde formé des sommets $(0,-2)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ et $(0,2)$, orientée en sens antihoraire.

4. Évaluer $I = \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{3}x^2y^3 - x^4y\right)dx + \left(xy^4 + x^3y^2\right)\,dy$ en sens antihoraire sur la frontière du demi-disque $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$.

5. Soit $\mathcal{C}$ le rectangle orienté en sens antihoraire formé par les sommets $(1,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$ et $(1,1)$. Évaluer

$$\int_{\mathcal{C}} \left(3y^2 + 2xe^{y^2}\right)\,dx + \left(2yx^2e^{y^2}\right)\,dy.$$

Pour mieux comprendre.

6. Montrer que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. Discuter du lien entre ce résultat et le résultat de l'exercice 1.

7. Considérer la région fermée bornée par les courbes $y = x^2 + 4x + 4$ et $y = 4 - x^2$. Soit $\mathcal{C}$ sa frontière et supposer que $\mathcal{C}$ est orientée en sens antihoraire.

(a) Dessiner soigneusement la courbe *orientée* $\mathcal{C}$ dans le plan xy.

(b) Déterminer la valeur de

$$\int_{\mathcal{C}} xy\,dx + (e^y + x^2)dy.$$

8. Soit

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2 - e^{-y^2} + \sin x\,,\, 2xye^{-y^2} + x\right),$$

et soit $\mathcal{C}$ la frontière du triangle délimité par les sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,2)$, orientée

en sens antihoraire. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

9. Soit la courbe $\mathcal{C}$, la frontière de la région entre les courbes $y = x^2 - 4x + 3$ et $y = 3 - x^2 + 2x$. Déterminer la valeur de l'intégrale de ligne

$$\int_{\mathcal{C}} \left(2xe^y + \sqrt{2 + x^2}\right) dx + x^2(2 + e^y)\, dy,$$

où $\mathcal{C}$ est parcourue en sens antihoraire.

10. Soit

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\tfrac{3}{2}y^2 + e^{-y} + \sin x\right) \mathbf{i} + \left(\tfrac{1}{2}x^2 + x - xe^{-y}\right) \mathbf{j}.$$

Trouver $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}$ est la frontière du triangle ayant pour sommets $(0, 0)$, $(1, -2)$ et $(1, 2)$, orientée en sens antihoraire.

11.

(a) Utiliser le théorème de Green pour évaluer l'intégrale de ligne

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

où $\mathcal{C}$ est l'arc de la parabole $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ allant de $(-2, 2)$ à $(2, 2)$.

(b) Utiliser le théorème de Green pour évaluer l'intégrale de ligne

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

où $\mathcal{C}$ est l'arc de la parabole $y = x^2 - 2$ allant de $(-2, 2)$ à $(2, 2)$.

(c) Est-ce que le champ de vecteurs

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

est conservatif ? Justifier en s'appuyant sur les réponses aux parties précédentes de cette question.

12. Supposons que la courbe $\mathcal{C}$ est la frontière de la région se trouvant entre les courbes $y = x^2 - 4x + 3$ et $y = 3 - x^2 + 2x$. Déterminer la valeur de l'intégrale de ligne

$$\int_{\mathcal{C}} \left(2xe^y + \sqrt{2} + x^2\right) dx + x^2 \left(2 + e^y\right) dy,$$

où $\mathcal{C}$ est traversée en sens antihoraire.

13. Soit $\mathbf{F}(x, y) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ un champ de vecteurs plan et lisse défini pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et supposons que $Q_x = P_y$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Dans ce qui suit, $I_j = \int_{\mathcal{C}_j} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pour j entier, et tous les $\mathcal{C}_j$ sont des cercles orientés positivement. Supposons que $I_1 = \pi$, où $\mathcal{C}_1$ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Trouver I_2 pour $\mathcal{C}_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1$. Expliquer brièvement.

(b) Trouver I_3 pour $\mathcal{C}_3 : (x - 2)^2 + y^2 = 9$. Expliquer brièvement.

(c) Trouver I_4 pour $\mathcal{C}_4 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$. Expliquer brièvement.

14. Considérer le champ de vecteurs $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, où

$$P = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \qquad Q = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

(a) Calculer et simplifier $Q_x - P_y$.

(b) Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}_R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ directement en utilisant une paramétrisation où $\mathcal{C}_R$ est le cercle de rayon R, centré à l'origine et orienté en sens antihoraire.

(c) Est-ce que $\mathbf{F}$ est conservatif ? Expliquer soigneusement comment la réponse s'accorde avec les résultats obtenus dans les deux premières parties.

(d) Utiliser le théorème de Green pour calculer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}$ est le triangle formé des sommets $(1,1)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ orienté dans le sens antihoraire.

(e) Utiliser le théorème de Green pour calculer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}$ est le triangle formé des sommets $(-1,-1)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ orienté dans le sens antihoraire.

15.

(a) Évaluer

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{1+x^3}\,dx + \left(2xy^2 + y^2\right)\,dy,$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle unitaire $x^2 + y^2 = 1$, orienté en sens antihoraire.

(b) Évaluer

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{1+x^3}\,dx + \left(2xy^2 + y^2\right)\,dy,$$

où $\mathcal{C}$ est maintenant la partie du cercle unitaire $x^2 + y^2 = 1$, avec $x \geqslant 0$, encore orienté en sens antihoraire.

16. Évaluer l'intégrale de ligne

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + ye^x)\,dx + (x\cos y + e^x)\,dy,$$

où $\mathcal{C}$ est l'arc de la courbe $x = \cos y$ pour $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, parcourue en sens des y croissants.

17. Utiliser le théorème de Green afin d'établir que si $\mathcal{C}$ est une courbe fermée simple dans le plan, alors l'aire A de la région délimitée par $\mathcal{C}$ est donnée par

$$A = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx.$$

Utiliser ceci pour calculer l'aire à l'intérieur de la courbe $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

18. Soit $\mathbf{F}(x,y) = (x+3y)\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j}$ et $\mathbf{G}(x,y) = (x+y)\,\mathbf{i} + (2x-3y)\,\mathbf{j}$ des champs de vecteurs. Trouver un nombre A de telle sorte que pour chaque cercle $\mathcal{C}$ dans le plan,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = A \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

19. Soit $\mathbf{F}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{i} - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) Calculer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}$ est le cercle unitaire dans le plan xy, orienté positivement.

(b) Utiliser (a) et le théorème de Green pour trouver $\int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}_0$ est l'ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, orientée positivement.

20. Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 1$ et soit $\mathcal{C}_2$ le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 9$. Soit $\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$. Trouver les intégrales $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ et $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

21. Soit $\mathcal{R}$ la région du premier quadrant du plan xy délimitée par les axes de coordonnées et la courbe $y = 1 - x^2$. Soit $\mathcal{C}$ la frontière de $\mathcal{R}$, orientée en sens antihoraire.

(a) Évaluer $\int_{\mathcal{C}} x\,ds$.

(b) Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathbf{F}(x,y) = \big(\sin(x^2) - xy\big)\,\mathbf{i} + \big(x^2 + \cos(y^2)\big)\,\mathbf{j}$.

22. Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie par l'intersection des surfaces $z = x + y$ et $z = x^2 + y^2$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une courbe simple fermée.

(b) Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où

(i) $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + 3e^z\,\mathbf{k}$,

(ii) $\mathbf{F} = y^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + 3e^z\,\mathbf{k}$.

Pour aller plus loin.

23. Soit $\mathcal{R}$ le carré $\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \right\}$ et soit $f(x,y)$ une fonction dont les premières dérivées partielles sont continues.

(a) Utiliser le théorème fondamental du calcul afin de montrer que

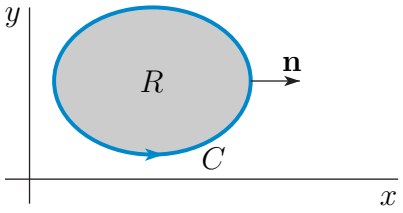
$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 f(x,1)\,dx - \int_0^1 f(x,0)\,dx..$$

(b) Utiliser le théorème de Green afin de montrer que

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 f(x,1)\,dx - \int_0^1 f(x,0)\,dx..$$

24.

Soit $\mathcal{R}$ une région bornée dans le plan xy, dont la frontière, $\mathcal{C}$, consiste en un seul chemin fermé, simple et lisse qui est orienté en sens antihoraire. « Simple » signifie que la courbe ne s'intersecte pas elle-même.



Utiliser le théorème de Green pour montrer que

$$\iint_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dx\,dy = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds,$$

où $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j}$, $\mathbf{n}$ est la normale unitaire extérieure à $\mathcal{C}$ et s est la longueur d'arc le long de $\mathcal{C}$.

25. Trouver une courbe lisse $\mathcal{C}$ simple, fermée et orientée en sens antihoraire dans le plan xy pour laquelle la valeur de l'intégrale de ligne $\oint_{\mathcal{C}}(y^3-y)\,dx-2x^3\,dy$ est un maximum parmi toutes les courbes lisses, simples, fermées et orientées dans le sens antihoraire.

4.6 Surfaces

Pour plusieurs applications, nous devons calculer des intégrales de surface. Un exemple évident est le calcul de l'aire d'une surface. Un peu plus généralement, on peut imaginer une surface mince faite d'un matériau de densité constante. Si l'on veut calculer la masse, le centre de gravité ou les moments d'inertie, on devra additionner de petits éléments de masse sur la surface. Un peu plus généralement, on peut vouloir calculer le flux d'un fluide à travers une surface donnée. Afin d'attaquer tous ces problèmes, on doit, dans un premier temps, spécifier la surface convenablement.

Surfaces paramétrées

Il y a trois façons usuelles de spécifier une surface dans l'espace tridimensionnel.

(a) *Graphe d'une fonction.* Probablement la façon la plus commune, c'est ce que nous avons fait à la section 2.1. Il s'agit de donner une équation de la forme

$$z=f(x,y), \qquad (x,y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2.$$

Par exemple, si la surface est la moitié supérieure de la sphère de rayon 1 centrée à l'origine, on a

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad \text{avec } x^2+y^2\leqslant 1.$$

(b) *Implicitement.* Nous l'avons aussi fait. Il s'agit de spécifier la surface comme l'ensemble de niveau d'une fonction de trois variables. Ceci revient à dire que la surface est l'ensemble des points (x,y,z) qui vérifient l'équation $G(x,y,z)=K$. Par exemple, la sphère de rayon 1 centrée à l'origine est l'ensemble des points vérifiant

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Nous reviendrons sur cette surface à l'exemple 4.6.2 plus bas.

(c) *Un paramétrage, l'image d'une fonction.* Il s'agit probablement de la façon la plus utile de spécifier une surface. Tout comme un chemin (une fonction d'une variable qui renvoie des points dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) sert à paramétrer une courbe, on peut obtenir une surface comme l'image d'une fonction de deux variables :

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}:\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\\&(u,v)\in\mathcal{D}\mapsto\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\,\mathbf{i}+y(u,v)\,\mathbf{j}+z(u,v)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

On dit que la surface est *paramétrée par* $\mathbf{r}$. Chaque point de la surface est étiqueté par les valeurs des paramètres u et v.

Exemple 4.6.1

Une façon simple, voire triviale, de paramétrer une surface qui est le graphe

$$z=f(x,y), \qquad (x,y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$$

est de choisir x et y comme paramètres, c'est-à-dire de choisir

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + f(u,v)\,\mathbf{k}, \quad (u,v) \in \mathcal{D} \\ \text{ou} \qquad &\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}, \quad (x,y) \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Voyons quelque chose d'un peu plus substantiel.

Exemple 4.6.2 Sphère.

La sphère de rayon 1 centrée à l'origine est l'ensemble des points (x,y,z) vérifiant

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

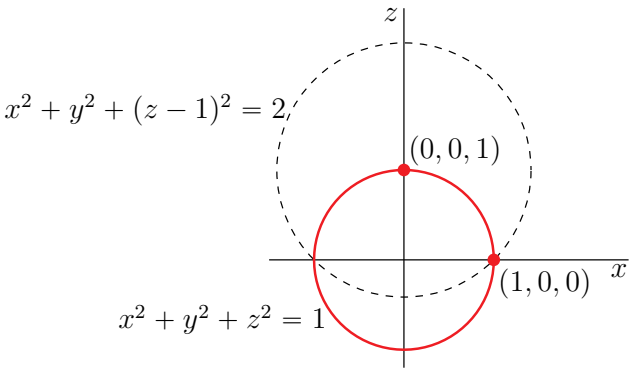
Nous ne pouvons pas exprimer cette surface comme le graphe d'une fonction puisque, pour chaque (x,y) vérifiant $x^2+y^2 \leqslant 1$, il existe deux valeurs de z telles que $x^2+y^2+z^2=1$, à savoir

$$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Cependant, localement, cette surface est le graphe d'une fonction. Ceci veut dire que, pour tout point (x_0,y_0,z_0) sur la sphère, les points sur cette surface qui sont suffisamment près de (x_0,y_0,z_0) peuvent être exprimés sous une des formes $z=f(x,y)$, $x=g(y,z)$ ou $y=h(x,z)$. Par exemple, la portion de la sphère qui se trouve à une distance inférieure à $\sqrt{2}$ du point $(0,0,1)$ est

$$\begin{aligned} &\{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ \|(x,y,z)-(0,0,1)\| < \sqrt{2}\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+(z-1)^2 < 2\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+z^2-2z+1 < 2\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2+y^2<1\ \}. \end{aligned}$$

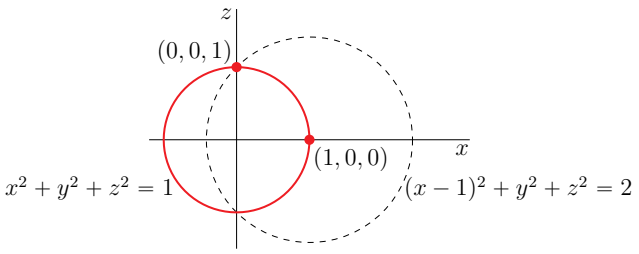
Ceci est illustré dans la figure ci-contre, qui montre la section de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ par le plan $y=0$, ainsi que la section par $y=0$ de l'ensemble des points qui sont à une distance inférieure à $\sqrt{2}$ de $(0,0,1)$ (ce sont les points à l'intérieur du cercle).



De la même façon, comme cela est schématisé dans la figure ci-bas, la portion de la sphère qui se trouve à une distance inférieure à $\sqrt{2}$ du point $(1,0,0)$ est

$$\begin{aligned} &\{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ \|(x,y,z)-(1,0,0)\| < \sqrt{2}\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ (x-1)^2+y^2+z^2 < 2\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ x^2-2x+1+y^2+z^2 < 2\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ x>0\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid x=\sqrt{1-y^2-z^2},\ y^2+z^2<1\ \}. \end{aligned}$$

Ceci est illustré dans la figure ci-contre, qui montre la section de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ par le plan $y = 0$, ainsi que la section par ce même plan de l'ensemble des points à une distance de $(1, 0, 0)$ inférieure à $\sqrt{2}$ (ce sont les points dans le cercle pointillé).



Nous pouvons obtenir un paramétrage de la sphère unité avec les coordonnées sphériques au moyen des formules

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta, \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$

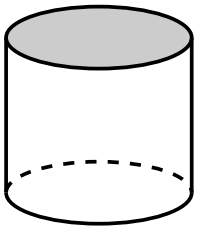
Les points sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sont exactement les points vérifiant $\rho = 1$, de sorte que nous avons un paramétrage

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos\varphi\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Exemple 4.6.3 Cylindre.

La surface $x^2 + y^2 = 1$ est un cylindre infini. Une portion est esquissée ci-contre.

Remarquons que la section de ce cylindre par le plan Oxy, et en fait par n'importe quel plan $z = c$, est le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Nous pouvons en donner un paramétrage en posant $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, de sorte que la figure en entier peut être paramétrée avec les paramètres θ et z comme



$$\mathbf{r}(\theta, z) = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ z \in \mathbb{R}.$$

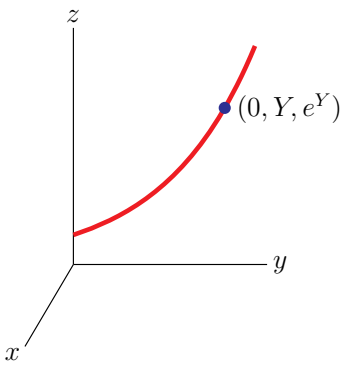
Exemple 4.6.4 Surface de révolution.

Dans cet exemple, nous allons donner un paramétrage d'une surface de révolution. Notre axe de révolution sera l'axe des z. Plus précisément, nous nous intéressons à la surface obtenue en faisant tourner la courbe du plan Oyz,

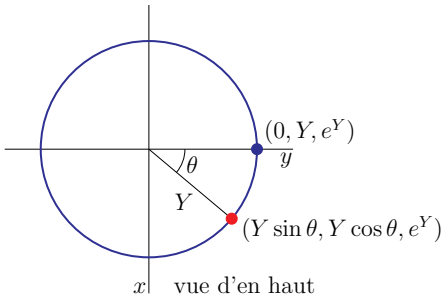
$$z = g(y) = e^y, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

autour de l'axe Oz. La même procédure peut être utilisée pour obtenir des paramétrages de surfaces de révolution autour d'autres axes.

Commençons par esquisser la courbe, il s'agit de la courbe rouge dans la figure ci-contre. Concentrons-nous sur un point spécifique de la courbe pendant la révolution, disons le point bleu, de coordonnées $(0, Y, e^Y)$.



Lorsque notre courbe tourne autour de l'axe des z, le point bleu décrit un cercle. Celui-ci se trouve sur le plan horizontal $z = e^Y$, est centré à l'axe des z et a pour rayon Y. Nous pouvons paramétrer facilement le cercle en question avec l'angle de révolution, disons θ comme paramètre.



Les coordonnées du point rouge sont $\big(Y\sin\theta,\, Y\cos\theta,\, e^Y\big)$. Ceci donne aussi un paramétrage de la surface de révolution.

$$\begin{aligned} x(Y,\theta) &= Y\sin\theta,\\ y(Y,\theta) &= Y\cos\theta,\\ z(Y,\theta) &= e^Y,\\ 0 \leqslant Y \leqslant 1, &\qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{aligned}$$

Remarquons, pour des fins de vérification, que

- lorsque $\theta = 0$,

  $$(x(Y,0),\, y(Y,0),\, z(Y,0)) = (0, Y, e^Y)$$

  parcourt la courbe $z = g(y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, lorsque Y vérifie $0 \leqslant Y \leqslant 1$, et que,
- pour toute valeur fixe de Y vérifiant $0 \leqslant Y \leqslant 1$, $(x(Y,\theta),\, y(Y,\theta),\, z(Y,\theta))$ parcourt le cercle $x^2 + y^2 = Y^2$ du plan $z = e^Y$, lorsque θ vérifie $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Notons aussi que

$$x(Y,\theta)^2 + y(Y,\theta)^2 = Y^2,$$

de sorte que

$$Y = \sqrt{x(Y,\theta)^2 + y(Y,\theta)^2},$$

et que

$$z(Y,\theta) = e^Y = e^{\sqrt{x(Y,\theta)^2+y(Y,\theta)^2}}.$$

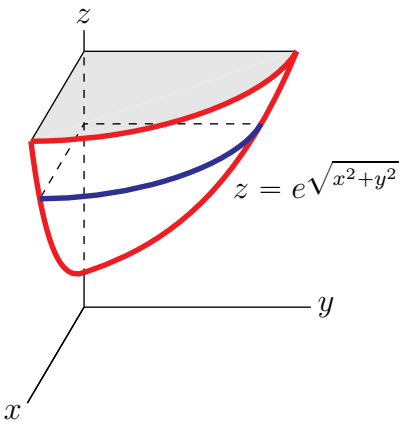
Ceci veut dire que la surface de révolution est contenue dans la surface infinie

$$z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ayant à l'esprit que $0 \leqslant Y \leqslant 1$, nous avons que $1 \leqslant z = e^Y \leqslant e$. La surface de révolution est

$$z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad 1 \leqslant z \leqslant e.$$

Finalement, voici une esquisse de la portion de notre surface qui se trouve dans le premier octant, $x, y, z \geqslant 0$.

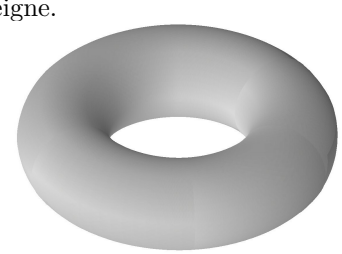


La même technique peut être utilisée pour obtenir un paramétrage de la surface de révolution obtenue en faisant tourner une courbe plane (peut-être elle-même paramétrée !) autour d'un axe quelconque.

Exemple 4.6.5 Tore.

Dans cet exemple, nous allons paramétrer la surface d'un beigne.

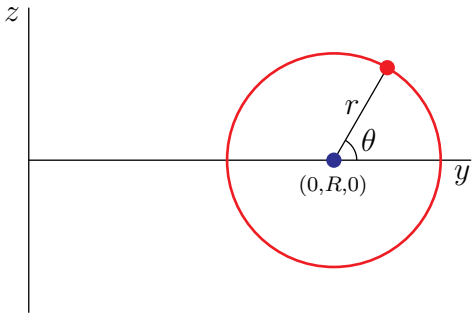
Le nom formel pour un « beigne » est un « tore ». Notre stratégie sera de paramétrer d'abord sa section dans la moitié droite du plan Oyz, puis nous construirons le tore complet en faisant tourner ce cercle autour de l'axe des z. Le cercle en question est esquissé ci-contre.



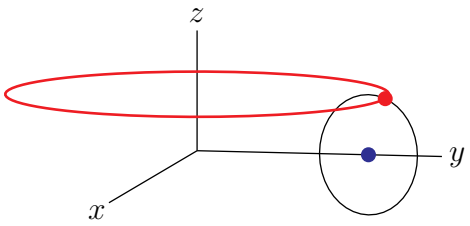
Nous prendrons pour acquis que le centre du cercle se trouve à une distance R de l'axe Oz et que le cercle a lui-même un rayon r. Ainsi, le point rouge se trouve à

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= R + r\cos\theta, \\ z &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

En particulier, le point rouge se trouve à une distance $r\sin\theta$ au-dessus du plan Oxy et à une distance $R + r\cos\theta$ de l'axe Oz.

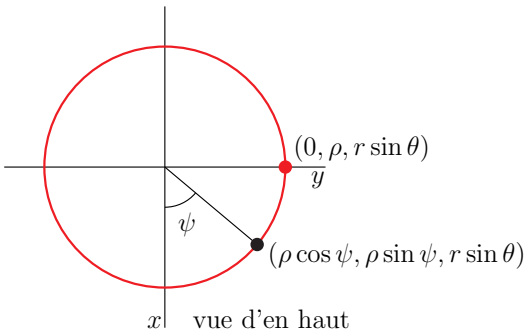


Ainsi, quand on le fait tourner autour de l'axe Oz, le point rouge décrit un cercle, comme esquissé ci-contre.



Le cercle en question est contenu dans le plan $z = r\sin\theta$, son centre se trouve sur l'axe Oz et a un rayon $\rho = R + r\cos\theta$.

Nous pouvons paramétrer ce cercle de la façon usuelle. Voici une vue d'en haut du cercle, avec le paramètre nommé ψ.



Ainsi, nous avons un paramétrage du cercle décrit par le point rouge :

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\psi = (R + r\cos\theta)\cos\psi, \\ y &= \rho\sin\psi = (R + r\cos\theta)\sin\psi, \\ z &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(\theta,\psi) = (R + r\cos\theta)\cos\psi\,\mathbf{i} + (R + r\cos\theta)\sin\psi\,\mathbf{j} + r\sin\theta\,\mathbf{k}, \\ &0 \leqslant \theta, \psi \leqslant 2\pi. \end{aligned}$$



À vous de jouer 4.6.6

Soit la surface $\mathcal{S}$ obtenue en faisant tourner la courbe $x = 4y^2$, $z = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, autour de l'axe des y.

Un paramétrage de $\mathcal{S}$ prend la forme

$$\mathbf{r}(y,\theta) = \big(g(y)\cos\theta,\ y,\ g(y)\sin\theta\big), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

(a) Trouver $g(y)$:

$g(y) =$ _____

(b) Vérifier que le paramétrage satisfait bien l'équation de la surface, c'est-à-dire que $x^2 + z^2 = \big[g(y)\big]^2$ donne une équation ne dépendant que de x, y et z. Quelle est la valeur de $x^2 + z^2$ sur $\mathcal{S}$?

$x^2 + z^2 =$ _____



À vous de jouer 4.6.7

Utiliser des coordonnées polaires dans le plan Oxz pour paramétrer la portion du paraboloïde $\mathcal{S} : y = 3(x^2 + z^2)$, $x^2 + z^2 \leqslant 3^2$.

Donner les trois composantes du paramétrage $\mathbf{r}(r,t)$ (utiliser t pour l'angle θ) :
$x =$ _____
$y =$ _____
$z =$ _____
avec $0 \leqslant r \leqslant 3$ et $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Plans tangents

Lorsqu'on rencontre une surface « compliquée » et qu'on veut l'étudier au voisinage d'un point, il est naturel de penser à utiliser le plan tangent en ce point. Afin de spécifier un plan, on doit avoir :

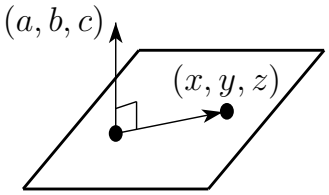
- un vecteur non nul $\mathbf{n}$, le vecteur normal pour ce plan ;
- un point (x_0, y_0, z_0) appartenant au plan.

Si (x, y, z) est un autre point sur le plan, alors le vecteur

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

est parallèle au plan et, donc, est orthogonal à $\mathbf{n}$. Ceci donne une équation pour le plan :

$$\mathbf{n} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = 0.$$



Le résultat suivant fournit les formules pour trouver un vecteur normal $\mathbf{n}$ à une surface dans différents contextes : si la surface est paramétrée, s'il s'agit d'un graphe d'une fonction et, finalement, s'il s'agit d'une surface de niveau d'une fonction de trois variables.

Théorème 4.6.8 Vecteurs normaux aux surfaces.

(a) Soit $\mathcal{S}$ une surface paramétrée par

$$\begin{aligned} &\mathbf{r} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &(u, v) \in \mathcal{D} \mapsto \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

et $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ un point sur la surface. Soit

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{r}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_{(u_0, v_0)}, \quad \mathbf{T}_v = \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{r}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}\Bigg|_{(u_0, v_0)}.$$

Alors,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \mathbf{k} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}\Bigg|_{(u_0, v_0)}$$

est normal à la surface au point (x_0, y_0, z_0).

(b) Soit (x_0, y_0, z_0), avec $z_0 = f(x_0, y_0)$, un point sur la surface d'équation $z = f(x, y)$. Alors,

$$\mathbf{n} = -f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} - f_y(x_0, y_0) + \mathbf{k}$$

est normal à la surface au point (x_0, y_0, z_0).

(c) Soit une surface donnée implicitement par $G(x, y, z) = K$, et (x_0, y_0, z_0) un point sur la surface. Si le gradient $\boldsymbol{\nabla} G\,(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, alors

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\nabla} G\,(x_0, y_0, z_0)$$

est normal à la surface au point (x_0, y_0, z_0).

Notons cependant qu'aucun de ces vecteurs n'a besoin d'être un vecteur unitaire.

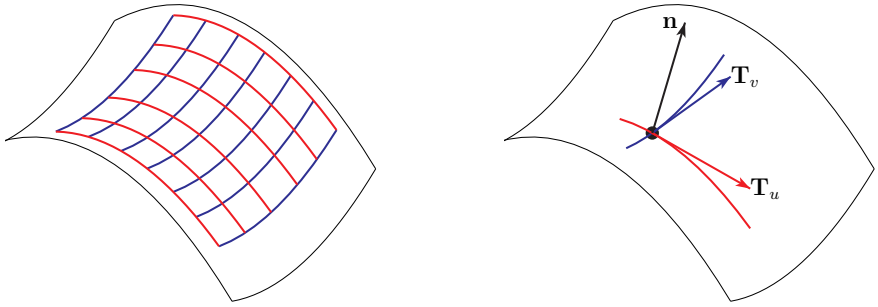
Remarquons aussi que, si nous appliquons la partie (c) à $G(x, y, z) = z - f(x, y)$, nous obtenons le vecteur normal $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nabla} G\,(x_0, y_0, z_0) = -f_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i} - f_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, qui est le même que le vecteur normal fourni par la partie (b).

Démonstration.

(a) Fixons d'abord $v = v_0$ et faisons varier u. Alors,

$$u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\,\mathbf{i} + y(u, v_0)\,\mathbf{j} + z(u, v_0)\,\mathbf{k}$$

est un chemin, sa courbe fait partie de la surface (la courbe rouge dans la figure de droite ci-bas) et elle passe par (x_0, y_0, z_0) (le point noir sur la figure) lorsque $u = u_0$.



Le vecteur tangent à cette courbe au point (x_0, y_0, z_0), qui est aussi tangent à la surface en (x_0, y_0, z_0), est

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{r}(u, v_0)\Big|_{u=u_0} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{array}\right]\Bigg|_{(u_0, v_0)}.$$

Il s'agit de la flèche rouge dans la figure de droite ci-haut.

Fixons maintenant $u = u_0$ et faisons varier v. Alors,

$$v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\,\mathbf{i} + y(u_0, v)\,\mathbf{j} + z(u_0, v)\,\mathbf{k}$$

est un chemin dont la courbe se trouve sur la surface (c'est la courbe bleue dans la surface ci-haut) qui passe par (x_0, y_0, z_0) lorsque $v = v_0$. Le vecteur tangent à cette courbe au point (x_0, y_0, z_0), qui est aussi tangent à la surface au point (x_0, y_0, z_0), est

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{r}(u_0, v)\Big|_{v=v_0} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{array}\right]\Bigg|_{(u_0, v_0)}.$$

C'est la flèche bleue dans la figure de droite ci-haut.

Nous avons deux vecteurs tangents à la surface au point (x_0, y_0, z_0), à savoir $\mathbf{T}_u$ et $\mathbf{T}_v$. Leur produit vectoriel

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \mathbf{k} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \Bigg|_{(u_0,v_0)}$$

est donc normal à la surface au point (x_0, y_0, z_0).

(b) Supposons maintenant que la surface est donnée comme le graphe de la fonction $z = f(x, y)$. Après avoir changé les noms des variables/paramètres, u devient x, et v devient y, nous pouvons utiliser le résultat de (a) :

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k}$$

est un paramétrage de la surface, et, au point (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0, y_0)$,

$$\mathbf{T}_x = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix} \Bigg|_{(x_0,y_0)}, \qquad \mathbf{T}_y = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{bmatrix} \Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 1 \\ \mathbf{k} & f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg|_{(x_0,y_0)}. \end{aligned}$$

(c) Ce résultat a été établi au théorème 2.6.22.

■

Exemple 4.6.9 Cône.

Considérons la surface

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = u \cos v, \\ y &= y(u, v) = u \sin v, \\ z &= z(u, v) = u, \\ u &\in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$x(u, v)^2 + y(u, v)^2 = u^2 = z(u, v)^2,$$

de sorte que notre surface est aussi

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Nous en ferons une esquisse sous peu, mais, avant, trouvons son plan tangent au point $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Nous allons le faire deux fois, une fois avec l'équation implicite, puis

une fois avec le paramétrage $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$. Nous avons

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0) = \begin{bmatrix} \cos v_0 \\ \sin v_0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{bmatrix} -u_0 \sin v_0 \\ u_0 \cos v_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos v_0 \\ \sin v_0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -u_0 \sin v_0 \\ u_0 \cos v_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0 \cos v_0 \\ -u_0 \sin v_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -x_0 \\ -y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, avec l'équation $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$, nous avons le vecteur normal

$$\boldsymbol{\nabla} G\,(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ -2z_0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -x_0 \\ -y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Bien entendu, les deux vecteurs $-x_0\,\mathbf{i} - y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ et $-2\,(-x_0\,\mathbf{i} - y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k})$ sont colinéaires, les deux peuvent être utilisés comme vecteur normal pour le plan tangent. L'équation de ce plan est

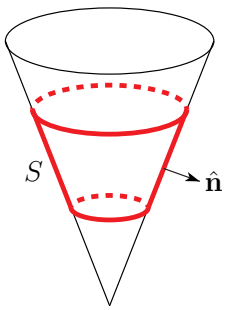
$$0 = \mathbf{n} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$
$$= -x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0),$$

pourvu que $(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$. Si jamais $(x_0,y_0,z_0) = \mathbf{0}$, l' « équation du plan tangent » devient $0 = 0$, ce qui n'est clairement pas tellement utile.

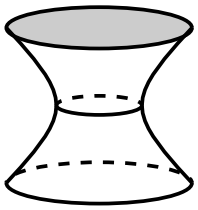
Plus généralement, si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{0}$ (ou $\boldsymbol{\nabla} G(x_0,y_0,z_0) = \mathbf{0}$), alors soit [a]

- la surface n'admet pas de plan tangent au point (x_0,y_0,z_0), soit
- notre paramétrage est « tordu » [b] en ce point. Par exemple, nous pouvons paramétrer le plan xy, soit le plan $z = 0$, par $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j}$ (ce sont les coordonnées polaires). Alors, $\mathbf{T}_u = \cos v_0\,\mathbf{i} + \sin v_0\,\mathbf{j}$ et $\mathbf{T}_v = -u_0 \sin v_0\,\mathbf{i} + u_0 \cos v_0\,\mathbf{j}$, de sorte que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = u_0\mathbf{k}$ est $\mathbf{0}$ lorsque $u_0 = 0$. Mais le plan $z = 0$ est son propre plan tangent !

La surface qui nous intéresse est $x^2 + y^2 = z^2$. L'intersection de cette surface avec le plan horizontal $z = z_0$ est $x^2 + y^2 = z_0^2$, qui est un cercle de rayon $|z_0|$ centré à $x = y = 0$. Ainsi, notre surface est un empilement de cercles. Le rayon du cercle dans le plan Oxy est nul, et ce rayon croît linéairement à mesure qu'on s'éloigne du plan Oxy. Notre surface est un cône, avec ses deux portions, une au-dessus et une au-dessous du plan Oxy ; elle n'a pas de plan tangent à $(0,0,0)$. La figure ci-contre ne montre que la portion supérieure, $z \geqslant 0$, qui correspond aux valeurs $u \geqslant 0$ du paramètre ; la portion inférieure en est le reflet par rapport au plan Oxy.



Exemple 4.6.10 Hyperboloïde à une nappe.



Nous allons maintenant trouver les plans tangents à la surface

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Comme pour le cône, l'intersection de la surface avec un plan horizontal $z = z_0$ est un cercle, le cercle de rayon $\sqrt{1+z_0^2}$ centré à $x = y = 0$. Notre surface est, de nouveau, un empilement de cercles. Le rayon du cercle au plan Oxy est 1, et ce rayon croît à mesure qu'on s'éloigne du plan Oxy. Voici une esquisse.

Cette surface est un hyperboloïde à une nappe [a].
Avec l'équation $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 1$, nous avons

$$\boldsymbol{\nabla} G\,(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ -2z_0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -z_0 \end{bmatrix}$$

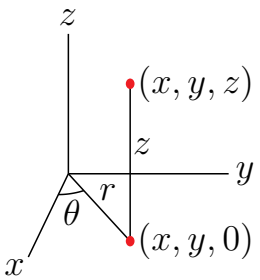
et nous pouvons prendre $\mathbf{n} = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} - z_0\,\mathbf{k}$ comme vecteur normal au point (x_0,y_0,z_0). Ainsi, le plan tangent à $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ au point (x_0,y_0,z_0) est

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{n} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \\ = x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0). \end{aligned}$$

Cette fois, $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, de sorte que nous avons un plan tangent en chaque point. Comme $(0,0,0)$ n'appartient pas à la surface, nous n'avons pas le problème d'annulation du vecteur normal $\mathbf{n}$.

Exemple 4.6.11 L'hyperboloïde à une nappe comme surface de révolution.

L'hyperboloïde à une nappe $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ est invariant par rotation autour de l'axe des z. Il semble donc naturel de le paramétrer en utilisant les coordonnées cylindriques.



$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ z &= z. \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques, la surface $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ est $r^2 - z^2 = 1$, et l'on peut la paramétrer en prenant $\mathbf{r}(\theta,z) = \sqrt{1+z^2}\cos\theta\,\mathbf{i} + \sqrt{1+z^2}\sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, avec $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ et $z \in \mathbb{R}$.

[a] Nous avons vu cette dichotomie pour une courbe, lorsque $\mathbf{r}'(t) = 0$, voir l'exemple 1.5.27.

[b] Bien sûr, « tordu » n'est pas un terme très précis. Une raison pour qu'un paramétrage soit « tordu » est qu'il ne fournit pas une correspondance 1 à 1 entre les paramètres (u,v) et les points d'une portion de la surface. Par exemple, les coordonnées polaires $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j}$ donnent $\mathbf{r}(0,v) = (0,0)$ pour toutes les valeurs de v.

[a] Il y a aussi des hyperboloïdes à deux nappes.

Une autre façon de procéder est de tirer profit des propriétés des fonctions trigonométriques hyperboliques :

$$\sinh u = \frac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right), \qquad \cosh u = \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right).$$

Celles-ci ont des propriétés analogues à celles des fonctions trigonométriques usuelles. Ce n'est pas un hasard, puisque $\cosh u = \cos(iu)$ et $\sinh u = -i\sin(iu)$. En effet, on montre que

$$\frac{d}{du}\cosh u = \sinh u, \qquad \frac{d}{du}\sinh u = \cosh u, \qquad \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1.$$

On peut choisir $r = \cosh u$, $z = \sinh u$ pour obtenir un paramétrage

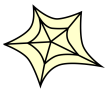
$$\mathbf{r}(\theta, u) = \cosh u\,\cos\theta\,\mathbf{i} + \cosh u\,\sin\theta\,\mathbf{j} + \sinh u\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ u \in \mathbb{R}.$$

Afin de nous exercer avec les fonctions trigonométriques hyperboliques, trouvons, au moyen de ce paramétrage, le vecteur $\mathbf{n}$.

$$\begin{array}{lll} x = \cosh u\,\cos\theta & x_u = \sinh u\,\cos\theta & x_\theta = -\cosh u\,\sin\theta \\ y = \cosh u\,\sin\theta & y_u = \sinh u\,\sin\theta & y_\theta = \cosh u\,\cos\theta \\ z = \sinh u & z_u = \cosh u & z_\theta = 0. \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_\theta &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \sinh u\,\cos\theta & -\cosh u\,\sin\theta \\ \mathbf{j} & \sinh u\,\sin\theta & \cosh u\,\cos\theta \\ \mathbf{k} & \cosh u & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cosh^2 u\,\cos\theta \\ -\cosh^2 u\,\sin\theta \\ \sinh u\cosh u \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



À vous de jouer 4.6.12

Soit la surface $\mathcal{S}$ paramétrée par

$$\mathbf{r}(u, v) = (u,\ v,\ u^2 + v^2).$$

On cherche le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $P = \mathbf{r}(1, 2) = (1,\ 2,\ 5)$.

(a) Calculer les vecteurs vitesse en $(u, v) = (1, 2)$:

$\mathbf{r}_u(1, 2) = (\ \_\_\_\_\_\ ,\ \_\_\_\_\_\ ,\ \_\_\_\_\_\ )$

$\mathbf{r}_v(1, 2) = (\ \_\_\_\_\_\ ,\ \_\_\_\_\_\ ,\ \_\_\_\_\_\ )$

(b) Calculer le vecteur normal $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ en $(1, 2)$:

$\mathbf{n} = (\ \_\_\_\_\_\ ,\ \_\_\_\_\_\ ,\ \_\_\_\_\_\ )$

(c) En déduire l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point P. Écrire la réponse sous la forme $z = \ldots$:

$z =$ _____

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Paramétrer la surface donnée par $z = e^{x+1} + xy$ en fonction de x et y.

2. Soit $\mathcal{S}$ la surface donnée par $\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\,\mathbf{i} + (u^2+v^2)\,\mathbf{j} + (u-v)\,\mathbf{k}$ avec $-2 \leqslant u \leqslant 2,\ -2 \leqslant v \leqslant 2$. C'est une surface familière. De quelle surface s'agit-il ? Il peut s'agir d'une portion de l'une des surfaces suivantes : sphère, hélicoïde, ellipsoïde, selle, bol parabolique, cylindre, cône ou plan.

3. Supposer que $\mathcal{S}$ est la partie de l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ qui est à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ et au-dessus du plan $z = 1$ (c'est-à-dire telle que $z \geqslant 1$).

Parmi les éléments suivants, lesquels sont des paramétrages de $\mathcal{S}$?

(a) La fonction vectorielle

$$\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{u^2+v^2-1}}{\sqrt{2}}\,\mathbf{k}$$

avec domaine $D = \left\{\ (u,v)\ \middle|\ 2 \leqslant u^2+v^2 \leqslant 9\ \right\}$.

(b) La fonction vectorielle

$$\mathbf{r}(u,v) = u\sin v\,\mathbf{i} - u\cos v\,\mathbf{j} + \sqrt{\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}}\,\mathbf{k}$$

avec domaine $D = \left\{\ (u,v)\ \middle|\ \sqrt{3} \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\ \right\}$.

(c) La fonction vectorielle

$$\mathbf{r}(u,v) = \sqrt{1+2v^2}\cos u\,\mathbf{i} + \sqrt{1+2v^2}\sin u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$$

avec domaine $D = \left\{\ (u,v)\ \middle|\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 1 \leqslant v \leqslant 2\ \right\}$.

(d) La fonction vectorielle

$$\mathbf{r}(u,v) = \sqrt{1+u}\sin v\,\mathbf{i} + \sqrt{1+u}\cos v\,\mathbf{j} + \sqrt{\frac{u}{2}}\,\mathbf{k}$$

avec domaine $D = \left\{\ (u,v)\ \middle|\ 2 \leqslant u \leqslant 8,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\ \right\}$.

(e) La fonction vectorielle

$$\mathbf{r}(u,v) = \sqrt{u}\cos v\,\mathbf{i} - \sqrt{u}\sin v\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{2}}\,\mathbf{k}$$

avec domaine $D = \left\{\ (u,v)\ \middle|\ 3 \leqslant u \leqslant 9,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\ \right\}$.

Pour mieux comprendre.

4. Supposons que la surface $\mathcal{S}$ est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et pour laquelle $z \geqslant 0$. Parmi les éléments suivants, lesquels sont des paramétrages de $\mathcal{S}$?

(a)

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = 2\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + 2\cos\phi\,\mathbf{j} + 2\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

(b)

$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + \sqrt{2-x^2-y^2}\,\mathbf{k}, \qquad x^2+y^2 \leqslant 1$$

(c)

$$\mathbf{r}(u,\theta) = u\sin\theta\,\mathbf{i} + u\cos\theta\,\mathbf{j} + \sqrt{2-u^2}\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

(d)

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \sqrt{2}\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos\phi\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

(e)

$$\mathbf{r}(\phi,z) = -\sqrt{2-z^2}\sin\phi\,\mathbf{i} + \sqrt{2-z^2}\cos\phi\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi,\ 1 \leqslant z \leqslant \sqrt{2}$$

5. Soit $\mathcal{S}$ la partie du paraboloïde $z + x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$. Pour chacun des éléments suivants, indiquer s'il paramètre correctement ou non la surface $\mathcal{S}$.

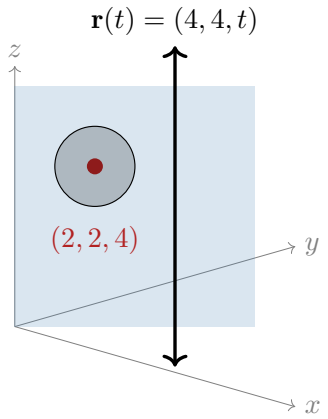
(a) $\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + (4-u^2-v^2)\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u^2+v^2 \leqslant 1$

(b) $\mathbf{r}(u,v) = (\sqrt{4-u}\,\cos v)\,\mathbf{i} + (\sqrt{4-u}\,\sin v)\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

(c) $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v)\,\mathbf{i} + (u\sin v)\,\mathbf{j} + (4-u^2)\,\mathbf{k}$, $\sqrt{3} \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

6.

Dans cet exercice, on cherche à paramétrer une surface de révolution obtenue en faisant tourner une courbe plane autour d'une droite qui n'est pas l'un des axes de coordonnées. On considère la droite $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, parallèle à l'axe des z, et le cercle de rayon 1 centré en $(2,2,4)$ et situé dans le plan $x = y$, qui contient cette droite (voir la figure ci-contre).



(a) Donner un paramétrage de ce cercle.

(b) Donner un paramétrage de la surface obtenue en faisant tourner ce cercle autour de la droite.

7. Pour les surfaces données par les paramétrages suivants, donner une équation du plan tangent au point spécifié.

(a) $\mathbf{r}(u,v) = 2u\,\mathbf{i} + (u^2+v)\,\mathbf{j} + v^2\,\mathbf{k}$ au point $(0,1,1)$

(b) $\mathbf{r}(u,v) = u^2\,\mathbf{i} + u\sin e^v\,\mathbf{j} + \frac{1}{3}u\cos e^v\,\mathbf{k}$ au point $(13,-2,1)$

8. Trouver une équation du plan tangent à la surface donnée par $\mathbf{r}(u,v) = u^2\mathbf{i} + v^2\mathbf{j} + (u^2+v^2)\mathbf{k}$ au point correspondant à $(u,v) = (1,1)$.

9. Soit $\mathcal{S}$ la surface donnée par $z = 3x^2 + 8xy$.

(a) La surface est le graphe d'une fonction de deux variables. Utiliser ceci pour trouver

une équation du plan tangent au point $(1, 0, 3)$.

(b) Trouver un paramétrage de $\mathcal{S}$ et l'utiliser pour trouver l'équation du plan tangent au point $(1, 0, 3)$.

10. Soit $\mathcal{S}$ la surface $\mathbf{r}(u, \theta) = u\cos\theta\,\mathbf{i} + u\sin\theta\,\mathbf{j} + \theta\,\mathbf{k}$ avec $0 \leqslant u \leqslant 1$ et $0 \leqslant \theta \leqslant 4$.

(a) Esquisser et décrire la surface $\mathcal{S}$.

(b) Trouver un vecteur normal unitaire à $\mathcal{S}$ en un point quelconque $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$.

(c) Trouver l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point (x_0, y_0, z_0).

(d) Si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$, montrer que le segment de longueur 1 joignant (x_0, y_0, z_0) à l'axe des z est contenu dans $\mathcal{S}$ et dans le plan tangent trouvé précédemment.

11. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de rayon 2 centrée à l'origine. Calculer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $(1, 1, \sqrt{2})$ en considérant $\mathcal{S}$ comme :

(a) une surface paramétrée par $\mathbf{r}(\theta, \phi) = 2\cos\theta\,\sin\phi\,\mathbf{i} + 2\sin\theta\,\sin\phi\,\mathbf{j} + 2\cos\phi\,\mathbf{k}$;

(b) une surface de niveau de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

(c) le graphe de la fonction $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

12. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

(a) Trouver un paramétrage de $\mathcal{H}$.

(b) Trouver une équation du plan tangent à $\mathcal{H}$ au point $(x_0, y_0, 0)$ (où $x_0^2 + y_0^2 = 25$).

(c) Montrer que les droites passant par $(x_0, y_0, 0)$ et dirigées par les vecteurs $\mathbf{u} = -y_0\,\mathbf{i} + x_0\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$ et $\mathbf{v} = y_0\,\mathbf{i} - x_0\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$ sont contenues dans $\mathcal{H}$ et dans le plan tangent calculé dans la partie précédente.

Pour aller plus loin.

13. Une surface peut être paramétrée par une application $\mathbf{r} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$, où $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Les résultats vus au chapitre 2 suggèrent que la dérivée de $\mathbf{r}$ devrait donner une approximation linéaire correspondant au plan tangent. Dans ce problème, ceci sera démontré.

Soit $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ un paramétrage d'une surface $\mathcal{S}$, où $\mathbf{r}$ est différentiable. On dénote par $\mathbf{r}_u$ et $\mathbf{r}_v$ les dérivées partielles de $\mathbf{r}$.

(a) Sous l'hypothèse que $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$, montrer que l'image de la transformation linéaire donnée par $\mathbf{Dr}(u_0, v_0)$ (c'est l'espace colonne de cette matrice) est le plan engendré par $\mathbf{r}_u$ et $\mathbf{r}_v$.

(b) Montrer qu'un vecteur $\mathbf{w}$ est orthogonal à $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ si et seulement s'il se trouve dans l'image de $\mathbf{Dr}(u_0, v_0)$.

(c) Démontrer que le plan tangent à la surface est le plan donné (voir ceci comme une surface paramétrée) par

$$(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u_0, v_0) + \mathbf{Dr}(u_0, v_0) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}.$$

4.7 Intégrales de surface

Comme pour les intégrales de ligne, nous allons définir et étudier deux types d'intégrales de surface :

- Intégrales d'une fonction à valeurs scalaires, c'est-à-dire de la forme $\iint_{\mathcal{S}} \rho\, dS$, qui sont utilisées pour calculer des aires ou, si ρ est une densité de masse, la masse d'une surface $\mathcal{S}$.
- Intégrales de la forme $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$, où $\mathbf{n}(x,y,z)$ est un vecteur unitaire normal à la surface $\mathcal{S}$ au point (x,y,z). Celles-ci sont appelées des « intégrales de flux ». Nous verrons que, lorsque $\mathbf{v}$ est le champ de vitesses d'un fluide et que ρ est la densité du fluide, alors $\iint_{\mathcal{S}} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS$ est le taux avec lequel le fluide traverse la surface $\mathcal{S}$.

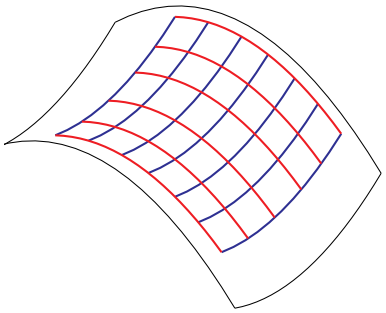
Intégrales de surface

Nous commençons par calculer l'élément différentiel de surface, dS, dans les différents contextes que nous avons traités dans la section précédente (surface paramétrée, graphe, ou surface ensemble de niveau).

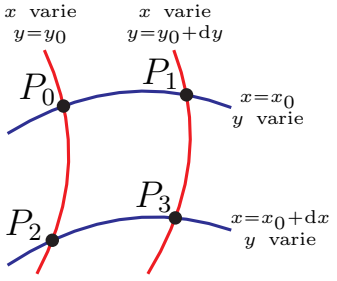
Afin d'illustrer les différentes méthodes, dans les exemples qui suivent, nous considérons la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ (avec $a>0$) et nous calculons l'aire de la portion vérifiant $z\geqslant 0$. On se souvient probablement de l'enseignement secondaire que l'aire cherchée est $\frac{1}{2}\times 4\pi a^2 = 2\pi a^2$. Nous allons voir pourquoi ceci est vrai. Notons pour commencer que, puisque $x^2+y^2=a^2-z^2$ sur l'hémisphère, l'ensemble des (x,y) pour lesquels il existe une valeur de z telle que (x,y,z) se trouve sur l'hémisphère est exactement $\left\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\leqslant a^2\ \right\}$.

Surfaces paramétrées.

Supposons que nous voulons intégrer sur une partie $\mathcal{S}$ d'une surface qui est paramétrée par $\mathbf{r}(u,v)$. Nous commençons par couper $\mathcal{S}$ en petits morceaux, avec des courbes obtenues en laissant le paramètre u constant (les courbes bleues dans la figure), puis en laissant le paramètre v constant (les courbes rouges dans la figure).



Regardons de très près un de ces morceaux, dont voici une esquisse.



Par exemple, la courbe rouge inférieure a été obtenue en laissant v fixe à la valeur v_0, en faisant varier u. Elle correspond à la courbe $\mathbf{r}(u,v_0)$. La courbe rouge supérieure a été construite en laissant v à une valeur légèrement différente, v_0+dv, en faisant varier u. Elle correspond à la courbe $\mathbf{r}(u,v_0+dv)$. Ainsi, les quatre points d'intersection dans la figure sont

$$P_2=\mathbf{r}(u_0,v_0+dv),\qquad P_3=\mathbf{r}(u_0+du,v_0+dv),$$

$$P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0), \qquad P_1 = \mathbf{r}(u_0 + du, v_0).$$

Posons maintenant

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(u_0 + tdU,\, v_0 + tdV),$$

où dU et dV sont des constantes *petites*. Alors, le développement de Taylor donne

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\,(u_0 + dU,\, v_0 + dV) &= \mathbf{R}(1)\\ &\approx \big[\mathbf{R}(0) + \mathbf{R}'(0)\ (t-0)\,\big]_{t=1}\\ &= \mathbf{r}(u_0,\, v_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0)\, dU + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)\, dV.\end{aligned}$$

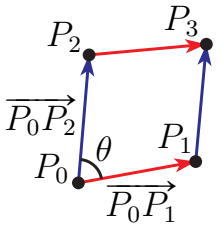
On recommence trois fois : une première avec $dU = du$, $dV = 0$; une deuxième avec $dU = 0$, $dV = dv$; une troisième avec $dU = du$, $dV = dv$.

$$\begin{aligned}P_0 &= \mathbf{r}(u_0,\, v_0)\\ P_1 &= \mathbf{r}(u_0 + du, v_0) && \approx \mathbf{r}(u_0,\, v_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0)\, du\\ P_2 &= \mathbf{r}(u_0, v_0 + dv) && \approx \mathbf{r}(u_0,\, v_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)\, dv\\ P_3 &= \mathbf{r}(u_0 + du, v_0 + dv) && \approx \mathbf{r}(u_0,\, v_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0)\, du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)\, dv\end{aligned}$$

Nous avons ignoré les termes de degré deux et plus dans le développement de Taylor. Lorsque nous prenons la limite avec $du, dv \to 0$, ces termes ont une contribution nulle à l'intégrale que nous allons construire.

Le petit morceau de surface avec les coins P_0, P_1, P_2, P_3 est approximativement un parallélogramme de côtés :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P_1} \approx \overrightarrow{P_2P_3} &\approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0)\, du,\\ \overrightarrow{P_0P_2} \approx \overrightarrow{P_1P_3} &\approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)\, dv.\end{aligned}$$



L'aire de ce parallélogramme est

$$\|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}\| \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0) \right\| dudv.$$

De plus, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0)$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)$ sont des vecteurs tangents aux courbes $\mathbf{r}(t,\, v_0)$ et $\mathbf{r}(u_0,\, t)$ respectivement. Ces deux courbes font partie de $\mathcal{S}$. Ainsi, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0)$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)$ sont tangents à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, et donc le produit vectoriel $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,\, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,\, v_0)$ est orthogonal à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Nous notons alors dS l'aire de ce petit parallélogramme et $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ l'élément vectoriel de surface, où $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface.

Formule 4.7.1

Pour une surface paramétrée par $\mathbf{r}(u, v)$ (différentiable), l'élément vectoriel différentiel de surface est

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,\, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,\, v)\ dudv,$$

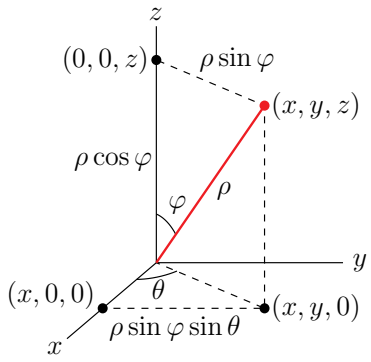
$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,\, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,\, v) \right\| \, dudv.$$

Le signe $\pm$ dans la formule 4.7.1 est là parce qu'il y a deux vecteurs normaux unitaires en chaque point de la surface, un de chaque côté de celle-ci. Normalement, il sera clair, par le contexte, lequel des deux nous devons choisir. Nous y reviendrons.

Exemple 4.7.2 Aire de l'hémisphère, avec les coordonnées sphériques.

Clairement, « intégrer sur une sphère » est quelque chose qui suggère fortement de passer aux coordonnées sphériques. Nous utilisons les coordonnées sphériques pour paramétrer l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$. Les paramètres seront les angles θ, φ, puisque le rayon est fixé.

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta, \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$



Puis, on applique la formule 4.7.1. En coordonnées sphériques, l'équation $x^2+y^2+z^2 = a^2$ devient $\rho^2 = a^2$, et la condition $z \geqslant 0$ est $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Ainsi, l'hémisphère peut être paramétré [a] par

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(\theta, \varphi) = a \sin\varphi \cos\theta\, \mathbf{i} + a \sin\varphi \sin\theta\, \mathbf{j} + a \cos\varphi\, \mathbf{k}, \\ &0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin\varphi \sin\theta \\ a \sin\varphi \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos\varphi \cos\theta \\ a \cos\varphi \sin\theta \\ -a \sin\varphi \end{bmatrix},$$

la formule 4.7.1 donne

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\, dS &= \pm \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} d\theta d\varphi \\ &= \pm \begin{bmatrix} -a \sin\varphi \sin\theta \\ a \sin\varphi \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \cos\varphi \cos\theta \\ a \cos\varphi \sin\theta \\ -a \sin\varphi \end{bmatrix} d\theta d\varphi \\ &= \pm \begin{bmatrix} -a^2 \sin^2\varphi \cos\theta \\ -a^2 \sin^2\varphi \sin\theta \\ -a^2 \sin\varphi \cos\varphi \end{bmatrix} d\theta d\varphi = \mp a^2 \sin\varphi \begin{bmatrix} \sin\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \end{bmatrix} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

et

$$dS = a^2 \sin\varphi \sqrt{\sin^2\varphi \cos^2\theta + \sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^2\varphi}\; d\theta d\varphi$$

$$= a^2 \sin\varphi \; d\theta d\varphi,$$

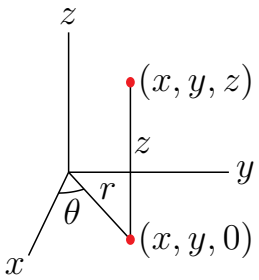
de sorte que l'aire de l'hémisphère est

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\theta \; d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi = 2\pi a^2 \Big[-\cos\varphi \Big]_0^{\pi/2}$$
$$= 2\pi a^2.$$

Exemple 4.7.3 Aire de l'hémisphère, avec les coordonnées cylindriques.

Commençons par paramétrer l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, en utilisant les coordonnées polaires r, θ comme paramètres.

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = z.$$



Puis, on applique la formule 4.7.1. En coordonnées cylindriques, l'équation $x^2+y^2+z^2 = a^2$ devient $r^2 + z^2 = a^2$, et la condition $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ est $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Ainsi, l'hémisphère peut être paramétré par

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + \sqrt{a^2 - r^2}\,\mathbf{k},$$
$$\text{avec} \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \;\; 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Remarquons que nous avons choisi la solution positive $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ de $r^2 + z^2 = a^2$ afin de satisfaire $z \geqslant 0$. Puisque

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

la formule 4.7.1 donne

$$\mathbf{n}\, dS = \pm \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} dr d\theta$$
$$= \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \cos\theta & -r\sin\theta \\ \mathbf{j} & \sin\theta & r\cos\theta \\ \mathbf{k} & -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} & 0 \end{bmatrix} dr d\theta$$
$$= \pm \begin{bmatrix} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ r \end{bmatrix} dr d\theta,$$

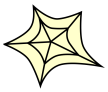
[a] En fait, les coordonnées sphériques présentent un problème lorsque $\varphi = 0$, puisque $\rho = a$, $\varphi = 0$ donnent le même point, à savoir le pôle nord $(0, 0, a)$, pour toutes les valeurs de θ. Nous devrions, en toute rigueur, traiter notre intégrale comme une intégrale impropre, en intégrant d'abord sur $\varepsilon < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ puis en prenant la limite $\varepsilon \to 0^+$. Cependant, cette faille à $\varphi = 0$, tout comme celle des coordonnées polaires à $r = 0$, cause rarement des ennuis, et il est souvent routinier de sauter par-dessus l'étape de l'intégrale impropre.

$$dS = \sqrt{\frac{r^4}{a^2 - r^2} + r^2}\, dr d\theta = \sqrt{\frac{a^2 r^2}{a^2 - r^2}}\, dr d\theta = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr d\theta.$$

Ainsi, l'aire de l'hémisphère est

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, d\theta\, dr &= 2\pi a \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr \\
&= 2\pi a \int_{a^2}^0 \frac{-du/2}{\sqrt{u}} \\
&\qquad\qquad \text{avec } u = a^2 - r^2,\ du = -2r\, dr \\
&= 2\pi a \Big[-\sqrt{u} \Big]_{a^2}^0 \\
&= 2\pi a^2,
\end{aligned}$$

comme on s'y attendait.



À vous de jouer 4.7.4

Évaluez $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS$ où S est la surface hélicoïdale : $\mathbf{r}(u, v) = u\cos(v)\mathbf{i} + u\sin(v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, avec $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$

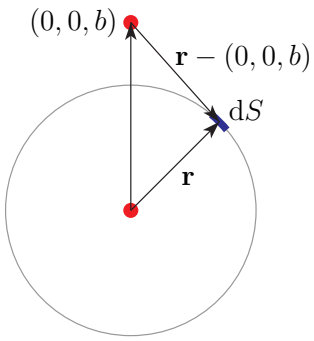
Faisons quelque chose d'un peu plus *céleste*.

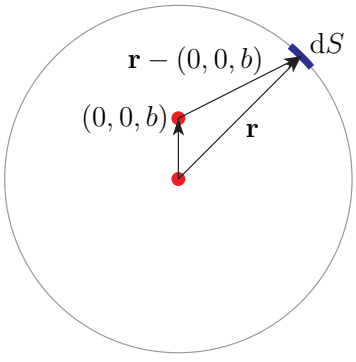
Exemple 4.7.5

Considérons une coquille sphérique de rayon a et de densité de masse μ par unité d'aire. Pensons à une planète creuse. Nous allons déterminer la force gravitationnelle que la planète exerce sur une particule de masse m qui se trouve à une distance b du centre de la planète. La particule peut se trouver soit à l'extérieur de la coquille ($b > a$), soit à l'intérieur de celle-ci ($b < a$). Nous choisissons notre système de coordonnées de sorte que l'origine se trouve au centre de la coquille, et la particule au point $(0, 0, b)$. En vertu de la loi de gravitation, la force exercée sur la particule par une petite portion de surface d'aire dS située à $\mathbf{r}$ est

$$\frac{G\,(\mu dS)\, m}{\|\mathbf{r} - b\,\mathbf{k}\|^3}(\mathbf{r} - b\,\mathbf{k}).$$

Ici, G est la constante gravitationnelle, μdS est la masse de la portion de surface, m est la masse de la particule





et $\mathbf{r} - b\,\mathbf{k}$ est le vecteur de la particule à la portion de surface. Nous travaillons en

coordonnées sphériques, comme nous l'avons fait à l'exemple 4.7.2.

$$dS = a^2 \sin\varphi \, d\varphi d\theta$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= a\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} + a\cos\varphi\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r} - b\,\mathbf{k} &= a\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} + (a\cos\varphi - b)\,\mathbf{k} \\ \|\mathbf{r} - b\,\mathbf{k}\|^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi \end{aligned}$$

La force totale est alors

$$\mathbf{F} = G\mu m a^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{a\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} + (a\cos\varphi - b)\,\mathbf{k}}{\left[a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\right]^{3/2}} \, d\theta \, d\varphi.$$

Notons, pour référence future, que la racine carrée dans $[a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi]^{3/2}$ est la racine carrée *positive* puisque $[b^2 + a^2 - 2ab\cos\varphi]^{1/2}$ est la norme de $\mathbf{r} - b\,\mathbf{k}$.

Cette intégrale est un peu différente de celles que nous avons rencontrées jusqu'à présent. En effet, maintenant, l'intégrande est un vecteur. Par définition, $\iint (\mathbf{A} + \mathbf{B})\, dS = \iint \mathbf{A}\, dS + \iint \mathbf{B}\, dS$, de sorte que

$$\iint_{\mathcal{S}} \left[G_1\,\mathbf{i} + G_2\,\mathbf{j} + G_3\,\mathbf{k}\right] \, dS = \mathbf{i} \iint_{\mathcal{S}} G_1 \, dS + \mathbf{j} \iint_{\mathcal{S}} G_2 \, dS + \mathbf{k} \iint_{\mathcal{S}} G_3 \, dS.$$

Ainsi, nous devons simplement calculer les trois composantes séparément.

Dans notre cas, les composantes $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont nulles. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\mathbf{i} &= G\mu m a^2 \int_0^{\pi} \left[\sin\varphi \, \frac{a\sin\varphi}{\left[a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\right]^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta \right] d\varphi, \\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{j} &= G\mu m a^2 \int_0^{\pi} \left[\sin\varphi \, \frac{a\sin\varphi}{\left[a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\right]^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \right] d\varphi \end{aligned}$$

sont toutes les deux nulles puisque $\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= G\mu m a^2 \mathbf{k} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{a\cos\varphi - b}{\left[a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\right]^{3/2}} \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi G\mu m a^2 \mathbf{k} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, \frac{a\cos\varphi - b}{\left[a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\right]^{3/2}} \, d\varphi. \end{aligned}$$

Pour évaluer cette intégrale, nous remplaçons

$$u = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi, \qquad du = 2ab\sin\varphi\, d\varphi, \qquad \cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - u}{2ab}.$$

Lorsque $\varphi = 0$, $u = (a-b)^2$, et lorsque $\varphi = \pi$, $u = (a+b)^2$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\pi G\mu m a}{b} \mathbf{k} \int_{(a-b)^2}^{(a+b)^2} du \, \frac{\frac{a^2+b^2-u}{2b} - b}{u^{3/2}} \\ &= \frac{\pi G\mu m a}{b} \mathbf{k} \int_{(a-b)^2}^{(a+b)^2} du \, \frac{\frac{a^2-b^2-u}{2b}}{u^{3/2}} \\ &= \frac{\pi G\mu m a}{b} \mathbf{k} \left[\left(\frac{a^2 - b^2}{2b}\right) \frac{u^{-1/2}}{-1/2} - \left(\frac{1}{2b}\right) \frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_{(a-b)^2}^{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Puisque $u^{1/2}$ est la racine *positive*,

$$\mathbf{F} = \frac{\pi G\mu m a}{b}\mathbf{k}\Big[\Big(\frac{b^2-a^2}{b}\Big)\frac{1}{a+b} - \frac{a+b}{b} - \Big(\frac{b^2-a^2}{b}\Big)\frac{1}{|a-b|} + \frac{|a-b|}{b}\Big].$$

Si $b > a$, on aura $|a-b| = b-a$:

$$\mathbf{F} = \frac{\pi G\mu m a}{b}\mathbf{k}\Big[\frac{b-a}{b} - \frac{a+b}{b} - \frac{a+b}{b} + \frac{b-a}{b}\Big] = -\frac{G(4\pi a^2\mu)m}{b^2}\mathbf{k}.$$

Si $b < a$, on aura $|a-b| = a-b$:

$$\mathbf{F} = \frac{\pi G\mu m a}{b}\mathbf{k}\Big[\frac{b-a}{b} - \frac{a+b}{b} + \frac{a+b}{b} + \frac{a-b}{b}\Big] = 0.$$

La morale de cette histoire [a] est que

- si la particule se trouve à l'intérieur de la coquille, elle ne ressentira aucune force gravitationnelle ;
- si la particule se trouve à l'extérieur de la coquille, elle ressentira la force gravitationnelle comme si toute la masse $(4\pi a^2\mu)$ de la coquille était concentrée au centre de celle-ci.

Graphes. Si la surface $\mathcal{S}$ est le graphe de la fonction $z = f(x,y)$, elle peut être paramétrée assez directement au moyen de

$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}.$$

Puisque $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{k}$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{k}$, nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 1 \\ \mathbf{k} & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x(x,y) \\ -f_y(x,y) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la formule 4.7.1 donne :

Formule 4.7.6

Pour la surface $z = f(x,y)$,

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS = \pm\begin{bmatrix} -f_x(x,y) \\ -f_y(x,y) \\ 1 \end{bmatrix} dxdy,$$

$$dS = \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\; dxdy.$$

De la même façon, pour la surface $x = g(y,z)$,

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS = \pm\begin{bmatrix} 1 \\ -g_y(y,z) \\ -g_z(y,z) \end{bmatrix} dydz,$$

$$dS = \sqrt{1 + g_y(y,z)^2 + g_z(y,z)^2}\; dydz,$$

[a] Ces deux résultats sont parus dans le *Principia Mathematica* (1687) de Newton.

et pour la surface $y = h(x,z)$,

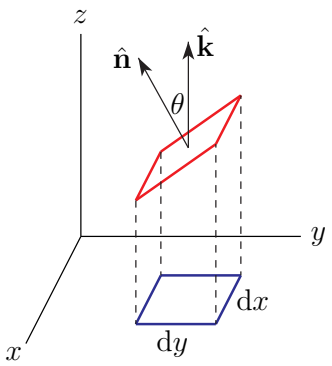
$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS = \pm \begin{bmatrix} -h_x(x,z) \\ 1 \\ -h_z(x,z) \end{bmatrix} dxdz,$$
$$dS = \sqrt{1 + h_x(x,z)^2 + h_z(x,z)^2}\; dxdz.$$

À nouveau, dans une application donnée, on mettra un soin particulier lors du choix pour le vecteur $\mathbf{n}$.

La formule

$$dS = \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\; dxdy$$

dans la formule 4.7.6 admet une interprétation géométrique. Le parallélogramme rouge dans la figure ci-contre représente une petite portion de la surface.



Son aire est $dS = \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\; dxdy$. Le parallélogramme bleu est la projection du rouge dans le plan Oxy. Le vecteur $\mathbf{n}$ est un vecteur normal unitaire pour le parallélogramme rouge. Il est parallèle à

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} -f_x(x,y) \\ -f_y(x,y) \\ 1 \end{bmatrix},$$

de sorte que l'angle θ formé par $\mathbf{n}$ et $\mathbf{k}$ vérifie

$$\cos\theta = \frac{(-f_x(x,y)\,\mathbf{i} - f_y(x,y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}}{\|-f_x(x,y)\,\mathbf{i} - f_y(x,y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\|\; \|\mathbf{k}\|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}}.$$

L'interprétation géométrique de $dS = \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\; dxdy$ est que l'aire dS d'un petit morceau de surface est donnée par l'aire de sa projection sur le plan Oxy multipliée par le facteur $\frac{1}{\cos\theta}$, où θ est l'angle formé par $\mathbf{n}$ (qui est orthogonal à la surface) et par $\mathbf{k}$ (qui est orthogonal au plan Oxy). Notons que

- lorsque θ est près de zéro, ce qui correspond à dire que f est presque constante et donc que notre surface est à peu près parallèle au plan Oxy, dS se réduit, essentiellement, à $dxdy$;
- lorsque $\theta \to \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à dire que f_x ou f_y deviennent très grandes en valeur absolue et donc que notre surface est perpendiculaire au plan Oxy, dS devient « infini fois » $dxdy$. Dans ce cas, nous devrions représenter notre surface plutôt sous la forme $x = g(y,z)$ ou $y = h(x,z)$.

Exemple 4.7.7 Aire de l'hémisphère comme graphe.

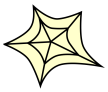
Nous calculons l'aire de l'hémisphère une fois de plus, cette fois en utilisant le fait que l'équation de cette surface est

$$z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \qquad \text{avec } (x,y) \text{ tel que } x^2 + y^2 \leqslant a^2.$$

Ainsi, la formule 4.7.6 donne

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\, dxdy \\ &= \sqrt{1 + \Big(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\Big)^2}\, dxdy \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\, dxdy \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\, dxdy, \end{aligned}$$

de sorte que l'aire est $\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dxdy$. Nous avons déjà calculé, à l'exemple 4.7.3, que cette intégrale vaut $2\pi a^2$.



À vous de jouer 4.7.8

Trouvez l'aire de la portion du plan $4x + 10y + z = 9$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre elliptique $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{100} = 1$

Aire = _____

Surfaces données implicitement. Pour terminer, supposons que la surface est donnée sous la forme $G(x,y,z) = K$, où K est une constante. Supposons de plus que, en un point sur la surface, nous avons $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$. Alors, le théorème 2.5.15 nous dit qu'il existe une fonction $f(x,y)$ telle que $z = f(x,y)$ vérifie

$$G\left(x,y,f(x,y)\right) = K.$$

La dérivation donne alors, grâce au théorème des fonctions composées,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial x}\Big[G\left(x,y,f(x,y)\right)\Big] &= G_x\left(x,y,f(x,y)\right) + G_z\left(x,y,f(x,y)\right)\, f_x(x,y), \\ 0 = \frac{\partial}{\partial y}\Big[G\left(x,y,f(x,y)\right)\Big] &= G_y\left(x,y,f(x,y)\right) + G_z\left(x,y,f(x,y)\right)\, f_y(x,y), \end{aligned}$$

ce qui, à son tour, entraîne

$$f_x(x,y) = -\frac{G_x\left(x,y,f(x,y)\right)}{G_z\left(x,y,f(x,y)\right)}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{G_y\left(x,y,f(x,y)\right)}{G_z\left(x,y,f(x,y)\right)}$$

et

$$\begin{bmatrix} -f_x(x,y) \\ -f_y(x,y) \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{G_z}\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{\nabla} G}{G_z},$$

où les dérivées partielles de G sont évaluées au point $(x,y,f(x,y))$. Ainsi, il vient de la formule 4.7.1 les formules suivantes.

Formule 4.7.9

Pour la surface $G(x,y,z)=K$, lorsque $G_z(x,y,z)\neq 0$,

$$d\mathbf{S}=\mathbf{n}\,dS=\pm\frac{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)}{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)\cdot\mathbf{k}}\,dxdy,$$
$$dS=\left\|\frac{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)}{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)\cdot\mathbf{k}}\right\|\,dxdy.$$

De même, pour $G(x,y,z)=K$, lorsque $G_x(x,y,z)\neq 0$,

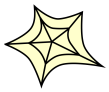
$$d\mathbf{S}=\mathbf{n}\,dS=\pm\frac{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)}{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)\cdot\mathbf{i}}\,dydz,$$
$$dS=\left\|\frac{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)}{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)\cdot\mathbf{i}}\right\|\,dydz,$$

et pour la surface $G(x,y,z)=K$, lorsque $G_y(x,y,z)\neq 0$,

$$d\mathbf{S}=\mathbf{n}\,dS=\pm\frac{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)}{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)\cdot\mathbf{j}}\,dxdz,$$
$$dS=\left\|\frac{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)}{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)\cdot\mathbf{j}}\right\|\,dxdz.$$

Si, en un point (x_0,y_0,z_0), nous avons $G_x(x_0,y_0,z_0)=G_y(x_0,y_0,z_0)=G_z(x_0,y_0,z_0)=0$, nous aurons un problème. Très souvent, ceci est signe que notre surface n'est pas lisse en (x_0,y_0,z_0) et donc que nous n'avons pas un vecteur normal défini sans ambiguïté. On pourra voir l'exemple 4.6.9.

À vous de jouer 4.7.10



Trouver l'aire de la partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=25$ qui se trouve au-dessus du cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemple 4.7.11 Aire de l'hémisphère comme surface de niveau.

Cette fois, nous calculons l'aire de l'hémisphère en exploitant le fait que si (x,y,z) s'y trouve, alors $G(x,y,z)=a^2$ lorsque $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Puisque

$$\boldsymbol{\nabla}G(x,y,z)=\begin{bmatrix}2x\\2y\\2z\end{bmatrix},$$

la formule 4.7.9 donne

$$\begin{aligned}dS&=\left\|\frac{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)}{\boldsymbol{\nabla}G\,(x,y,z)\cdot\mathbf{k}}\right\|\,dxdy\\&=\frac{1}{2|z|}\left\|\begin{bmatrix}2x\\2y\\2z\end{bmatrix}\right\|\,dxdy\\&=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{|z|}\,dxdy\\&=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy,\qquad\text{sur } x^2+y^2+z^2=a^2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'aire est $\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$. Nous avons déjà vu, à l'exemple 4.7.3, que la valeur de cette intégrale est $2\pi a^2$.

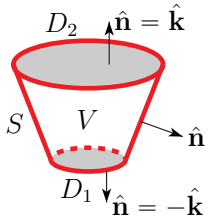
Pour conclure, voyons un autre exemple d'une intégrale de surface qui peut être calculée de deux façons différentes.

Exemple 4.7.12

Calculer $\iint_{\mathcal{S}} x^2y^2z^2\,dS$, où $\mathcal{S}$ est la portion du cône $x^2+y^2=z^2$ vérifiant $0\leqslant z\leqslant 1$.

Solution 1. Nous pouvons exprimer $\mathcal{S}$ comme

$$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\qquad x^2+y^2\leqslant 1.$$



Or, puisque

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

la formule 4.7.6 donne

$$dS=\left[1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right]^{1/2}dxdy=\sqrt{2}\,dxdy.$$

Notre intégrale est donc

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2y^2z^2\,dS=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} x^2y^2(x^2+y^2)\,dxdy.$$

Puisque nous intégrons sur une région circulaire, nous passons aux coordonnées polaires.

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} x^2y^2z^2\,dS&=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2r^2\,dr\,d\theta\\&=\sqrt{2}\left[\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\right]\left[\int_0^1 r^7\,dr\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{32}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)\,d\theta\\&=\frac{\sqrt{2}}{64}\int_0^{2\pi}\big[1-\cos(4\theta)\big]\,d\theta.\end{aligned}$$

Rappelons que les intégrales de $\cos(\theta)$, ou $\cos(4\theta)$, sur une période complète valent 0. Nous obtenons

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2y^2z^2\,dS=\frac{\sqrt{2}}{64}(2\pi)=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}.$$

Solution 2. Nous pouvons paramétrer le cône par

$$\mathbf{r}(z,\theta)=z\cos\theta\,\mathbf{i}+z\sin\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k},\qquad 0\leqslant z\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

Alors, puisque

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -z\sin\theta \\ z\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

la formule 4.7.1 donne

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\,dS &= \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \cos\theta & -z\sin\theta \\ \mathbf{j} & \sin\theta & z\cos\theta \\ \mathbf{k} & 1 & 0 \end{bmatrix} dz d\theta \\ &= \pm \begin{bmatrix} -z\cos\theta \\ -z\sin\theta \\ z \end{bmatrix} dz d\theta, \\ dS &= \sqrt{2}z\; dz d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, notre intégrale devient

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} x^2y^2z^2\,dS &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 z(z\cos\theta)^2(z\sin\theta)^2 z^2\,dz\,d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 z^7\cos^2\theta\sin^2\theta\,dz\,d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta. \end{aligned}$$

Nous avons déjà évalué cette intégrale dans notre première solution, nous obtenons donc, à nouveau,

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2y^2z^2\,dS = \frac{\pi\sqrt{2}}{32}.$$

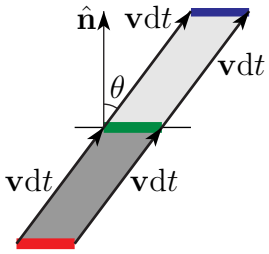
Intégrales de flux

Nous avons défini ci-haut deux types d'intégrales de surface. Nous avons vu quelques exemples d'intégrales de la forme $\iint_{\mathcal{S}} \rho\,dS$. Nous nous concentrons maintenant sur une application des intégrales de la forme $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$. Ces intégrales sont appelées *intégrales de flux*, nous allons voir pourquoi. Imaginons un fluide tel que :

- sa densité en, disons, kilogrammes par mètre cube à la position (x,y,z) et au temps t est $\rho(x,y,z,t)$;
- la vitesse avec laquelle le fluide bouge (disons en mètres par seconde) à la position (x,y,z) et au temps t est $\mathbf{v}(x,y,z,t)$.

Nous allons calculer le taux (disons en kilogrammes par seconde) avec lequel le fluide passe à travers une portion dS de surface à (x,y,z). Pendant un court laps de temps, de durée dt au temps t, le fluide près de dS bouge de $\mathbf{v}(x,y,z,t)dt$.

La ligne verte dans la figure ci-contre est une vision latérale de dS, et $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y, z)$ est un vecteur unitaire normal à dS.



Ainsi, pendant ce court laps de temps,

- la ligne rouge bouge vers la verte, et
- la ligne verte bouge vers la bleue, de sorte que
- le fluide qui remplit la section gris foncé, en dessous de la ligne verte, passe à travers dS et bouge vers la région gris pâle, au-dessus de la ligne verte.

Soit θ l'angle formé par $\mathbf{n}$ et $\mathbf{v}dt$, de sorte que

- le volume de fluide qui passe à travers dS pendant ce laps de temps dt est le volume qui occupe la portion en gris foncé, en dessous de la ligne verte. Cette région a pour base dS et pour hauteur $\|\mathbf{v}dt\| \cos\theta$, de sorte que son volume est

$$\|\mathbf{v}(x, y, z, t)dt\| \cos\theta \; dS = \mathbf{v}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dt \, dS$$

  puisque $\mathbf{n}(x, y, z)$ est unitaire.

- La masse de fluide qui traverse dS pendant ce laps de temps de durée dt est donc

$$\rho(x, y, z, t)\mathbf{v}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dt \, dS,$$

- et le taux avec lequel le fluide traverse la surface dS est

$$\rho(x, y, z, t)\mathbf{v}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS.$$

Lorsque nous intégrons dS sur la surface $\mathcal{S}$, nous arrivons à la conclusion suivante.

Lemme 4.7.13

Le taux avec lequel le fluide (en masse) traverse la surface $\mathcal{S}$ est l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z, t)\mathbf{v}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS.$$

Ici, ρ est la densité du fluide, $\mathbf{v}$ le champ de vitesses, et $\mathbf{n}(x, y, z)$ un vecteur normal unitaire à $\mathcal{S}$ en (x, y, z). Si l'intégrale de flux est positive, le fluide traverse dans la direction de $\mathbf{n}$. Si le flux est négatif, le fluide traverse dans la direction opposée à celle de $\mathbf{n}$. Le taux avec lequel le fluide (en volume) traverse la surface $\mathcal{S}$ est l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS.$$

Plus généralement, nous définissons les intégrales de flux des champs de vecteurs à travers une surface orientée en s'inspirant de ce qui précède.

Définition 4.7.14

Soit $\mathcal{S}$ une surface lisse orientée par un vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$ et $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur une région dont l'intérieur contient $\mathcal{S}$. Alors, **l'intégrale de flux** de $\mathbf{F}$ à travers $\mathcal{S}$ est définie comme

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Remarque 4.7.15 Orientabilité des surfaces.

L'hypothèse que $\mathcal{S}$ soit *orientée* n'est pas superflue : il existe des surfaces sur lesquelles il est impossible de choisir un vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$ qui varie continûment et qui revient à sa valeur de départ une fois qu'on a parcouru toute la surface. L'exemple le plus célèbre est le **ruban de Möbius**[a].

En suivant les vecteurs normaux le long de la courbe centrale ($s = 0$) du ruban, on constate qu'après un tour complet (t parcourant $[0, 2\pi]$), le vecteur normal pointe dans la direction *opposée* à celle de départ. Il est donc impossible de définir une intégrale de flux sur le ruban de Möbius tout entier : le résultat dépendrait du point choisi pour amorcer le tour.

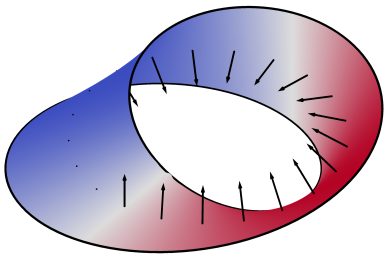


Figure 4.7.16 Le ruban de Möbius et son vecteur normal

Naturellement, la formule explicite à utiliser pour effectuer le calcul dépendra de la façon dont la surface $\mathcal{S}$ est spécifiée : surface paramétrée (formule 4.7.1), graphe (formule 4.7.6) ou surface donnée implicitement (formule 4.7.9).

Formule 4.7.17

Soit $\mathcal{S}$ une surface lisse et $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ un champ de vecteurs. Alors,

(a) Si $\mathcal{S}$ est donnée paramétriquement par $\mathbf{r}(u, v)$ pour $(u, v) \in \mathcal{R}$, alors le vecteur normal unitaire est $\pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$, et donc

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA. \qquad (*)$$

Ici, dA réfère à l'élément différentiel dans l'espace des paramètres, c'est donc $du\,dv$ ou $dv\,du$.

(b) Si $\mathcal{S}$ est un graphe donné par $z = f(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors $\mathbf{n} = \pm \frac{-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$, et donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \pm \iint_{\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot (-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k})\, dA \qquad (**) \\ &= \pm \iint_{\mathcal{R}} (-P\, f_x - Q\, f_y + R)\, dA. \end{aligned}$$

Ici, dA réfère à l'élément différentiel dans le domaine de f, c'est donc $dx\,dy$ ou $dy\,dx$.

[a] Voir aussi l'annexe D.5, où ce ruban est construit et tracé.

(c) *Si $\mathcal{S}$ est donnée par $G = K$ avec $G_z \neq 0$ et $\mathcal{R}$ est la projection de $\mathcal{S}$ sur le plan xy, alors*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot \frac{\boldsymbol{\nabla} G}{|\boldsymbol{\nabla} G \cdot \mathbf{k}|}\, dA. \qquad (***)$$

Ici, dA réfère à l'élément différentiel dans le plan de la projection $\mathcal{R}$, c'est donc $dx\,dy$ ou $dy\,dx$. Si la surface $\mathcal{S}$ est projetée sur un autre des plans de coordonnées, il faudra ajuster le terme $\cdot\mathbf{k}$ apparaissant dans la formule, puis dA en conséquence.

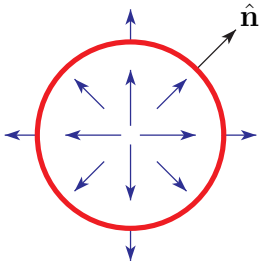
Exemple 4.7.18 Source ponctuelle.

À l'exemple 4.1.7, nous avons trouvé que le champ de vecteurs d'une source ponctuelle en trois dimensions qui crée $4\pi m$ litres par seconde est

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \frac{m}{r(x,y,z)^2}\,\hat{\mathbf{r}}(x,y,z),$$

où

$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\hat{\mathbf{r}}(x,y,z) = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$



Nous l'avons esquissé dans la figure 4.1.8. Nous allons maintenant calculer le flux de ce champ à travers une sphère qui est centrée à l'origine. Supposons que son rayon est R.

Le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur [a] au point (x,y,z) sur la sphère est

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \hat{\mathbf{r}}(x,y,z) = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{R}.$$

Notons que $\hat{\mathbf{r}}(x,y,z)\cdot\hat{\mathbf{r}}(x,y,z) = 1$ et que, sur la sphère, $r(x,y,z) = R$. Ainsi, le flux de $\mathbf{v}$ vers l'extérieur de la sphère est

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \iint_{\mathcal{S}} \frac{m}{r(x,y,z)^2}\,\hat{\mathbf{r}}(x,y,z)\cdot\hat{\mathbf{r}}(x,y,z)\, dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \frac{m}{R^2}\, dS = \frac{m}{R^2} 4\pi R^2 \\ &= 4\pi m,\end{aligned}$$

c'est-à-dire le taux avec lequel le volume du fluide quitte la sphère. Lorsque nous avons construit ce champ de vecteurs, nous avons pris pour acquis que le fluide est incompressible, de sorte que ce taux est le même que le taux avec lequel la source crée le fluide.

[a] Le choix du vecteur normal unitaire n'est pas important en soi, ce qui importe est de faire preuve de clarté dans la convention et dans la direction choisie.

À vous de jouer 4.7.19

Calculez le flux du champ vectoriel $\mathbf{F} = 3x\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j}$ à travers la surface S, qui est la portion de la surface $z = 9 - (x^2 + y^2)$ au-dessus du disque de rayon 3 centré à l'origine, orientée vers le haut.

Flux = _____

Exemple 4.7.20

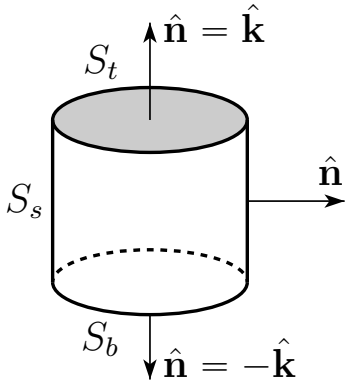
Évaluer $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y + z)\,\mathbf{j} + (x + z)\,\mathbf{k},$$

$\mathcal{S}$ est la frontière de $\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ 0 \leqslant z \leqslant 5 \right\}$ et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur [a] de $\mathcal{S}$.

Solution

Le solide $\mathcal{V}$ a l'air d'une boîte de conserve mince de rayon 3 et de hauteur 5.



Il est naturel de décomposer la surface en trois parties :

$$\mathcal{S}_t = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ z = 5 \right\} = \text{le haut},$$
$$\mathcal{S}_b = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ z = 0 \right\} = \text{le bas},$$
$$\mathcal{S}_s = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 = 9,\ 0 \leqslant z \leqslant 5 \right\} = \text{le côté}.$$

Nous allons calculer le flux à travers chacune de ces portions séparément, puis nous allons additionner ces résultats.

Le haut : Sur la partie du haut, le vecteur normal unitaire qui pointe vers l'extérieur de $\mathcal{S}$ est $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ et $dS = dxdy$. Ceci est probablement clair intuitivement, mais, si ce n'est pas le cas, voici les détails. La portion du haut est paramétrée par $\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$ avec $x^2 + y^2 \leqslant 9$. Ainsi, le flux à travers $\mathcal{S}_t$ est

$$\iint_{\mathcal{S}_t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS = \iint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant 9 \\ z=5}} (x + z)\; dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 9} (x + 5)\; dxdy.$$

L'intégrale $\iint_{x^2+y^2 \leqslant 9} x\; dxdy = 0$ puisque x est impaire et que le domaine d'intégration est symétrique par rapport à $x = 0$. Ainsi,

$$\iint_{\mathcal{S}_t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 9} 5\; dxdy = 5\pi(3)^2 = 45\pi.$$

Le bas : Sur la partie du bas, le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de $\mathcal{S}_b$ est $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ et $dS = dxdy$. Ainsi, le flux à travers $\mathcal{S}_b$ est

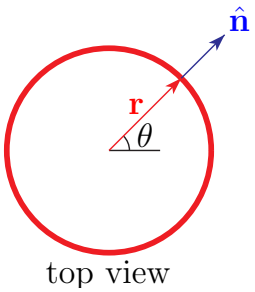
$$\iint_{\mathcal{S}_b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS = -\iint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant 9 \\ z=0}} (x + z)\; dxdy = -\iint_{x^2+y^2 \leqslant 9} x\; dxdy = 0.$$

Le côté : Nous pouvons paramétrer le côté avec les coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{r}(\theta, z) = 3\cos\theta\,\mathbf{i} + 3\sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant 5.$$

Ainsi, en vertu de la formule 4.7.1,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} -3\sin\theta \\ 3\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{n}\,dS &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\,d\theta\,dz \\
&= \begin{bmatrix} 3\cos\theta \\ 3\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} d\theta\,dz.
\end{aligned}$$



Notons que $\mathbf{n} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ est normal à $\mathcal{S}_s$ et pointe vers l'extérieur. Ainsi,

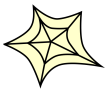
$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\left(x(\theta,z), y(\theta,z), z(\theta,z)\right) &= 3(\cos\theta+\sin\theta)\,\mathbf{i} + (3\sin\theta+z)\,\mathbf{j} + (3\cos\theta+z)\,\mathbf{k}, \\
\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \left\{9\cos^2\theta + 9\sin\theta\cos\theta + 9\sin^2\theta + 3z\sin\theta\right\} d\theta\,dz \\
&= \left\{9 + \frac{9}{2}\sin(2\theta) + 3z\sin\theta\right\} d\theta\,dz,
\end{aligned}$$

de sorte que le flux à travers le côté est

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}_s} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^5 \left(9 + \tfrac{9}{2}\sin(2\theta) + 3z\sin\theta\right) dz\,d\theta \\
&= 9\int_0^{2\pi}\int_0^5 dz\,d\theta \quad \left(\text{car } \int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = 0\right) \\
&= 9\times 2\pi\times 5 = 90\pi.
\end{aligned}$$

Ainsi, le flux total est

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iint_{\mathcal{S}_t} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{\mathcal{S}_b} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{\mathcal{S}_s} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&= 45\pi + 0 + 90\pi = 135\pi.
\end{aligned}$$



À vous de jouer 4.7.21

Calculez le flux du champ vectoriel $\mathbf{F} = xz\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{k}$ vers l'extérieur à travers la surface S découpée dans le cylindre $x^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, par les plans $y = 0$ et $y = 5$.

Indication : utiliser la formule du gradient avec $g(x, y, z) = x^2 + z^2$ et la projection sur le plan Oxy.

Flux = _____

[a] Il est nécessaire qu'un problème donné spécifie d'une façon ou d'une autre si $\mathbf{n}$ pointe vers l'intérieur ou l'extérieur. Sans cela, l'expression $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ est ambiguë.

Exercices

Pour se pratiquer.

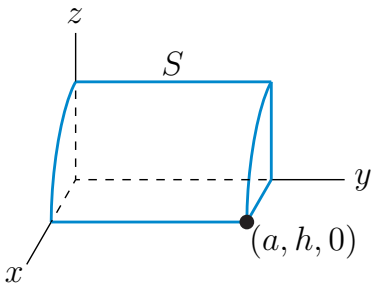
1. Soit $a, b, c > 0$. Dénoter par $\mathcal{S}$ le triangle ayant pour sommets $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ et $(0, 0, c)$.

(a) Trouver l'aire de la surface $\mathcal{S}$ de trois façons différentes, chacune en utilisant la formule 4.7.6.

(b) Dénoter par $\mathcal{T}_{xy}$ la projection de $\mathcal{S}$ sur le plan xy (c'est le triangle ayant pour sommets $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$ et $(0, b, 0)$). De façon similaire, utiliser $\mathcal{T}_{xz}$ pour dénoter la projection de $\mathcal{S}$ sur le plan xz et $\mathcal{T}_{yz}$ pour dénoter la projection de $\mathcal{S}$ sur le plan yz. Montrer que

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) = \sqrt{\text{Aire}(\mathcal{T}_{xy})^2 + \text{Aire}(\mathcal{T}_{xz})^2 + \text{Aire}(\mathcal{T}_{yz})^2}.$$

2. Soit $a, h > 0$. Dénoter par $\mathcal{S}$ la partie du cylindre $x^2 + z^2 = a^2$ avec $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant h$ et $z \geqslant 0$.



(a) Trouver l'aire de la surface $\mathcal{S}$ sans faire de calcul.

(b) Paramétrer $\mathcal{S}$ par

$$\mathbf{r}(\theta, y) = a\cos\theta\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + a\sin\theta\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant h.$$

Trouver l'aire de la surface $\mathcal{S}$ en utilisant la formule 4.7.1.

3. Soit $\mathcal{S}$ la partie de la surface $z = xy$ se trouvant à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 3$. Trouver le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe des z, c'est-à-dire

$$I = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\, dS.$$

4. Évaluer, pour chacun des cas suivants, le flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$, où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à la surface $\mathcal{S}$.

(a) $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$, et la surface $\mathcal{S}$ est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(b) $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, et $\mathcal{S}$ est la surface de la boîte rectangulaire $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ et $0 \leqslant z \leqslant c$.

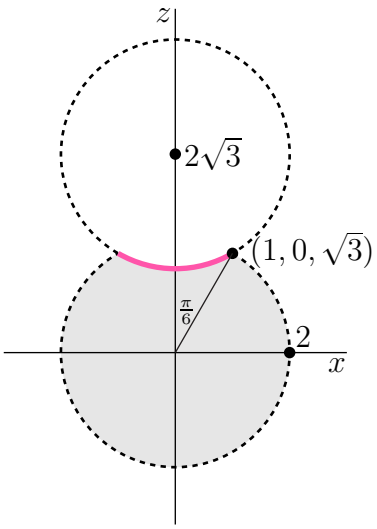
(c) $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{k}$, et $\mathcal{S}$ est la surface du cône solide $0 \leqslant z \leqslant 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pour mieux comprendre.

5.

(a) Pour trouver l'aire d'une surface $z = f(x, y)$ au-dessus d'une région $\mathcal{D}$, on intègre $\iint_{\mathcal{D}} F(x, y)\, dA$. Qu'est-ce que $F(x, y)$ en termes de f ?

(b) Considérer l'« Étoile de la mort », une boule de rayon 2 centrée à l'origine avec une autre boule de rayon 2 centrée à $(0, 0, 2\sqrt{3})$ coupée de celle-ci. Le diagramme ci-contre montre la tranche où $y = 0$.



(i) Les Rebelles veulent peindre une partie de la surface de l'Étoile de la mort en rose vif ; plus précisément la partie concave (indiquée par une ligne épaisse dans le schéma). Pour les aider à déterminer la quantité de peinture nécessaire, remplir soigneusement les parties manquantes de cette intégrale :

$$\text{Aire} = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \square \; dr\, d\theta.$$

(ii) Quelle est l'aire totale de l'Étoile de la mort ?

6. Soit $\mathcal{S}$ la partie de la surface $x^2+y^2+2z = 2$ se trouvant au-dessus du carré $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

(a) Trouver $\iint_{\mathcal{S}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dS$.

(b) Trouver le flux de $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ vers le haut à travers $\mathcal{S}$.

7. Évaluer le flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$, où $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + 1)\,\mathbf{i} + (y + 1)\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{S}$ est la partie du paraboloïde $z = 4-x^2-y^2$ se trouvant au-dessus du triangle $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1-x$. $\mathcal{S}$ est orientée de telle sorte que son vecteur normal unitaire a une composante z négative.

4.8 Le théorème de Stokes

Cette section s'occupe du théorème de Stokes [1], un analogue du théorème de Green, dans sa version tangentielle, mais en trois dimensions. Le résultat lie l'intégrale du rotationnel d'un champ sur une surface de $\mathbb{R}^3$ à l'intégrale du champ le long du bord de cette surface.

Le théorème de Stokes

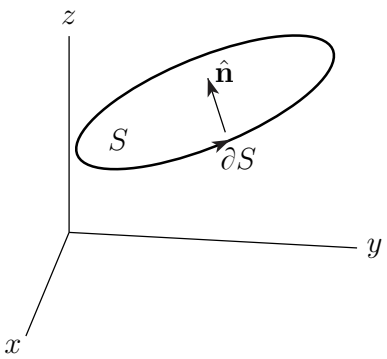
Théorème 4.8.1 Théorème de Stokes.

Soit

- $\mathcal{S}$ *une surface lisse par morceaux, orientée par un vecteur normal unitaire* $\mathbf{n}$ *(de classe* C^1*) ;*

  la frontière $\partial\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{S}$*, formée d'un nombre fini de courbes lisses par morceaux, orientées par l'orientation induite du choix de* $\mathbf{n}$*, c'est-à-dire que :*

  - *lorsqu'on se déplace le long de* $\partial\mathcal{S}$ *dans la direction choisie de* $\partial\mathcal{S}$*,*
  - *avec le vecteur normal* $\mathbf{n}$ *allant des pieds à la tête,*
  - *alors* $\mathcal{S}$ *se trouve à gauche ;*



- $\mathbf{F}$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *sur* $\mathcal{S}$*.*

Alors,

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

Remarque 4.8.2

- Dans le théorème de Stokes, $\mathcal{S}$ doit être une surface orientée, elle ne peut donc pas être un ruban de Möbius ;
- si $\mathcal{S}$ est contenue dans le plan Oxy, alors le théorème de Stokes devient la version tangentielle du théorème de Green ;
- si $\partial\mathcal{S}$ est une courbe fermée simple et que,
  - lorsqu'on regarde $\partial\mathcal{S}$ de la partie positive de l'axe des z, elle est orientée dans le sens antihoraire (voir la figure dans le théorème 4.8.1), alors
  - $\mathbf{n}$ pointe vers le haut, c'est-à-dire qu'il a une composante $\mathbf{k}$ positive près de $\partial\mathcal{S}$.
- Le théorème de Stokes dit que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ pour toute surface (convenablement orientée) dont le bord est $\mathcal{C}$. Ainsi, si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux surfaces différentes (convenablement orientées) qui ont un bord commun $\mathcal{C}$, alors

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

[1] Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), physicien et mathématicien irlandais. En plus du théorème de Stokes, il est connu pour les équations de Navier-Stokes utilisées pour l'étude de la dynamique des fluides.

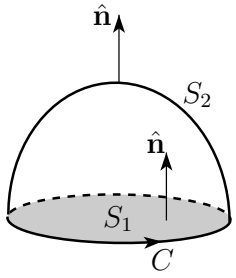
Par exemple, si $\mathcal{C}$ est le cercle

$$\mathcal{C} = \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z=0\ \}$$

orienté dans le sens antihoraire, alors

$$\mathcal{S}_1 = \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ z=0\ \},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{\ (x,y,z) \mid z \geqslant 0,\ x^2+y^2+z^2=1\ \},$$

avec un vecteur normal unitaire pointant vers le haut, ont le cercle $\mathcal{C}$ pour bord. Ainsi, le théorème de Stokes dit que $\iint_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

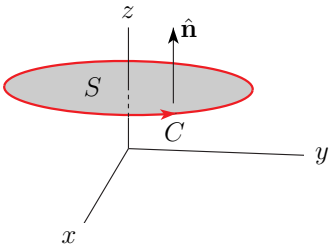


- Notons également que, pour les champs $\mathbf{F}$ tels que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ partout, le théorème de Stokes donne $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ le long de toute courbe fermée $\mathcal{C}$, ce qui entraîne que $\mathbf{F}$ est conservatif, en vertu du théorème 4.4.7. Ainsi, le théorème de Stokes fournit une autre preuve du théorème 4.4.9.

Voyons un premier exemple simple qui illustre comment le théorème de Stokes peut être utile lorsque $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$ peut être simplifié.

Exemple 4.8.3

Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathbf{F} = \left[2z + \sin\left(x^{146}\right)\right]\mathbf{i} - 5z\,\mathbf{j} - 5y\,\mathbf{k}$ et où la courbe $\mathcal{C}$ est le cercle $x^2+y^2=4$ du plan $z=1$, orienté dans le sens antihoraire lorsque vu d'en haut.



Solution. Le terme x^{146} dans $\mathbf{F}$ va vraisemblablement faire que l'évaluation directe de l'intégrale de ligne sera très difficile. Afin d'utiliser le théorème de Stokes, nous avons besoin d'une surface $\mathcal{S}$ telle que $\partial\mathcal{S}=\mathcal{C}$. Le choix le plus simple est le disque

$$\mathcal{S} = \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant 4,\quad z=1\ \}.$$

Puisque

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & 2z+\sin\left(x^{146}\right) \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & -5z \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & -5y \end{bmatrix} = 2\mathbf{j}$$

et que le vecteur normal unitaire à $\mathcal{S}$ est $\mathbf{k}$, le théorème de Stokes donne

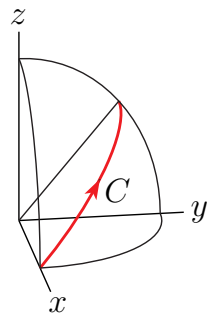
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} (2\mathbf{j})\cdot\mathbf{k}\,dS = 0.$$

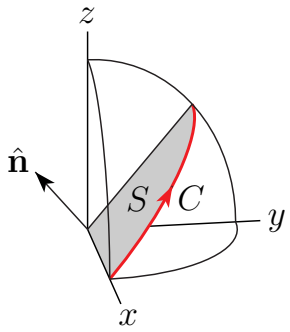
Reprenons l'exemple précédent avec une courbe un peu plus compliquée.

Exemple 4.8.4

Calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathbf{F} = \left[2z + \sin\left(x^{146}\right)\right]\mathbf{i} - 5z\,\mathbf{j} - 5y\,\mathbf{k}$ et où $\mathcal{C}$ est l'intersection de $x^2+y^2+z^2 = 4$ et $z = y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue d'en haut.

Solution. La surface $x^2+y^2+z^2=4$ est la sphère de rayon 2 centrée à l'origine, et $z=y$ est un plan qui contient l'origine. La courbe $\mathcal{C}$ est donc un cercle centré à l'origine et de rayon 2. La portion du cercle qui se trouve dans le premier octant est esquissée dans la figure ci-après.





De nouveau, afin d'utiliser le théorème de Stokes, nous avons besoin d'une surface admettant $\mathcal{C}$ comme bord. Le choix le plus simple semble être le disque

$$\mathcal{S} = \left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\quad z = y\ \right\}.$$

La portion de $\mathcal{S}$ du premier octant est montrée ci-dessus. Nous avons vu dans l'exemple 4.8.3 que

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = 2\mathbf{j},$$

de sorte que le théorème de Stokes donne

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Nous allons évaluer $2\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS$ de deux façons différentes. La première est plus efficace, mais nécessite un peu plus de perspicacité. Puisque $\boldsymbol{\nabla}(z-y) = \mathbf{k}-\mathbf{j}$, le vecteur normal unitaire pour le plan $z-y=0$ (et donc pour $\mathcal{S}$) est $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{k}-\mathbf{j})$. Ainsi, l'intégrande est

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{j}\cdot\left(\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

qui est une constante, et nous n'avons pas besoin de calculer $\mathbf{n}\,dS$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= 2\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\sqrt{2}\iint_{\mathcal{S}} dS = -\sqrt{2}\,\text{Aire}(\mathcal{S}) = -\sqrt{2}\pi\,2^2\\ &= -4\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

Voici une autre façon, en faisant les calculs. Comme $\mathcal{S}$ est contenue dans le plan $z = f(x,y) = y$, nous avons

$$\mathbf{n}\,dS = \pm\left(-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dxdy = \pm(-\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dxdy.$$

Afin d'obtenir le vecteur normal unitaire pointant vers le haut, nous prenons le signe $+$, de sorte que $\mathbf{n}\,dS = (-\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dxdy$. Lorsque (x,y,z) parcourt

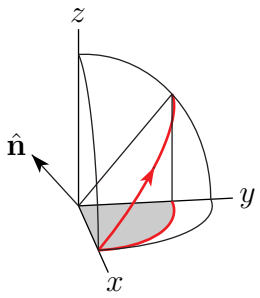
$$\mathcal{S} = \left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\quad z = y\ \right\}$$

$$= \{\ (x,y,z) \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 4, \quad z = y\ \},$$
$$= \{\ (x,y,z) \mid \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{2} \leqslant 1, \quad z = y\ \},$$

(x,y) parcourt le disque elliptique $\mathcal{R} = \{\ (x,y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leqslant 1\ \}$.

La portion de cette ellipse dans le premier octant est la région ombragée dans la figure ci-contre.

Cette ellipse a pour demi-axes $a = 2$ et $b = \sqrt{2}$, de sorte que son aire est $\pi ab = 2\sqrt{2}\pi$.



Ainsi,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2\iint_{\mathcal{R}} \mathbf{j}\cdot(-\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dxdy = -2\iint_{\mathcal{R}} dxdy$$
$$= -2\,\text{Aire}(\mathcal{R}) = -4\sqrt{2}\pi.$$

À vous de jouer 4.8.5

Utilisez le Théorème de Stokes pour évaluer $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ où $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 5(x^2+y^2)\mathbf{k}$ et C est le bord de la portion du paraboloïde $z = 49 - x^2 - y^2$ se trouvant au dessus du plan xy et C est orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsque vue d'en haut.

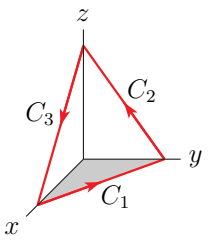
Dans l'exemple suivant nous calculons une intégrale de ligne de deux façons : comme une intégrale de ligne, puis grâce à une intégrale double et le théorème de Stokes.

Exemple 4.8.6

Calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où

$$\mathbf{F} = (x+y)\,\mathbf{i} + 2(x-z)\,\mathbf{j} + (y^2+z)\,\mathbf{k}$$

et où $\mathcal{C}$ est la courbe orientée obtenue en allant de $(2,0,0)$ à $(0,3,0)$ puis à $(0,0,6)$ et en retournant à $(2,0,0)$, le tout en suivant des segments de droite.



Solution 1 (Calcul de l'intégrale de ligne). Dans cette première solution, nous évaluons l'intégrale directement. La première portion ($\mathcal{C}_1$ dans la figure) peut être paramétrée par

$$\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t(3\mathbf{j} - 2\mathbf{i}) = (2-2t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Ainsi, l'intégrale le long de cette première portion est

$$\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$$
$$= \int_0^1 \left[(2+t)\,\mathbf{i} + 2(2-2t)\,\mathbf{j} + (3t)^2\,\mathbf{k}\right]\cdot(-2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j})\,dt$$

$$= \int_0^1 (8 - 14t)\ dt$$
$$= \Big[8t - 7t^2\Big]_0^1 = 1.$$

La deuxième courbe ($\mathcal{C}_2$ dans la figure) peut être paramétrée par

$$\mathbf{r}(t) = 3\mathbf{j} + t(6\mathbf{k} - 3\mathbf{j}) = (3 - 3t)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Ainsi, l'intégrale le long de cette portion est

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\ dt \\
&\quad = \int_0^1 \big[3(1-t)\,\mathbf{i} - 12t\,\mathbf{j} + \big(9(1-t)^2 + 6t\big)\mathbf{k}\big] \cdot (-3\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k})\,dt \\
&\quad = \int_0^1 \left[36t + 54(1-t)^2 + 36t\right] dt \\
&\quad = \Big[18t^2 - 18(1-t)^3 + 18t^2\Big]_0^1 \\
&\quad = 54.
\end{aligned}$$

Le dernier segment ($\mathcal{C}_3$ dans la figure) peut être paramétré par

$$\mathbf{r}(t) = 6\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} - 6\mathbf{k}) = 2t\mathbf{i} + (6 - 6t)\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Ainsi, l'intégrale de ligne le long de ce segment est

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\ dt \\
&\quad = \int_0^1 \big[2t\,\mathbf{i} + \big(4t - 12(1-t)\big)\mathbf{j} + 6(1-t)\,\mathbf{k}\big] \cdot (2\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{k})\,dt \\
&\quad = \int_0^1 \left[4t - 36(1-t)\right] dt \\
&\quad = \Big[2t^2 + 18(1-t)^2\Big]_0^1 = -16.
\end{aligned}$$

Globalement, l'intégrale qui nous intéresse est donc

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1 + 54 - 16 = 39.$$

Solution 2 (Calcul de l'intégrale de surface). Cette fois, nous utilisons le théorème de Stokes. Le rotationnel de $\mathbf{F}$ est

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & x + y \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & 2(x - z) \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & y^2 + z \end{bmatrix} \\
&= (2y + 2)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (2 - 1)\mathbf{k} \\
&= 2(y + 1)\mathbf{i} + \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est un triangle contenu dans le plan $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$. De plus, $\mathcal{C}$ est la frontière de la surface $\mathcal{S}$ qui consiste en la portion du plan $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$ vérifiant $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et

$z \geqslant 0$. Nous pouvons écrire l'équation du plan sous la forme $z = 6 - 3x - 2y$. Pour cette surface,

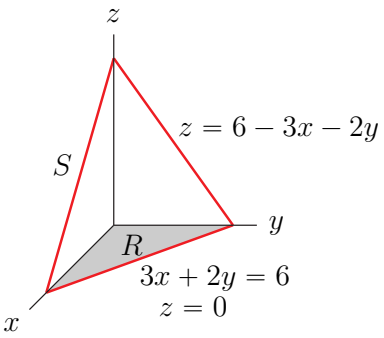
$$\mathbf{n}\, dS = (3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy,$$

en vertu de la formule 4.7.6, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{\ (x,y,z) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ z = 6 - 3x - 2y\ \} \\ &= \{\ (x,y,z) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0,\ 6 - 3x - 2y \geqslant 0,\ z = 6 - 3x - 2y\ \}.\end{aligned}$$

Lorsque (x,y,z) parcourt $\mathcal{S}$, (x,y) parcourt le triangle

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{\ (x,y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 3x + 2y \leqslant 6\ \} \\ &= \{\ (x,y) \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{3}{2}(2 - x)\ \}.\end{aligned}$$



Nous calculons alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \big[2(y+1)\,\mathbf{i} + \mathbf{k}\big]\cdot(3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}} [6y + 7]\ dx\, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}(6-2y)} [6y + 7]\ dx\, dy \\ &= \int_0^3 \frac{1}{3}[6y + 7][6 - 2y]\, dy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 dy\ [-12y^2 + 22y + 42] \\ &= \frac{1}{3}\Big[-4y^3 + 11y^2 + 42y\Big]_0^3 \\ &= \big[-4 \times 9 + 11 \times 3 + 42\big] = 39.\end{aligned}$$



À vous de jouer 4.8.7

Utilisez le Théorème de Stokes afin de trouver la circulation de $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$ autour du bord de la surface S donnée par $z = 25 - x^2$ pour $0 \leq x \leq 5$ et $-2 \leq y \leq 2$, orientée vers le haut.

Esquissez S et son bord C.

Circulation $= \displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} =$ _____

Voyons un exemple dans lequel notre attention sera dirigée surtout sur le champ à intégrer.

Exemple 4.8.8

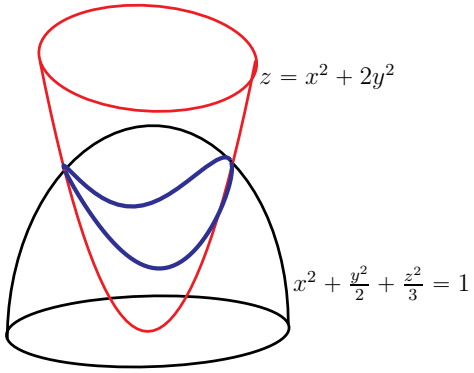
Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, où

$$\mathbf{F} = (\cos x + y + z)\,\mathbf{i} + (x + z)\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$$

et où $\mathcal{C}$ est l'intersection des surfaces

$$x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1, z = x^2 + 2y^2,$$

orientée dans le sens antihoraire lorsque vue d'en haut.



Solution. Pour commencer, faisons une esquisse de la courbe. La surface d'équation $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$ est un ellipsoïde centré à l'origine, et $z = x^2 + 2y^2$ est un paraboloïde qui s'ouvre vers le haut. Ils sont esquissés dans la figure accompagnant l'énoncé.

Leur intersection, la courbe $\mathcal{C}$, est la courbe bleue dans la figure, c'est une espèce de cercle déformé [a].

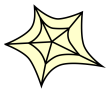
On peut paramétrer $\mathcal{C}$, par exemple en substituant $x^2 = z - 2y^2$ dans l'équation de l'ellipsoïde, ce qui donne $-\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{3}\left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$. On peut alors résoudre pour obtenir y comme fonction de z, puis $x^2 = z - 2y^2$ donne aussi x en fonction de z. Cependant, ceci va mener, au mieux, à une intégrale pas très sympathique. Essayons plutôt le théorème de Stokes.

Nous avons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & \cos x + y + z \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x + z \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & x + y \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{i}\,(1 - 1) - \mathbf{j}\,(1 - 1) + \mathbf{k}\,(1 - 1) \\ &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

de sorte que $\mathbf{F}$ est conservatif (en fait, $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$, pour $f(x, y, z) = (\sin x + xy + xz + yz)$). Comme $\mathcal{C}$ est une courbe fermée, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

À vous de jouer 4.8.9

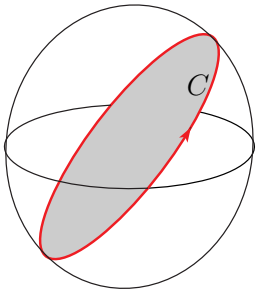


Utilisez le théorème de Stokes pour évaluer $\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, où $\mathbf{F}(x, y, z) = -19yz\mathbf{i} + 19xz\mathbf{j} + 16(x^2 + y^2)z\mathbf{k}$ et $\mathcal{S}$ est la portion du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$, orienté vers le haut.

[a] Cherchez « La Persistance de la mémoire », puis regardez la montre suspendue sur la branche de l'arbre.

Exemple 4.8.10

Dans cet exemple, on calcule de deux façons différentes l'intégrale de ligne $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}$ est la courbe d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $z = y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue d'en haut.



Le champ est $\mathbf{F} = (z - y)\,\mathbf{i} - (x + z)\,\mathbf{j} - (x + y)\,\mathbf{k}$.

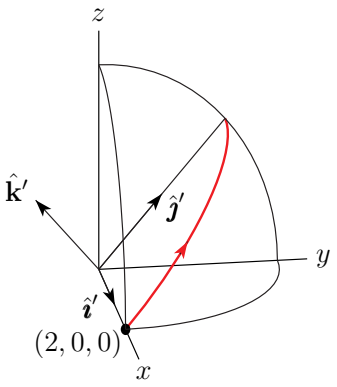
Solution 1 (Intégrale de ligne). *Calcul direct :*

Dans ce premier calcul, on utilise un paramétrage de $\mathcal{C}$. Le plan $z = y$ passe par l'origine, qui est le centre de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est un cercle qui, comme la sphère, a un rayon égal à 2 et est centré à l'origine. Nous paramétrons $\mathcal{C}$ par

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c} + \rho \cos t\,\mathbf{i}' + \rho \sin t\,\mathbf{j}', \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

où

- $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ est le centre de $\mathcal{C}$;
- $\rho = 2$ est le rayon de $\mathcal{C}$;
- $\mathbf{i}'$ et $\mathbf{j}'$ sont deux vecteurs
  (a) unitaires ;
  (b) parallèles au plan $z = y$;
  (c) orthogonaux.



La partie la plus difficile est de trouver ces vecteurs $\mathbf{i}'$ et $\mathbf{j}'$.

- Le point $(2, 0, 0)$ vérifie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $z = y$, de sorte qu'il se trouve sur $\mathcal{C}$. Nous pouvons choisir $\mathbf{i}'$ comme un vecteur unitaire parallèle au vecteur joignant le centre du cercle $(0, 0, 0)$ à $(2, 0, 0)$, c'est-à-dire $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$.
- Puisque le plan contenant le cercle est $z - y = 0$, le vecteur $\boldsymbol{\nabla}(z - y) = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$ est orthogonal à ce plan. Ainsi, $\mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{j} + \mathbf{k})$ est un vecteur normal unitaire pour le plan $z = y$. Ainsi, $\mathbf{j}' = \mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times \mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ est un vecteur qui est orthogonal à $\mathbf{i}'$ et à $\mathbf{k}'$. Comme $\mathbf{j}'$ est orthogonal à $\mathbf{k}'$, il est parallèle au plan $z = y$.

En remplaçant $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, $\rho = 2$, $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$ et $\mathbf{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} + \mathbf{k})$, on trouve

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\,\mathbf{k},$$
$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Afin de vérifier que ce paramétrage est correct, notons que $x = 2\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$, $z = \sqrt{2}\sin t$ vérifie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $z = y$.

À $t = 0$, $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}$. Lorsque t croît, $z(t) = \sqrt{2}\sin t$ croît aussi, et $\mathbf{r}(t)$ bouge vers le haut, vers $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\mathbf{k}$. Ceci donne donc la bonne orientation antihoraire. Nous pouvons maintenant intégrer.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \begin{bmatrix} 2\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \\ \sqrt{2}\sin t \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} -2\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\cos t \end{bmatrix}, \\
\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) &= \begin{bmatrix} z(t)-y(t) \\ -x(t)-z(t) \\ -x(t)-y(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos t+\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t+\sqrt{2}\sin t \end{bmatrix}, \\
\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)\cdot\mathbf{r}\,'(t) &= -\left[4\sqrt{2}\cos^2 t + 4\cos t\sin t\right] \\
&= -\left[2\sqrt{2}\cos(2t) + 2\sqrt{2} + 2\sin(2t)\right].
\end{aligned}$$

En vertu des formules des angles doubles, $\sin(2t) = 2\sin t\,\cos t$ et $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)\cdot\mathbf{r}\,'(t)\;dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\left[2\sqrt{2}\cos(2t) + 2\sqrt{2} + 2\sin(2t)\right]\;dt \\
&= -\Big[\sqrt{2}\sin(2t) + 2\sqrt{2}t - \cos(2t)\Big]_0^{2\pi} \\
&= -4\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

Voyons une autre façon de procéder.

Solution 2 (Théorème de Stokes). *Théorème de Stokes*

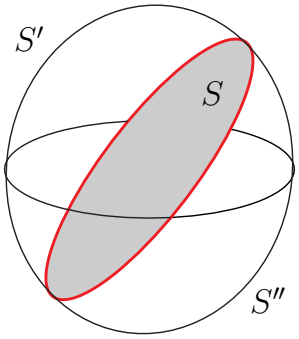
Afin d'utiliser le théorème de Stokes, nous devons exprimer $\mathcal{C}$ comme le bord $\partial\mathcal{S}$ d'une surface $\mathcal{S}$. Puisque

$$\mathcal{C} = \left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z = y\ \right\}$$

est une courbe fermée, ceci est possible. En fait, nous avons plusieurs choix pour $\mathcal{S}$. Trois possibilités, esquissées ci-contre, sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z = y\ \right\}, \\
\mathcal{S}' &= \left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geqslant y\ \right\}, \\
\mathcal{S}'' &= \left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \leqslant y\ \right\}.
\end{aligned}$$

La première de ces surfaces, qui fait partie d'un plan, est la plus susceptible de donner lieu à des calculs simples.



Afin de nous préparer, calculons $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$ et $\mathbf{n}\,dS$. Pour le dernier, nous appliquons la formule $\mathbf{n}\,dS = \pm(-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dxdy$ (de la formule 4.7.6) à la surface $z = f(x,y) = y$. Nous choisissons le signe $+$ pour avoir le vecteur normal pointant vers le haut.

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & z-y \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & -x-z \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & -x-y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{i}\,(-1-(-1)) - \mathbf{j}\,(-1-1) + \mathbf{k}\,(-1-(-1)) \\ &= 2\,\mathbf{j} \\ \mathbf{n}\,dS &= (-\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dxdy \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= 2\,\mathbf{j}\cdot(-\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dxdy = -2\,dxdy. \end{aligned}$$

Les variables d'intégration sont x et y. Par définition, le domaine d'intégration est

$$\mathcal{R} = \big\{\ (x,y)\ \big|\ (x,y,z) \text{ est dans } \mathcal{S} \text{ pour un certain } z\ \big\}.$$

Afin de déterminer ce domaine plus précisément, observons que, puisque $z = y$ sur $\mathcal{S}$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ équivaut à $x^2+2y^2 \leqslant 4$ sur $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \big\{\ (x,y,z)\ \big|\ x^2+2y^2 \leqslant 4,\ z=y\ \big\} \implies \mathcal{R} = \big\{\ (x,y)\ \big|\ x^2+2y^2 \leqslant 4\ \big\}.$$

Ainsi, le domaine d'intégration est une ellipse de demi-grand axe $a = 2$ et de demi-petit axe $b = \sqrt{2}$, de sorte que son aire est $\pi ab = 2\sqrt{2}\pi$. L'intégrale est alors

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{\mathcal{R}} (-2)\,dxdy = -2\,\text{Aire}(\mathcal{R}) = -4\sqrt{2}\pi.$$

Théorème de Stokes, prise 2

Puisque l'intégrande est une constante (après *Stokage*, pas l'intégrande original) et que $\mathcal{S}$ est si simple (nous avons fait de bons choix !), nous pouvons évaluer l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ sans calculer dS explicitement ni même établir les bornes d'intégration. Nous avons $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = 2\,\mathbf{j}$. Puisque $\mathcal{S}$ est la surface de niveau $z-y=0$, le gradient $\boldsymbol{\nabla}(z-y) = -\mathbf{j}+\mathbf{k}$ est normal à $\mathcal{S}$. Ainsi, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{j}+\mathbf{k})$ et

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} (2\mathbf{j})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} -\sqrt{2}\,dS = -\sqrt{2}\,\text{Aire}(\mathcal{S}). \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{S}$ est un disque de rayon 2, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -4\sqrt{2}\pi$, encore une fois.

Voyons maintenant un exemple pour lequel il faut travailler un peu plus pour trouver la surface qui permet d'effectuer les calculs.

Exemple 4.8.11

Soit $\mathbf{F} = \big(z^2-\cos(x^2)\big)\,\mathbf{i} + \big(x^2-\sin(y^2)\big)\,\mathbf{j} + \big(xy-\tan(z^2)\big)\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 4\sin^2 t\,\mathbf{k}$, pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer la valeur de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Solution. Notons pour commencer que la courbe est fermée et simple. Le calcul de l'intégrale de ligne risque d'être ardu, en raison des termes $\cos(x^2)$, $\sin(y^2)$ et $\tan(z^2)$.

Afin d'utiliser le théorème de Stokes, il faudrait identifier une surface $\mathcal{S}$ telle que $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$. En général, plusieurs choix sont possibles. Dans notre exemple, les composantes du chemin sont $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$ et $z(t) = 4\sin^2 t$. Ces composantes vérifient $z(t) = y(t)^2$, de sorte que notre courbe se trouve sur le cylindre parabolique $z = y^2$. Soit donc $\mathcal{S}$ la portion de ce cylindre qui est limitée par $\mathcal{C}$.

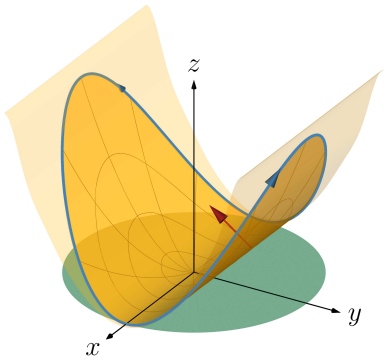


Figure 4.8.12 La courbe $\mathcal{C}$ et une surface $\mathcal{S}$ dont elle est le bord, orientée par le vecteur rouge ; en vert, le domaine $\mathcal{R}$.

Le théorème de Stokes nous donne alors

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}.$$

Calculons le rotationnel de notre champ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & z^2-\cos(x^2) \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x^2-\sin(y^2) \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & xy-\tan(z^2) \end{vmatrix} \\ &= x\,\mathbf{i} + (-y+2z)\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

La surface $\mathcal{S}$ est le graphe de la fonction $f(x,y) = y^2$ avec $(x,y)\in\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est définie par $x^2+y^2 \leqslant 2^2$.

Le paramétrage donné de $\mathcal{C}$ lui impose une orientation. Lorsque vue d'en haut (avec le vecteur $\mathbf{k}$ pointant vers nous), $\mathcal{C}$ est parcourue dans le sens antihoraire. Le vecteur normal pour $\mathcal{S}$ qui est compatible avec cette orientation de $\mathcal{C}$ doit donc avoir une composante $\mathbf{k}$ positive. Nous choisissons donc le signe $+$ dans la formule $(**)$ de notre inventaire de formules 4.7.17. Nous calculons alors

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ -y+2z \\ 2x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -2y \\ 1\end{bmatrix} \\ &= 2y^2 - 4yz + 2x = 2y^2 - 4y^3 + 2x,\end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que $z = f(x,y) = y^2$.

Ainsi, le flux qui nous intéresse vaut

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(2y^2 - 4y^3 + 2x\right) dA = 2\iint_{\mathcal{R}} y^2\,dA - 4\iint_{\mathcal{R}} y^3\,dA + 2\iint_{\mathcal{R}} x\,dA.$$

La symétrie de $\mathcal{R}$ et le fait que les intégrandes des deuxième et troisième intégrales sont des fonctions impaires font en sorte que ces deux intégrales sont nulles. Afin de calculer celle qui compte, nous utilisons les coordonnées polaires pour obtenir

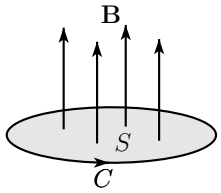
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\iint_{\mathcal{R}} y^2\,dA$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2(\sin^2\theta)\, r\, dr\, d\theta \\
&= 2\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^2 r^3\, dr\right) \\
&= 2\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta\right)\left(\int_0^2 r^3\, dr\right) = 2\pi\cdot\frac{16}{4} = 8\pi.
\end{aligned}
$$

Application : la loi de Faraday

L'induction magnétique est un processus physique par lequel une différence de potentiel (un voltage) est induite par un champ magnétique qui varie dans le temps. Ce processus est exploité dans de nombreuses applications, notamment les générateurs électriques, les moteurs à induction, la cuisson par induction, le soudage par induction et le chargement par induction. On attribue généralement à Michael Faraday [2] la découverte de l'induction magnétique. La loi de Faraday est la suivante. Soit $\mathcal{S}$ une surface orientée de bord $\mathcal{C}$. Soit $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ les champs électrique et magnétique (qui varient avec le temps). On pose alors

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} &= \text{tension le long de } \mathcal{C}, \\
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \text{flux magnétique à travers } \mathcal{S}.
\end{aligned}
$$



Le voltage le long de $\mathcal{C}$ est l'opposé du taux de changement du flux magnétique à travers $\mathcal{S}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

Nous pouvons reformuler ceci comme une équation aux dérivées partielles. En vertu du théorème de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{n}\, dS,$$

de sorte que la loi de Faraday devient

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}\, dS = 0.$$

Ceci étant vrai pour toutes les surfaces $\mathcal{S}$, l'intégrande, si on le suppose continu, doit être nul.

En effet, soit $\mathbf{G} = \left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)$ et supposons qu'il existe un point $\mathbf{x}_0$ tel que $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$. Soit un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ dans la direction $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$. Soit en plus $\mathcal{S}$ un petit disque centré à $\mathbf{x}_0$, de vecteur normal $\mathbf{n}$. Alors, $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n} > 0$ et, si nous choisissons notre disque suffisamment petit, la continuité de $\mathbf{G}$ donnera que $\mathbf{G}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n} > 0$ pour tout $\mathbf{x}$ sur $\mathcal{S}$. Alors, $\iint_{\mathcal{S}} \left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}\, dS > 0$, une contradiction.

Ainsi, $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ partout, et l'on conclut que

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Il s'agit de l'une des équations de Maxwell.

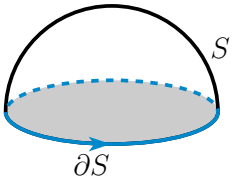
[2] Michael Faraday (1791-1867) était un physicien et chimiste anglais. Il est devenu un scientifique extrêmement influent bien qu'il n'ait reçu qu'une éducation formelle des plus élémentaires.

Exercices

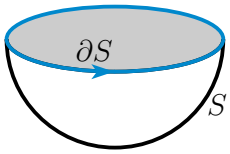
Pour se pratiquer.

1. Chacune des figures ci-bas contient une esquisse d'une surface $\mathcal{S}$ et son bord $\partial\mathcal{S}$. Le théorème de Stokes dit que $\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ lorsque $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire normal à $\mathcal{S}$ compatible avec l'orientation du bord. Dans chaque cas, esquisser un vecteur normal unitaire convenable.

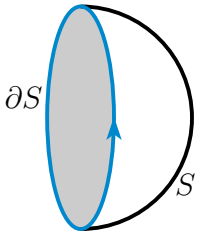
(a)



(b)

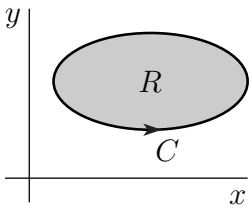


(c)



2. Soit

- $\mathcal{R}$ une région bornée dans le plan xy ;
- le bord $\mathcal{C}$ de $\mathcal{R}$ est formé d'une seule courbe fermée, simple et lisse par morceaux
  - qui est orientée de façon compatible avec l'orientation de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire de sorte que si l'on marche le long de $\mathcal{C}$ dans le sens donné, alors $\mathcal{R}$ est à gauche ;



- $F_1(x,y)$ et $F_2(x,y)$ ont des dérivées continues en chaque point de $\mathcal{R}$.

Utiliser le théorème de Stokes pour montrer que

$$\int_{\mathcal{C}} \big[F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy\big] = \iint_{\mathcal{R}} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\,dxdy,$$

c'est-à-dire pour montrer le théorème de Green.

3. Montrer que $\int_{\mathcal{C}} \phi\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}} \psi\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot d\mathbf{r}$ pour toute paire de fonctions ϕ et ψ qui ont des dérivées de premier ordre continues et toute courbe $\mathcal{C}$ qui est le bord d'une surface orientable lisse par morceaux.

4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe intersection du cylindre $x^2+y^2=1$ avec la surface $z=y^2$, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsque vue d'en haut. Soit $\mathbf{F} = (x^2-y)\,\mathbf{i} + (y^2+x)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

(a) par calcul direct ;

(b) en utilisant le théorème de Stokes.

5. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, où $\mathbf{F} = ye^x\,\mathbf{i} + (x+e^x)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{C}$ est la courbe

$$\mathbf{r}(t) = (1+\cos t)\,\mathbf{i} + (1+\sin t)\,\mathbf{j} + (1-\sin t-\cos t)\,\mathbf{k}, \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

6. Trouver la valeur de $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathbf{F} = (z-y)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{S}$ est l'hémisphère

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geqslant 0 \right\}$$

orienté de sorte que le vecteur normal unitaire pointe en s'éloignant du centre de l'hémisphère.

7. Soit $\mathcal{S}$ la portion de la surface $z = 16 - (x^2+y^2)^2$ qui se trouve au-dessus du plan xy. Soit $\mathbf{F} = x\ln(1+z)\,\mathbf{i} + x(3+y)\,\mathbf{j} + y\cos z\,\mathbf{k}$. Calculer

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à $\mathcal{S}$ pointant vers le haut.

8. Soit $\mathcal{C}$ l'intersection du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ et du cylindre $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsque vue d'en haut. Soit $\mathbf{F} = xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$. Trouver $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

9. Soit $\mathbf{F} = -ye^z\,\mathbf{i} + x^3\cos z\,\mathbf{j} + z\sin(xy)\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{S}$ la portion de la surface $z = (1-x^2)(1-y^2)$ qui se trouve au-dessus du carré $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ du plan xy. Trouver le flux de $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ vers le haut à travers $\mathcal{S}$.

10. Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, avec $\mathbf{F} = (e^{x^2} - yz)\,\mathbf{i} + (\sin y - yz)\,\mathbf{j} + (xz + 2y)\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{C}$ le parcours triangulaire de $(1,0,0)$ à $(0,1,0)$ puis à $(0,0,1)$ et qui retourne à $(1,0,0)$.

11. Soit $\mathbf{F} = -z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ un champ de vecteurs. Utiliser le théorème de Stokes pour calculer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, où $\mathcal{C}$ est l'intersection du plan $z = y$ et de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 1$, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsque vue d'en haut.

12. Considérer le champ de vecteurs $\mathbf{F} = z^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$ dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculer l'intégrale de ligne $I_1 = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lorsque $\mathcal{C}_1$ est la courbe formée par les segments de droites L_1 de $(2,0,0)$ à $(0,2,0)$, L_2 de $(0,2,0)$ à $(0,0,2)$ et finalement L_3 de $(0,0,2)$ à $(2,0,0)$.

(b) Soit $\mathcal{C}_2$ une courbe fermée simple du plan $x+y+z=2$, qui délimite une région $\mathcal{R}$ de ce plan d'aire 3 et qui est orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsque vue du demi-axe des x positifs. Calculer l'intégrale $I_2 = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

13. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3$ la courbe donnée par l'union des courbes paramétrées

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(t) &= 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2,\\
\mathbf{r}_2(t) &= 2\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2,\\
\mathbf{r}_3(t) &= 2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2.
\end{aligned}$$

(a) Faire une esquisse de $\mathcal{C}$ montrant chacune des portions $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ en indiquant les orientations induites par les paramétrages donnés.

(b) Trouver et paramétrer une surface orientée $\mathcal{S}$ dont le bord est $\mathcal{C}$ (avec les orientations données).

(c) Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, où

$$\mathbf{F} = \big(y + \sin(x^2)\big)\,\mathbf{i} + \big(z - 3x + \ln(1+y^2)\big)\,\mathbf{j} + \big(y + e^{z^2}\big)\,\mathbf{k}$$

14. On considère le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Noter que son sommet se trouve à l'origine $(0, 0, 0)$. Le cône est orienté de sorte que, en chaque point, le vecteur normal pointe vers le bas (et en s'éloignant de l'axe des z). Dans les questions qui suivent, tant $\mathcal{S}_1$ que $\mathcal{S}_2$ sont orientées de la sorte.

Soit $\mathbf{F} = -zy\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\cos(yz)\,\mathbf{k}$.

(a) Soit $\mathcal{S}_1$ la portion du cône qui se trouve entre les plans $z = 0$ et $z = 4$. Noter que $\mathcal{S}_1$ n'inclut aucune portion du plan $z = 4$. Utiliser le théorème de Stokes pour calculer la valeur de

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Faire une esquisse inscrivant les orientations de $\mathcal{S}_1$ ainsi que du ou des contours d'intégration.

(b) Soit $\mathcal{S}_2$ la portion du cône qui se trouve au-dessous du plan $z = 4$ et au-dessus du plan $z = 1$. Noter que $\mathcal{S}_2$ n'inclut aucune région des plans $z = 1$ ou $z = 4$. Déterminer le flux de $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ à travers $\mathcal{S}_2$. Justifier en incluant une esquisse de $\mathcal{S}_2$ qui inclut son orientation ainsi que celle des contours d'intégration.

15. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'intersection du plan $z = x + 4$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 4$, parcourue dans *le sens des aiguilles d'une montre* lorsque vue d'au-dessus.

Soit $\mathbf{F} = (x^3 + 2y)\,\mathbf{i} + (\sin y + z)\,\mathbf{j} + \big(x + \sin(z^2)\big)\,\mathbf{k}$.

Utiliser le théorème de Stokes pour évaluer l'intégrale de ligne $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

16. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} \left(z + \frac{1}{1+z}\right) dx + xz\, dy + \left(3xy - \frac{x}{(z+1)^2}\right) dz,$$

où $\mathcal{C}$ est la courbe paramétrée par

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + (1 - \cos^2 t \sin t)\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

17. Une courbe fermée, simple et lisse par morceaux $\mathcal{C}$ se trouve sur le plan $x + y + z = 1$. La région du plan que la courbe $\mathcal{C}$ délimite a une aire égale à 5. La courbe $\mathcal{C}$ est orientée dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque vue du demi-axe positif des z.

Calculer la circulation de $\mathbf{F} = z^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$ autour de $\mathcal{C}$.

18. Soit $\mathcal{C}$ la courbe fermée formée par les segments de droites allant de $(0, 0, 0)$ à $(0, 1, 1)$, de $(0, 1, 1)$ à $(0, 1, 2)$, de $(0, 1, 2)$ à $(0, 2, 0)$, de $(0, 2, 0)$ à $(2, 2, 0)$ et de $(2, 2, 0)$ à $(0, 0, 0)$. Soit

$$\mathbf{F} = (-y + e^x \sin x)\,\mathbf{i} + y^4\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}.$$

Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

19. Soit $\mathcal{C}$ l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ avec la surface $z = xy^2$, parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque vue d'en haut. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} (z + \sin z)\, dx + (x^3 - x^2 y)\, dy + (x \cos z - y)\, dz.$$

20. Calculer $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathcal{S}$ est la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ au-dessus du plan $z = 1$, $\mathbf{n}$ pointe vers le haut et

$$\mathbf{F} = -y^2\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} + (e^x + e^y + z)\,\mathbf{k}.$$

21. Soit $\mathbf{F} = x \sin y\,\mathbf{i} - y \sin x\,\mathbf{j} + (x - y)z^2\,\mathbf{k}$. Au moyen du théorème de Stokes, calculer la valeur de

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

le long du chemin formé par les segments de droites joignant successivement les points $P_0(0,0,0)$, $P_1(\frac{\pi}{2},0,0)$, $P_2(\frac{\pi}{2},0,1)$, $P_3(0,0,1)$, $P_4(0,\frac{\pi}{2},1)$ et $P_5(0,\frac{\pi}{2},0)$, puis de retour à $(0,0,0)$.

22. Soit

$$\mathbf{F} = \left(\frac{2z}{1+y} + \sin(x^2)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3z}{1+x} + \sin(y^2)\right)\mathbf{j} + 5(x+1)(y+2)\,\mathbf{k}$$

et $\mathcal{C}$ la courbe orientée formée des segments de droites joignant successivement les points $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,0,2)$, $(0,3,0)$ et de retour à $(0,0,0)$.

(a) Faire une figure montrant $\mathcal{C}$ et l'orientation de chaque segment.

(b) Calculer la valeur de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

23. Calculer $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{S}$ est la demi-sphère d'équation $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ orientée par un vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$ vérifiant $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geqslant 0$.

24. Soit $\mathcal{S}$ la surface $x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6$, $z \geqslant 0$, orientée par le vecteur normal unitaire qui pointe vers l'extérieur (par exemple, au point le plus haut de la surface, le vecteur normal est $\mathbf{k}$).

Soit

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}, \quad \text{où} \quad \mathbf{F} = (xz - y^3 \cos z)\,\mathbf{i} + x^3 e^z\,\mathbf{j} + xyz e^{x^2+y^2+z^2}\,\mathbf{k}.$$

Calculer

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

25. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R contenu dans le plan $x + y + z = 3$. Utiliser le théorème de Stokes pour calculer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, où $\mathbf{F} = z^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$ (utiliser n'importe quelle orientation du cercle).

26. Soit $\mathcal{S}$ la surface formée de la partie supérieure et des 4 faces latérales du cube de sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, orientée vers l'extérieur du cube. Si $\mathbf{F} = xyz\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$, trouver le flux de $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ à travers $\mathcal{S}$.

27. Soit $\mathcal{S}$ la portion de la rampe en spirale (une surface hélicoïdale) paramétrée par

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u \sin v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi.$$

Soit $\mathcal{C}$ le bord de $\mathcal{S}$ avec l'orientation donnée par le vecteur normal pointant vers le haut. Trouver $\int_{\mathcal{C}} y\,dx - x\,dy + xy\,dz$.

Groupe d'exercices.

28. Soit $\mathcal{C}$ l'intersection de $x + 2y - z = 7$ et $x^2 - 2x + 4y^2 = 15$. La courbe $\mathcal{C}$ est orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsque vue d'en haut. Soit

$$\mathbf{F} = \left(e^{x^2} + yz\right)\mathbf{i} + \left(\cos(y^2) - x^2\right)\mathbf{j} + \left(\sin(z^2) + xy\right)\mathbf{k}.$$

Calculer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

29.

(a) Calculer le rotationnel du champ $\mathbf{F} = (2 + x^2 + z)\,\mathbf{i} + (3 + x^2 z)\,\mathbf{k}$.

(b) Soit $\mathcal{C}$ la courbe dans $\mathbb{R}^3$ allant de $(0, 0, 0)$ au point $(2, 0, 0)$, formée de trois segments de droites consécutifs : de $(0, 0, 0)$ à $(0, 0, 3)$, de $(0, 0, 3)$ à $(0, 1, 0)$ et de $(0, 1, 0)$ à $(2, 0, 0)$. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

où $\mathbf{F}$ est le champ de la partie (a).

30.

(a) Soit $\mathcal{S}$ la surface en forme de seau formée par la portion du cylindre $y^2 + z^2 = 9$ comprise entre $x = 0$ et $x = 5$ ainsi que par le disque sur le plan yz de rayon 3 centré à l'origine (le seau $\mathcal{S}$ a une partie inférieure, mais pas de couvercle). Orienter $\mathcal{S}$ de sorte que le vecteur normal pointe vers l'extérieur. Calculer le flux de $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G}$ à travers $\mathcal{S}$, lorsque $\mathbf{G} = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$.

(b) Calculer le flux de $\mathbf{F} = (2 + z)\,\mathbf{i} + xz^2\,\mathbf{j} + x\cos y\,\mathbf{k}$ à travers $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est comme dans la partie (a).

31. Soit $\mathbf{F} = \left(\frac{y}{x} + x^{1+x^2}\right)\mathbf{i} + \left(x^2 - y^{1+y^2}\right)\mathbf{j} + \cos^5(\ln z)\,\mathbf{k}$.

(a) Donner le domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbf{F}$.

(b) Encercler les énoncés qui sont vrais :

(i) $\mathcal{D}$ est connexe.

(ii) $\mathcal{D}$ est simplement connexe.

(iii) $\mathcal{D}$ est disconnexe.

(c) Calculer $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$.

(d) Soit $\mathcal{C}$ le carré dont les sommets sont $(3 \pm 1, 3 \pm 1, 2)$, orienté dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque vu d'en haut. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(e) Le champ $\mathbf{F}$ est-il conservatif ?

32. Une physicienne étudie un champ de vecteurs $\mathbf{F}(x, y, z)$. Ses expériences permettent de conclure que $\mathbf{F}$ est de la forme

$$\mathbf{F} = xz\,\mathbf{i} + (axe^y z + byz)\,\mathbf{j} + (y^2 - xe^y z^2)\,\mathbf{k}$$

pour certains nombres réels a et b. De plus, il est connu que $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G}$ pour un certain

champ différentiable $\mathbf{G}$.

(a) Trouver a et b.

(b) Calculer l'intégrale de surface

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

où $\mathcal{S}$ est la portion de l'ellipsoïde $x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1$ telle que $z \geqslant 0$, orientée de sorte que le vecteur normal ait une composante z positive.

33. Soit $\mathcal{C}$ la courbe dans le plan xy allant du point $(0,0)$ à $(5,5)$ formée par les segments de droites reliant successivement les points $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(4,5)$ et $(5,5)$. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

où

$$\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + (2x - 10)\,\mathbf{j}.$$

34. Soit $\mathbf{F} = \sin(x^2)\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ qui est l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ avec la surface $z = x^2$, parcourue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsque vue d'en haut.

35. Expliquer comment la loi de Faraday, sous sa forme différentielle

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

est déduite de la forme intégrale

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

36. Soit $\mathcal{C}$ la courbe donnée par

$$x = \cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t,\ z = \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

et soit

$$\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y^3 z^3\,\mathbf{k}.$$

Utiliser le théorème de Stokes pour calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

37. Utiliser le théorème de Stokes pour calculer

$$\int_{\mathcal{C}} z\,dx + x\,dy - y\,dz$$

lorsque $\mathcal{C}$ est la courbe fermée donnée par l'intersection du plan $x + y + z = 1$ avec la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La courbe $\mathcal{C}$ est orientée dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque vue de l'origine.

38. Soit $\mathcal{S}$ la portion du demi-cône

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad y \geqslant 0,$$

qui se trouve en dessous du plan $z = 1$.

(a) Donner un paramétrage de $\mathcal{S}$.

(b) Calculer le flux du champ

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$$

vers le bas à travers $\mathcal{S}$.

(c) Un champ de vecteurs $\mathbf{F}$ a pour rotationnel $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$. Sur le plan xz, le champ est constant, avec $\mathbf{F}(x, 0, z) = \mathbf{j}$. Avec cette information, calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

où $\mathcal{C}$ est le demi-cercle

$$x^2 + y^2 = 1,\ z = 1,\ y \geqslant 0$$

orienté de $(-1, 0, 1)$ à $(1, 0, 1)$.

39. On considère $\iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathcal{S}$ est la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vérifiant $x + y + z \geqslant 1$, $\mathbf{n}$ est le vecteur normal qui pointe vers le haut et $\mathbf{F} = (y - z)\,\mathbf{i} + (z - x)\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}$. Trouver une autre surface $\mathcal{S}'$ avec la propriété que $\iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{\mathcal{S}'} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ et évaluer $\iint_{\mathcal{S}'} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$.

4.9 Le théorème de la divergence

Dans cette section, nous verrons le troisième des théorèmes classiques du calcul vectoriel, à savoir le théorème de la divergence. Ce résultat est aussi connu sous le nom de théorème de Gauss, ou encore de théorème d'Ostrogradsky.

Le théorème de Stokes est une généralisation de ce que nous avons appelé la forme tangentielle du théorème de Green 4.5.2. En effet, celui-ci traite de régions dans le plan, tandis que le théorème de Stokes 4.8.1 traite de surfaces dans l'espace. Le théorème de Stokes restreint aux surfaces du plan devient le théorème de Green (forme tangentielle).

Une autre généralisation est possible : plutôt que de passer de surfaces dans le plan à des surfaces dans l'espace, nous pouvons passer de régions planes dont le bord est une courbe fermée (ou une réunion de courbes fermées) à des régions solides dont le bord est une surface fermée (ou une réunion de surfaces fermées) et nous intéresser au flux d'un champ de vecteurs à travers la surface en question. La forme normale du théorème de Green 4.5.13 devient alors le théorème de la divergence.

Régions dans l'espace et leurs bords

Pour commencer, nous allons considérer des régions de $\mathbb{R}^3$ avec lesquelles il est aisé de travailler. Lorsque nous avons étudié les intégrales triples, nous avons défini ce qu'est une région *élémentaire* (voir la définition 3.4.4). Une région de $\mathbb{R}^3$ sera dite **simple** si elle est simultanément des types (†), (††) et (†††).

Une telle région admet pour frontière une surface $\mathcal{S} = \partial\mathcal{E}$ qui est la réunion de surfaces lisses. De plus, nous allons convenir que $\mathcal{S}$ sera orientée vers l'extérieur de $\mathcal{E}$. Nous adopterons cette convention pour toute surface fermée (c'est-à-dire qui est le bord d'une région solide).

Exemple 4.9.1

Soit $\mathcal{E}$ la région de $\mathbb{R}^3$ bornée par

- le plan d'équation $z = 0$;
- le cylindre parabolique d'équation $y = x^2$;
- le plan d'équation $y + z = 1$.

La région est illustrée ci-contre.

Le bord de $\mathcal{E}$ est formé par trois portions de surfaces lisses, que nous nommerons $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$.

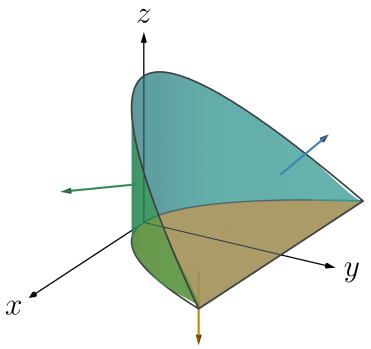


Figure 4.9.2 La région $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ et sa frontière.

- $\mathcal{S}_1$: la portion du plan $z = 0$ vérifiant $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $x^2 \leqslant y \leqslant 1$. C'est le bord inférieur de $\mathcal{E}$, en rouge dans la figure. Le vecteur normal sur cette portion du bord est $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$ (en rouge).
- $\mathcal{S}_2$: la portion du cylindre $y = x^2$ comprise entre le plan $z = 0$ et le plan $y + z = 1$. C'est la partie latérale du bord de $\mathcal{E}$, en vert dans la figure. Le vecteur normal sur cette portion du bord de $\mathcal{E}$ est $\mathbf{n}_2 = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (en vert).
- $\mathcal{S}_3$: la portion du plan $z = 1 - y$ qui se trouve au-dessus de $\mathcal{S}_1$. C'est le bord supérieur de $\mathcal{E}$, en bleu dans la figure. Le vecteur normal correspondant est $\mathbf{n}_3 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ (en bleu).

Le théorème de la divergence

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de la divergence. Essentiellement, il dit que le flux d'un champ $\mathbf{F}$ vers l'extérieur d'une région $\mathcal{E}$, c'est-à-dire l'intégrale de surface de $\mathbf{F}$ sur $\mathcal{S} = \partial\mathcal{E}$, est égal à l'intégrale triple de la divergence de $\mathbf{F}$ sur toute la région $\mathcal{E}$.

De façon plus précise, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.9.3 Théorème de la divergence.

Soit $\mathcal{E}$ une région simple de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{S} = \partial\mathcal{E}$ orientée vers l'extérieur de $\mathcal{E}$. Soit $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur une région contenant $\mathcal{E}$ dans son intérieur. Alors,

$$\iint_{\partial\mathcal{E}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Remarquons que si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, l'intégrale triple s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_{\mathcal{E}} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_{\mathcal{E}} (P_x + Q_y + R_z)\, dV.$$

Voyons quelques exemples.

Exemple 4.9.4

Soit $\mathbf{F} = (x^3 + y^3)\,\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\,\mathbf{j} + (z^3 + x^3)\,\mathbf{k}$. Calculer le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solution. Soit $\mathcal{E}$ la boule unité, c'est-à-dire la région de $\mathbb{R}^3$ définie par $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Son bord $\partial\mathcal{E} = \mathcal{S}$ est la sphère donnée.

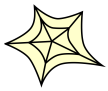
Par ailleurs, écrivons $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Nous calculons alors

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Ainsi, le flux qui nous intéresse est calculé par une intégrale triple, qu'on évalue en utilisant les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\mathcal{E}} 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 3\rho^2\, \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= 3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi \right) \left(\int_0^1 \rho^4\, d\rho \right) \\
&= 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{12\pi}{5}.
\end{aligned}$$

À vous de jouer 4.9.5



Utilisez le Théorème de la Divergence afin d'évaluer l'intégrale de surface $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

$\mathbf{F} = x^3\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$, $\mathcal{S}$ est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} =$ _____

Exemple 4.9.6

Soit $\mathcal{E}$ la région limitée par le cylindre $y = x^2$ et les plans $z = 0$ et $y + z = 1$ (c'est la région de l'exemple 4.9.1, voir aussi la figure 4.9.2). Calculer le flux de $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$ à travers la surface $\mathcal{S} = \partial\mathcal{E}$, orientée vers l'extérieur de $\mathcal{E}$.

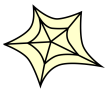
Solution. Posons $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. On calcule la divergence du champ $\mathbf{F}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z = y + 2y + 0 = 3y.$$

Le théorème de la divergence nous permet de ramener le calcul de l'intégrale de flux à une intégrale triple. À l'exemple 3.4.7, nous avons déjà considéré cette région et établi les bornes d'intégration. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\, dV &= \iiint_{\mathcal{E}} 3y\, dV \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_0^{1-y} 3y\, dz\, dy\, dx \\
&= 3 \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} y(1-y)\, dy\, dx
\end{aligned}$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}\right)dx$$
$$= \frac{24}{35}.$$



À vous de jouer 4.9.7

Utilisez la Théorème de la divergence pour évaluer l'intégrale de surface $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

$\mathbf{F} = (3x+y)\,\mathbf{i}+z\,\mathbf{j}+(3z-x)\,\mathbf{k}$, $\mathcal{S}$ est la frontière de la région comprise entre le paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ et le plan xy.

$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} =$ _____

Voyons maintenant un exemple montrant comment utiliser le théorème de la divergence pour calculer le flux d'un champ à travers une surface qui n'est pas fermée. On comparera avec l'exemple 4.5.7.

Exemple 4.9.8

Soit $\mathbf{F}$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$$

et $\mathcal{S}$ la surface formée des faces du cube unité $[0,1]^3$, à l'exception de la face supérieure $z = 1$.

Calculer le flux de $\mathbf{F}$ à travers $\mathcal{S}$, orientée vers l'extérieur du cube.

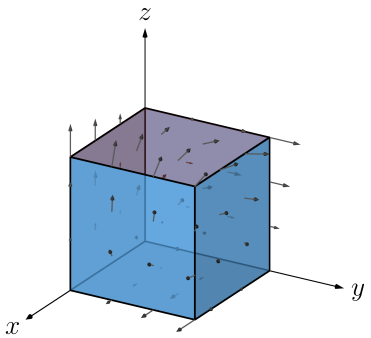


Figure 4.9.9 La surface $\mathcal{S}$ (en bleu) et le champ $\mathbf{F}$. La face manquante, en rouge, n'en fait pas partie.

Solution. Notons pour commencer que la surface $\mathcal{S}$ n'est pas le bord d'une région solide : il ne s'agit pas d'une surface fermée.

En effet, si $\mathcal{E}$ est le cube unité, alors $\partial\mathcal{E}$ est formée de $\mathcal{S}$ avec en plus le carré de sommets $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,1)$. Soit donc $\mathcal{S}'$ ce carré, de sorte que $\partial\mathcal{E} = \mathcal{S}\cup\mathcal{S}'$. On peut appliquer le théorème de la divergence au cube $\mathcal{E}$, ce qui nous donnera

$$\iiint_{\mathcal{E}} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}. \qquad (*)$$

Le flux qui nous intéresse est le premier terme de la somme, tout à droite. Nous allons calculer le terme de gauche (l'intégrale triple), ainsi que le tout dernier terme pour déduire la valeur qui nous intéresse.

Pour ceci, on commence par calculer $\nabla\cdot\mathbf{F} = x+y+z$, de sorte que

$$\iiint_{\mathcal{E}} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y+z)\,dz\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \left(x+y+\frac{1}{2}\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1 (x+1)\,dx = \frac{3}{2}.$$

Calculons maintenant le flux à travers $\mathcal{S}'$. Sur cette surface, nous avons $z = 1$ et le vecteur normal est $\mathbf{k}$. Ainsi, sur $\mathcal{S}'$,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = (xy\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = x.$$

On calcule alors

$$\iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{[0,1]\times[0,1]} x\, dA = \frac{1}{2}.$$

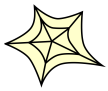
L'égalité (∗) ci-dessus devient alors

$$\frac{3}{2} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2},$$

et on déduit que le flux qui nous intéresse vaut 1.

Notons que $\mathcal{S}$ est formée de cinq faces : on pourrait donc calculer notre flux avec cinq intégrales de surface. Aucune d'elles n'est particulièrement difficile, mais c'est un peu long.

À vous de jouer 4.9.10



Soit $\mathbf{F}(x,y,z) = 2z^2x\mathbf{i}+(\frac{2}{3}y^3+\tan(z))\mathbf{j}+(2x^2z+4y^2)\mathbf{k}$. Utilisez le Théorème de la Divergence pour évaluer $\int_S \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{S}$, où S est la moitié supérieure de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$, orientée vers le haut.

$\int\int_S \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{S} =$ _____

Voyons maintenant un autre exemple montrant comment calculer un flux à l'aide du théorème de la divergence.

Exemple 4.9.11

Calculer le flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$, où $\mathcal{S}$ est la portion du cône $z^2 = x^2+y^2$ vérifiant $1 \leqslant z \leqslant 2$, $\mathbf{n}$ est le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur du cône, et où

$$\mathbf{F} = 3x\,\mathbf{i} + (5y + e^{\cos x})\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

La figure ci-contre montre $\mathcal{S}$, en orange, ainsi que deux disques horizontaux, en bleu, qui serviront à la refermer.

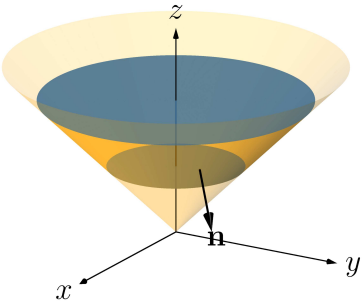


Figure 4.9.12 La surface $\mathcal{S}$ et le vecteur normal $\mathbf{n}$.

Solution. Le terme $e^{\cos x}$ dans $\mathbf{F}$ suggère qu'une évaluation directe de l'intégrale peut être ardue[a] et nous utilisons à nouveau le théorème de la divergence. À nouveau, $\mathcal{S}$ n'est pas la frontière d'une région solide. Il s'agit de la portion du cône illustrée dans la figure accompagnant l'énoncé ; il manque un couvercle en haut et un autre en bas.

Heureusement, nous avons une région solide $\mathcal{E}$ dont la frontière, sans être égale à $\mathcal{S}$,

contient $\mathcal{S}$. Il s'agit de

$$\mathcal{E} = \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant z^2,\ 1 \leqslant z \leqslant 2\ \}.$$

Le bord $\partial\mathcal{E}$ est la réunion de $\mathcal{S}$ et de deux disques

$$\mathcal{D}_1 = \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant z^2,\ \ z=1\ \},$$
$$\mathcal{D}_2 = \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant z^2,\ \ z=2\ \}.$$

Le théorème de la divergence donne alors

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\ dV &= \iint_{\partial\mathcal{E}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{D}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{D}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S},\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\ dV - \iint_{\mathcal{D}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{\mathcal{D}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Le terme de gauche, celui que nous cherchons, n'est pas facile à calculer directement. Cependant, les trois autres termes, ceux de droite, se calculent aisément.

Le vecteur normal au disque horizontal $\mathcal{D}_2$ est $+\mathbf{k}$. Ainsi,

$$\iint_{\mathcal{D}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \iint_{\mathcal{D}_2} z\,dS.$$

Comme $z=2$ sur $\mathcal{D}_2$, qui est un disque de rayon 2, nous avons

$$\iint_{\mathcal{D}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\,\mathrm{Aire}(\mathcal{D}_2) = 2\pi\cdot 2^2 = 8\pi.$$

De la même façon, le vecteur normal au disque horizontal $\mathcal{D}_1$ est $-\mathbf{k}$. Ainsi,

$$\iint_{\mathcal{D}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\iint_{\mathcal{D}_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = -\iint_{\mathcal{D}_1} z\,dS.$$

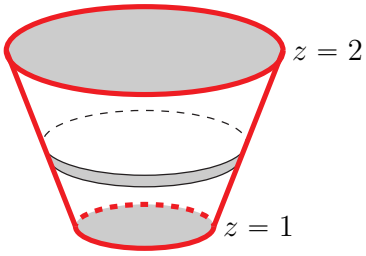
Comme $z=1$ sur $\mathcal{D}_1$, qui est un disque de rayon 1,

$$\iint_{\mathcal{D}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\mathrm{Aire}(\mathcal{D}_1) = -\pi\cdot 1^2 = -\pi.$$

Finalement, comme $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = 3+5+1 = 9$, nous avons

$$\iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\ dV = 9\,\mathrm{Vol}(\mathcal{E}).$$

Le volume de $\mathcal{E}$ peut être calculé facilement de plusieurs façons. Nous le faisons avec une intégrale simple. Pour ceci, nous découpons $\mathcal{E}$ en tranches horizontales, voir la figure ci-contre.



La tranche à la hauteur z a

- une épaisseur dz ;
- une section circulaire de rayon z (puisque l'équation de la surface $\mathcal{S}$ est précisément $x^2 + y^2 = z^2$), donc d'aire πz^2 ;
- un volume de $\pi z^2\, dz$.

Ainsi,

$$\iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\; dV = 9\,\mathrm{Vol}(\mathcal{E}) = 9\int_1^2 \pi z^2\, dz = 9\left[\frac{\pi z^3}{3}\right]_1^2 = 9 \cdot \frac{7\pi}{3} = 21\pi.$$

En bout de ligne,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\; dV - \iint_{\mathcal{D}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\mathcal{D}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= 21\pi - (-\pi) - 8\pi = 14\pi.\end{aligned}$$

Mise en garde 4.9.13

L'hypothèse selon laquelle le champ $\mathbf{F}$ admet des dérivées partielles continues sur toute la région $\mathcal{E}$ est cruciale. L'exemple ci-après le montre. Rappelons que nous avons quelque chose de semblable pour le théorème de Green : voir notamment la mise en garde 4.5.10 ainsi que l'exemple 4.5.11.

Tout comme le bord d'une région du plan peut être formé de plusieurs courbes (voir par exemple la figure 4.5.8), le bord d'une région solide $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ peut être formé de plusieurs surfaces. Dans ce cas, la formule du théorème de la divergence reste valable, mais il faut orienter chaque surface convenablement, c'est-à-dire toujours vers l'extérieur de $\mathcal{E}$. Dans le fond, c'est la même idée que celle qui a été mise à l'œuvre dans l'exemple 4.5.9.

Exemple 4.9.14

Écrivons, comme à l'habitude, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ et considérons le champ

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}.$$

(a) Calculer $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$.

(b) Calculer directement (c'est-à-dire sans utiliser le théorème de la divergence) le flux de $\mathbf{F}$ à travers la sphère unité $\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$, orientée vers l'extérieur.

(c) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et $\mathcal{E}$ la région de $\mathbb{R}^3$ définie par $a^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant b^2$. Calculer le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur de $\mathcal{E}$.

(d) Montrer que le flux de $\mathbf{F}$ à travers n'importe quelle sphère (vers l'extérieur de celle-ci) peut prendre seulement deux valeurs, selon que la sphère englobe l'origine ou pas. Calculer ces valeurs.

Solution.

[a] En fait, il est possible d'évaluer l'intégrale directement. Il suffit de remarquer que la partie problématique est une fonction impaire par rapport à y, et donc son intégrale est nulle.

(a) Si $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{\left[x^2+y^2+z^2\right] - x\frac{3}{2}(2x)}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{5/2}} + \frac{\left[x^2+y^2+z^2\right] - y\frac{3}{2}(2y)}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{5/2}} \\ &\quad + \frac{\left[x^2+y^2+z^2\right] - z\frac{3}{2}(2z)}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{5/2}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Le vecteur normal unitaire à $\mathcal{S}$ est $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \iint_{\|\mathbf{r}\|=1} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\, dS = \iint_{\|\mathbf{r}\|=1} \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}\, dS = \iint_{\|\mathbf{r}\|=1} dS \\ &= 4\pi.\end{aligned}$$

Ceci illustre la mise en garde 4.9.13 précédente : bien que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = 0$ partout où $\mathbf{F}$ est défini, on ne peut pas appliquer le théorème de la divergence à la boule $\mathcal{E} = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \right\}$, puisque $\mathbf{F}$ n'est même pas défini à l'origine, un point de $\mathcal{E}$. Le flux $4\pi \neq 0$ que nous venons de calculer directement le confirme.

(c) Cette fois, la région $\mathcal{E}$ n'englobe pas l'origine, de sorte qu'il n'y a aucun problème de continuité et que la formule du théorème de la divergence s'applique. En vertu de la partie (a), $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = 0$, de sorte que le flux qui nous intéresse est

$$\iint_{\partial\mathcal{E}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\, dV = 0.$$

(d) Soit $\mathcal{S}$ une sphère quelconque, et supposons pour commencer que $\mathcal{S}$ n'englobe pas l'origine. Ceci veut dire que la distance de son centre à l'origine est strictement supérieure à son rayon. Soit $\mathcal{B}$ la boule limitée par notre sphère. Comme l'origine n'est pas dans $\mathcal{B}$, nous pouvons utiliser le théorème de la divergence, ce qui donne

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\, dV = 0.$$

Supposons maintenant que $\mathcal{S}$ englobe l'origine. La distance du centre de $\mathcal{S}$ à l'origine est donc strictement inférieure à son rayon. Il existe donc $h > 0$ tel que la sphère de rayon h centrée à l'origine, que nous nommons $\mathcal{S}_h$, soit entièrement contenue à l'intérieur de la sphère $\mathcal{S}$.

Soit cette fois $\mathcal{V}$ la région comprise entre $\mathcal{S}_h$ et $\mathcal{S}$, de sorte que $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}\cup\mathcal{S}_h$. Grâce au même calcul que celui de la partie (c), nous avons

$$0 = \iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{S}_h} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Comme partie de la frontière de $\mathcal{V}$, la sphère $\mathcal{S}_h$ doit être orientée par le vecteur normal unitaire qui pointe vers l'origine, à savoir $-\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Compte tenu de cette orientation, le calcul de la partie (b) nous donne

$$\iint_{\mathcal{S}_h} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -4\pi,$$

de sorte que $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$. Les deux valeurs possibles du flux sont donc 0 (sphère n'englobant pas l'origine) et 4π (sphère englobant l'origine).

Exemple 4.9.15

Calculer le flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$, où $\mathbf{G} = 2x\,\mathbf{i} + (2z - 2x)\,\mathbf{j} + (2x - 2z)\,\mathbf{k}$ et

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; z = \left(1 - x^2 - y^2\right)(1 - y^3)\cos x\; e^y,\; x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\},$$

orientée par le vecteur normal qui pointe vers le haut.

Solution 1.

La surface $\mathcal{S}$ est représentée dans la figure ci-contre. Elle est plutôt compliquée, mais son bord $\partial\mathcal{S}$ est simple : il s'agit du cercle $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$. La figure montre aussi une surface auxiliaire $\mathcal{S}'$, en rouge, qui nous servira bientôt, ainsi que les vecteurs normaux aux deux surfaces.

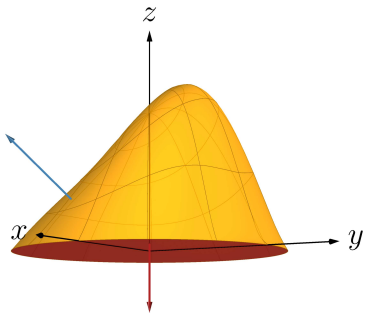


Figure 4.9.16 Les surfaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, avec leurs vecteurs normaux.

L'évaluation directe de l'intégrale de surface n'est pas simple : les formules sont suffisamment compliquées pour qu'on veuille procéder autrement. Dans cette solution, nous allons nous servir du théorème de la divergence, notamment parce que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2z - 2x) + \frac{\partial}{\partial z}(2x - 2z) = 0.$$

Voici la stratégie à suivre.

- Nous commençons par trouver une autre surface $\mathcal{S}'$ telle que son bord $\partial\mathcal{S}'$ soit aussi le cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Un choix raisonnable pour $\mathcal{S}'$, celle que nous allons utiliser, est le disque

$$\mathcal{S}' = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1,\; z = 0 \right\}$$

- Nous allons définir $\mathcal{V}$ comme étant le solide limité en haut par $\mathcal{S}$ et en bas par $\mathcal{S}'$. Ainsi, le bord de $\mathcal{V}$ est $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$.

- Nous aurons alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{G}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}.$$

  Le terme de gauche est nul, puisque $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{G} = 0$. Ainsi,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}.$$

- Le vecteur normal pour $\mathcal{S}'$ est $-\mathbf{k}$, car il doit pointer vers l'extérieur de $\mathcal{V}$.

Nous pouvons à présent calculer

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S} &= -\iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S} = -\iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{G}\cdot \mathbf{n}\, dS\\ &= -\iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{G}\cdot(-\mathbf{k})\, dS = \iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ z=0}} (2x-2z)\, dxdy\\ &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} 2x\, dA\\ &= 0\end{aligned}$$

puisque le domaine d'intégration est symétrique par rapport à la droite $x=0$ et que la fonction $2x$ est impaire en x.

Solution 2. Pour cette deuxième solution, nous utiliserons plutôt le théorème de Stokes. Puisque $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{G}=0$, à la lumière du théorème 4.3.6, il est permis de penser qu'il existe un champ $\mathbf{F}$ tel que $\mathbf{G}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$. Un tel champ est appelé un **potentiel vectoriel** pour $\mathbf{G}$.

Si c'était effectivement le cas, nous aurions, en vertu du théorème de Stokes,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}\\ &= \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\end{aligned}$$

où $\mathcal{C}=\partial\mathcal{S}$ est le cercle $x^2+y^2=1$ du plan $z=0$, illustré en rouge ci-contre.

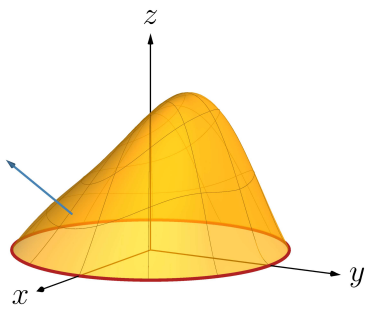


Figure 4.9.17 La surface $\mathcal{S}$ et son bord $\mathcal{C}$.

Cherchons donc un potentiel vectoriel $\mathbf{F}=P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k}$. Supposons pour commencer que $R=0$, de sorte que $\mathbf{F}=P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}$ et l'égalité $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}=\mathbf{G}$ se traduit par les égalités

$$\begin{aligned}-Q_z &= 2x\\ P_z &= 2z-2x\\ Q_x-P_y &= 2x-2z\end{aligned}$$

L'intégration de la première égalité par rapport à z donne

$$Q(x,y,z) = -2xz+\phi(x,y)$$

pour une certaine fonction ϕ.

De la même façon, l'intégration de la deuxième égalité, toujours par rapport à z donne

$$P(x,y,z) = z^2-2xz+\psi(x,y)$$

pour une certaine fonction ψ.

Finalement, la troisième égalité est satisfaite si et seulement si

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(-2xz+\phi)-\frac{\partial}{\partial y}\left(z^2-2xz+\psi\right) &= 2x-2z\\ \Leftrightarrow -2z+\phi_x-\psi_y &= 2x-2z\\ \Leftrightarrow \phi_x-\psi_y &= 2x.\end{aligned}$$

Un choix possible est $\phi(x,y)=x^2$ et $\psi(x,y)=0$. Ceci conduit à $\mathbf{F}=(z^2-2xz)\,\mathbf{i}+(x^2-2xz)\,\mathbf{j}$. On vérifie en effet que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}=\mathbf{G}$, comme on le voulait.

Le cercle $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$ peut être paramétré par $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ (l'orientation est compatible avec celle de $\mathcal{S}$). On calcule alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}} (z^2 - 2xz)\,dx + (x^2 - 2xz)\,dy \\ &= \int_{\mathcal{C}} x^2\,dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\cdot\cos t\,dt = 0,\end{aligned}$$

Voyons maintenant quelques variations souvent utiles du théorème de la divergence.

Théorème 4.9.18 Variations du théorème de la divergence.

Soit $\mathcal{V}$ un solide dont le bord est une surface $\partial\mathcal{V}$, $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs et f une fonction de classe C^1 sur une région contenant $\mathcal{V}$. Alors,

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\;dV \\ \iint_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{n}\,dS &= \iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} f\;dV \\ \iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n}\times\mathbf{F}\,dS &= \iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\;dV\end{aligned}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal unitaire à $\partial\mathcal{V}$ pointant vers l'extérieur.

Aide-mémoire. Les trois formules peuvent être combinées en

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} * \tilde{F}\,dS = \iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} * \tilde{F}\;dV$$

où $*$ peut être $\cdot$ (un produit scalaire), $\times$ (un produit vectoriel) ou rien du tout (le produit d'un vecteur par un scalaire). Lorsque $* = \cdot$ ou $* = \times$, alors $\tilde{F} = \mathbf{F}$. Lorsque $*$ n'est rien du tout, $\tilde{F} = f$, une fonction à valeurs scalaires.

Démonstration. La première formule n'est rien d'autre que le théorème de la divergence (théorème 4.9.3).

Afin de démontrer la deuxième formule, soit $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant, et appliquons le théorème de la divergence.

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{a})\;dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \left[(\boldsymbol{\nabla} f)\cdot\mathbf{a} + f\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}}_{=0}\right] dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} f)\cdot\mathbf{a}\;dV\end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième ligne, nous avons utilisé la partie (c) du théorème 4.3.18. Pour obtenir la troisième ligne, nous avons simplement utilisé le fait que $\mathbf{a}$ est constant, de sorte que toutes ses dérivées sont nulles. On peut écrire de façon équivalente

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} f)\cdot\mathbf{a}\;dV = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla} f)\;dV$$

Puisque $\mathbf{a}$ est constant, on peut le mettre en évidence, de sorte que

$$\mathbf{a}\cdot\iint_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{n}\,dS = \mathbf{a}\cdot\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} f\;dV$$

$$\Longrightarrow \mathbf{a}\cdot\left\{\iint_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{n}\,dS-\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla} f\;dV\right\}=0$$

En particulier, en choisissant $\mathbf{a}=\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$, nous obtenons que les trois composantes du vecteur $\iint_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{n}\,dS-\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla} f\;dV$ sont nulles. Il vient donc

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{n}\,dS-\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla} f\;dV=0$$

qui est l'égalité que nous voulions établir.

Afin d'établir la validité de la troisième formule, on applique le théorème de la divergence au champ $\mathbf{a}\times\mathbf{F}$, où $\mathbf{a}$ est n'importe quel vecteur constant.

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\mathcal{V}}(\mathbf{a}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\;dS&=\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{F})\;dV\\&=\iiint_{\mathcal{V}}\big[\mathbf{F}\cdot\underbrace{(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})}_{=\mathbf{0}}-\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\big]\;dV\\&=-\iiint_{\mathcal{V}}\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\;dV=-\mathbf{a}\cdot\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\;dV\end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième ligne, nous avons utilisé l'identité de la partie (d) du théorème 4.3.18. Pour obtenir la troisième ligne, nous utilisons à nouveau le fait que $\mathbf{a}$ est constant, de sorte que ses dérivées sont nulles. Nous avons aussi une identité qui combine le produit vectoriel et le produit scalaire : $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (établie à la partie (a) de la proposition 1.3.8). Ainsi,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{n})$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\iint_{\partial\mathcal{V}}\mathbf{F}\times\mathbf{n}\;dS&=-\mathbf{a}\cdot\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\;dV\\\Longrightarrow\ \mathbf{a}\cdot\left\{\iint_{\partial\mathcal{V}}\mathbf{F}\times\mathbf{n}\;dS+\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\;dV\right\}&=0\end{aligned}$$

En particulier, en choisissant $\mathbf{a}=\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$, nous voyons que les trois composantes du vecteur $\iint_{\partial\mathcal{V}}\mathbf{F}\times\mathbf{n}\;dS+\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\;dV$ sont nulles. Ainsi

$$\iiint_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\;dV=-\iint_{\partial\mathcal{V}}\mathbf{F}\times\mathbf{n}\;dS=\iint_{\partial\mathcal{V}}\mathbf{n}\times\mathbf{F}\;dS$$

ce qui est précisément ce que nous voulions. ■

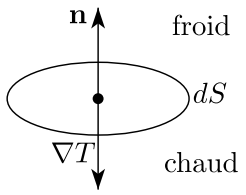
Application : l'équation de la chaleur

Soit $T(x, y, z, t)$ la température au temps t au point (x, y, z) pour un objet occupant une région $\mathcal{B}$ de l'espace. L'équation de la chaleur [1] est l'équation aux dérivées partielles qui décrit le flux d'énergie thermique, et donc le comportement de T. Montrons comment le théorème de la divergence permet de déduire l'équation de la chaleur à partir de certaines « lois » de la physique que nous prenons pour acquises :

- La quantité d'énergie nécessaire pour augmenter la température d'un objet de ΔT degrés est $CM\,\Delta T$, où M est la masse de l'objet et C est une constante positive déterminée par le matériau dont l'objet est fait ; c'est ce qu'on appelle la « chaleur spécifique »[2] de l'objet.

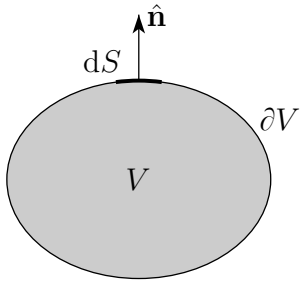
- Pensons à l'énergie thermique comme à un fluide en mouvement. La chaleur s'écoule dans la direction opposée à celle du gradient de température, avec un champ de flux égal à $-\kappa\boldsymbol{\nabla} T(x, y, z, t)$. Ici, κ est une autre constante positive, appelée la « conductivité thermique » de l'objet. Ainsi, le taux auquel la chaleur est conduite à travers une portion de surface d'aire dS au point (x, y, z), dans la direction du vecteur normal $\mathbf{n}$, est donné par $-\kappa\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} T(x, y, z, t)\, dS$ au temps t (voir le lemme 4.7.13 au besoin).

  Par exemple, dans la figure ci-contre, le gradient de température, qui pointe dans la direction où la température augmente, est de sens opposé à $\mathbf{n}$. En conséquence, le taux $-\kappa\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} T(x, y, z, t)\, dS$ est positif, ce qui indique un écoulement dans la direction de $\mathbf{n}$. Ceci correspond à ce qu'on attend — la chaleur « s'écoule » des régions chaudes vers les régions froides. De plus, ce taux grandit à mesure que la norme du gradient de température grandit. C'est raisonnable, et cela rappelle la loi du refroidissement de Newton.



Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ *n'importe quelle*[3] région contenue dans notre objet, $\partial\mathcal{V}$ sa frontière et $\mathbf{n}$ un vecteur normal à $\partial\mathcal{V}$ pointant vers l'extérieur de $\mathcal{V}$. La quantité de chaleur qui *entre* dans $\mathcal{V}$ à travers un petit morceau de surface dS de $\partial\mathcal{V}$ pendant un petit intervalle de temps dt est $-\left(-\kappa\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} T(x, y, z, t)\, dS\right) dt$. La quantité de chaleur qui entre dans $\mathcal{V}$ à travers toute sa frontière $\partial\mathcal{V}$ pendant cet intervalle de temps est donnée par

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \kappa\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} T(x, y, z, t)\, dS\, dt$$



Pendant cette même période de temps, la température au point (x, y, z) de $\mathcal{V}$ varie de $\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, z, t)\, dt$. Si la densité de l'objet au point (x, y, z) est $\rho(x, y, z)$, la quantité d'énergie requise pour accroître la température d'un petit morceau de volume dV centré en (x, y, z) de

[1] L'équation de la chaleur a été formulée par le mathématicien et physicien français Jean-Baptiste Joseph Fourier en 1807. Il a vécu de 1768 à 1830, une période qui comprend à la fois la Révolution française et le règne de Napoléon. Fourier a fait partie du comité révolutionnaire local, a été brièvement emprisonné pendant la Terreur et a été le conseiller scientifique de Napoléon Bonaparte lors de son expédition en Égypte en 1798. Les séries de Fourier et la transformée de Fourier portent son nom. On lui attribue également la découverte de l'effet de serre.

[2] On comprend maintenant que la chaleur provient de l'énergie interne de l'objet. Dans une théorie antérieure, la chaleur était considérée comme la mesure d'un fluide invisible, appelé « calorique ». La quantité de calorique qu'un objet peut contenir était appelée sa « capacité calorique » par le médecin et chimiste écossais Joseph Black (1728–1799).

[3] Il faut tout de même que sa frontière soit suffisamment raisonnable pour pouvoir appliquer nos théorèmes.

$\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t)\,dt$ est $C(\rho dV)\,\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t)\,dt$. La quantité d'énergie requise pour accroître la température de toute la région $\mathcal{V}$ de $\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t)\,dt$ est alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} C\rho\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t)\,dV\,dt$$

Supposons maintenant que notre objet ne dissipe ni n'engendre de la chaleur[4] par lui-même. Ainsi, cette quantité doit être égale à la quantité de chaleur qui entre dans $\mathcal{V}$ pendant ce laps de temps, c'est-à-dire

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \kappa\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}T\,dS\,dt = \iiint_{\mathcal{V}} C\rho\frac{\partial T}{\partial t}\,dV\,dt$$

Divisons par dt et écrivons l'expression de gauche comme une intégrale triple sur $\mathcal{V}$, grâce au théorème de la divergence. Cela donne

$$\iiint_{\mathcal{V}} \kappa\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T\,dV = \iiint_{\mathcal{V}} C\rho\frac{\partial T}{\partial t}\,dV$$

Comme ces deux intégrales ont le même domaine, nous avons

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} \kappa\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T\,dV - \iiint_{\mathcal{V}} C\rho\frac{\partial T}{\partial t}\,dV = 0\\ \Longrightarrow \iiint_{\mathcal{V}}\left[\kappa\boldsymbol{\nabla}^2T - C\rho\frac{\partial T}{\partial t}\right]dV = 0\end{aligned}\qquad\text{(H)}$$

où $\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est le laplacien. Ceci étant vrai pour toute région $\mathcal{V}$ et pour tout instant t, nous affirmons qu'il faut nécessairement avoir

$$\kappa\boldsymbol{\nabla}^2T(x,y,z,t) - C\rho\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t) = 0$$

pour tout $(x,y,z)\in\mathcal{B}$ et pour tout t.

En effet, supposons au contraire qu'il existe un point (x_0,y_0,z_0) dans $\mathcal{B}$ et un instant t_0 tels que, par exemple, $\kappa\boldsymbol{\nabla}^2T(x_0,y_0,z_0,t_0) - C\rho\frac{\partial T}{\partial t}(x_0,y_0,z_0,t_0) > 0$. En vertu de la continuité, $\kappa\boldsymbol{\nabla}^2T(x,y,z,t_0) - C\rho\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t_0)$ doit être proche de $\kappa\boldsymbol{\nabla}^2T(x_0,y_0,z_0,t_0) - C\rho\frac{\partial T}{\partial t}(x_0,y_0,z_0,t_0)$ lorsque (x,y,z) est proche de (x_0,y_0,z_0). Ainsi, nous aurions

$$\kappa\boldsymbol{\nabla}^2T(x,y,z,t_0) - C\rho\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t_0) > 0$$

pour (x,y,z) dans une petite boule $\mathcal{E}$ centrée en (x_0,y_0,z_0). Alors

$$\iiint_{\mathcal{E}}\left[\kappa\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T(x,y,z,t_0) - C\rho\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t_0)\right]dV > 0$$

ce qui contredit l'équation (H) lorsque $\mathcal{V}=\mathcal{E}$. Nous avons donc établi l'équation de la chaleur, à savoir

Formule 4.9.19 Équation de la chaleur.

Soit $T(x,y,z,t)$ la température au point (x,y,z) et au temps t dans un objet de densité ρ, de chaleur spécifique C et de conductivité thermique κ, qui ne produit ni ne dissipe de

[4] La théorie du « calorique » a elle-même été réfutée par l'expérience du physicien états-unien / britannique Benjamin Thompson (1753–1814) qui a réussi à faire bouillir de l'eau en utilisant la chaleur engendrée par la friction pendant l'alésage d'un canon.

chaleur par lui-même. Alors,

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t) = \alpha \boldsymbol{\nabla}^2 T(x,y,z,t),$$

où $\alpha = \frac{\kappa}{C\rho}$ *est appelée la* ***diffusivité thermique*** *et* $\boldsymbol{\nabla}^2$ *est le laplacien.*

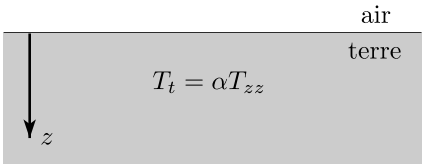
En guise d'application, étudions la température à une certaine distance de la surface de la Terre. Pour simplifier, supposons que la Terre est plate et que la température T dépend seulement du temps t et de la profondeur z. Dans ce contexte, l'équation de la chaleur devient

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z,t) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t) \tag{HE}$$

Nous choisissons notre système de coordonnées de sorte que la surface de la Terre corresponde à $z = 0$ et que z augmente à mesure qu'on descend. Nous supposerons aussi que la température à la surface, $T(0,t)$, est principalement déterminée par le soleil et est donnée par

$$T(0,t) = T_0 + T_A \cos(\sigma t) + T_D \cos(\delta t) \tag{BC}$$

Ici T_0 est la température moyenne à long terme, $T_A \cos(\sigma t)$ prend en compte des variations saisonnières, tandis que $T_D \cos(\delta t)$ donne les variations quotidiennes.



$$z = 0, T(0,t) = T_0 + T_A \cos(\sigma t) + T_D \cos(\delta t)$$

Nous mesurons le temps en jours, de sorte que $\delta = 2\pi$ et $\sigma = \frac{2\pi}{1 \text{ an}} = \frac{2\pi}{365 \text{ jours}}$. Alors, $T_A \cos(\sigma t)$ a une période d'un an et $T_D \cos(\delta t)$ a une période d'un jour. La solution de l'équation (HE) avec la condition au bord (BC) peut être trouvée avec la méthode de séparation des variables, un sujet standard dans les cours d'équations différentielles. La solution est

$$\begin{aligned} T(z,t) = T_0 &+ T_A e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}\, z} \cos\left(\sigma t - \sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}\, z\right) \\ &+ T_D e^{-\sqrt{\frac{\delta}{2\alpha}}\, z} \cos\left(\delta t - \sqrt{\frac{\delta}{2\alpha}}\, z\right) \end{aligned} \tag{SLN}$$

Il est routinier de vérifier que (SLN) est en effet solution de (HE) et vérifie (BC).

Voyons maintenant ce qu'on peut tirer de la solution (SLN). Pour une profondeur fixe z, la moyenne par rapport au temps de $T(z,t)$ est T_0 (simplement parce que la valeur moyenne de la fonction cosinus est nulle), la même que la température moyenne à la surface, c'est-à-dire lorsque $z = 0$.

Le terme $T_A e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}\, z} \cos\left(\sigma t - \sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}\, z\right)$

- introduit une oscillation de période un an, tout comme $T_A \cos(\sigma t)$;
- a une amplitude $T_A e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}\, z}$ qui vaut T_A à la surface et décroît exponentiellement à mesure que z grandit. Un accroissement de la profondeur z de $\sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}}$ entraîne une diminution de l'amplitude de l'oscillation d'un facteur $\frac{1}{e}$. Ces deux premières observations sont probablement en accord avec notre intuition, mais la solution a aussi une troisième propriété, peut-être moins évidente ;

- présente un décalage dans le temps de $\frac{z}{\sqrt{2\alpha\sigma}}$ par rapport à $T_A\cos(\sigma t)$. Le terme pour la surface, $T_A\cos(\sigma t)$, atteint son maximum lorsque $t = 0,\ \frac{2\pi}{\sigma},\ \frac{4\pi}{\sigma},\ \cdots$. À une profondeur z, le terme correspondant $T_A e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}\ z}\cos\left(\sigma t - \sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}\ z\right)$ atteint son maximum lorsque $\sigma t - \sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}\ z = 0,\ 2\pi, 4\pi,\ \cdots$ de sorte que $t = \frac{z}{\sqrt{2\alpha\sigma}},\ \frac{2\pi}{\sigma} + \frac{z}{\sqrt{2\alpha\sigma}},\ \frac{4\pi}{\sigma} + \frac{z}{\sqrt{2\alpha\sigma}},\ \cdots$.

De la même façon, le terme $T_D e^{-\sqrt{\frac{\delta}{2\alpha}}\ z}\cos\left(\delta t - \sqrt{\frac{\delta}{2\alpha}}\ z\right)$

- varie dans le temps avec une période d'une journée, tout comme $T_D\cos(\delta t)$;
- a une amplitude qui vaut T_D à la surface et décroît exponentiellement d'un facteur $\frac{1}{e}$ pour une augmentation de $\sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}$ de la profondeur ;
- présente un décalage dans le temps de $\frac{z}{\sqrt{2\alpha\delta}}$ par rapport à $T_D\cos(\delta t)$.

Pour l'eau, la valeur de α est approximativement 0.012 m^2/jour. Cette valeur de α donne

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}} \approx 1.2 \text{ m}, \qquad \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}} \approx 0.062 \text{ m}, \qquad \frac{z}{\sqrt{2\alpha\sigma}} \approx 49\,z \text{ jours}, \qquad \frac{z}{\sqrt{2\alpha\delta}} \approx 2.6\,z \text{ jours}$$

pour z mesurée en mètres. Ainsi, à une profondeur de quelques mètres, la température est relativement constante dans le temps, et ce qui en varie est décalé de quelques mois par rapport à la surface.

Exercices

Pour se pratiquer.

1. Soit $\mathcal{V}$ le cube $\mathcal{V} = \left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\ \right\}$ et $\mathcal{R}$ le carré $\mathcal{R} = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ \right\}$, et soit $f(x,y,z)$ une fonction de classe C^1.

(a) Utiliser le théorème fondamental du calcul pour montrer que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y,1)\,dx\,dy - \iint_{\mathcal{R}} f(x,y,0)\,dx\,dy.$$

(b) Utiliser le théorème de la divergence pour montrer que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y,1)\,dx\,dy - \iint_{\mathcal{R}} f(x,y,0)\,dx\,dy.$$

2.

(a) Appliquer le théorème de la divergence à $\mathbf{F} = \phi\,\mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant arbitraire, pour montrer que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\phi\,dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \phi\,\mathbf{n}\,dS.$$

(b) Montrer que le centre de gravité $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ d'un solide $\mathcal{V}$ de volume $|\mathcal{V}|$ est donné par

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{1}{2|\mathcal{V}|}\iint_{\partial\mathcal{V}} (x^2+y^2+z^2)\,\mathbf{n}\,dS.$$

3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère unité centrée à l'origine, avec le vecteur normal pointant vers l'extérieur. Si $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, calculer le flux de $\mathbf{F}$ à travers $\mathcal{S}$

(a) directement, et

(b) en utilisant le théorème de la divergence.

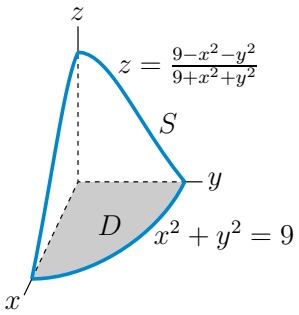
4. Calculer de deux façons $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathbf{F} = z\,\mathbf{k}$, $\mathcal{S}$ est la surface $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à $\mathcal{S}$ pointant vers l'extérieur.

(a) d'abord par un calcul de l'intégrale de surface ;

(b) puis en utilisant le théorème de la divergence.

5. Soit

- $\mathbf{F} = zy^3\,\mathbf{i} + yx\,\mathbf{j} + (2z + y^2)\,\mathbf{k}$;
- $\mathcal{V}$ la région de $\mathbb{R}^3$ définie par $0 \leqslant z \leqslant \frac{9-x^2-y^2}{9+x^2+y^2}$;
- $\mathcal{D}$ la surface inférieure du bord de $\mathcal{V}$. Puisque $\frac{9-x^2-y^2}{9+x^2+y^2}$ est positive pour $x^2+y^2 < 9$ et négative pour $x^2 + y^2 > 9$, la surface inférieure est $z = 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$;
- Soit $\mathcal{S}$ la portion courbe du bord de $\mathcal{V}$. Il s'agit de $z = \frac{9-x^2-y^2}{9+x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$. Voici une esquisse.



Soit $|\mathcal{V}|$ le volume de $\mathcal{V}$. Calculer, en termes de $|\mathcal{V}|$,

(a) $\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ avec $\mathbf{n}$ pointant vers le bas ;

(b) $\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\, dV$;

(c) $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ avec $\mathbf{n}$ pointant vers l'extérieur.

Utiliser le théorème de la divergence pour répondre à au moins une des questions (a), (b) ou (c).

6. Évaluer, par deux méthodes, l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathcal{S}$ est la surface $z = 1 - x^2 - y^2$ pour $x^2 + y^2 \leqslant 1$, et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal pointant vers le haut.

(a) d'abord par un calcul direct de l'intégrale de surface ;

(b) puis grâce au théorème de la divergence.

7. Soit $\mathbf{F} = (z + \sin y)\,\mathbf{i} + zy\,\mathbf{j} + \sin x \cos y\,\mathbf{k}$.

(a) Calculer la divergence de $\mathbf{F}$.

(b) Calculer le flux de $\mathbf{F}$ à travers la sphère de rayon 3 centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

8. La paroi d'un silo à grains est décrite par la portion du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ avec $0 \leqslant z \leqslant 1$. Le toit du silo est la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre, au-dessus du plan xy. Calculer le flux du champ de vecteurs

$$\mathbf{V} = x^2yz\,\mathbf{i} + (yz + e^x z)\,\mathbf{j} + (x^2 + y)\,\mathbf{k}$$

vers l'extérieur du silo.

9. Soit $\mathcal{B}$ la boule de volume V centrée au point (x_0, y_0, z_0), et soit $\mathcal{S}$ la sphère qui est le bord de $\mathcal{B}$. Calculer le flux de $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + (3z - yz)\,\mathbf{k}$ vers l'extérieur de $\mathcal{B}$.

10. On considère le champ $\mathbf{F} = \big(1 + z^{1+z^{1+z}}\big)\,\mathbf{i} + \big(1 + z^{1+z^{1+z}}\big)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Soit $\mathcal{S}$ la portion de la surface

$$x^2 + y^2 = 1 - z^4$$

se trouvant au-dessus du plan xy. Quel est le flux de $\mathbf{F}$ vers le bas, à travers $\mathcal{S}$?

11. Utiliser le théorème de la divergence pour calculer le flux de $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$ à travers la portion de l'ellipsoïde

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

telle que $z \geqslant 0$. (Note : l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ a un volume égal à $\frac{4}{3}\pi abc$.)

12. Soit $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$, où $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ et $r = \|\mathbf{r}\|$.

(a) Calculer $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$.

(b) Calculer le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur, à travers la surface sphérique $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(c) Est-ce que les résultats des parties (a) et (b) contredisent le théorème de la divergence ? Expliquer.

(d) Soit $\mathcal{E}$ la région solide bornée par les surfaces $z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$, $z = 1$ et $z = -1$. Soit σ la surface qui est le bord de $\mathcal{E}$. Calculer le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur, à travers σ.

(e) Soit $\mathcal{R}$ la région solide limitée par les surfaces $z^2 - x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0$, $z = 1$ et $z = -1$. Soit Σ la surface qui est le bord de $\mathcal{R}$. Calculer le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur, à travers Σ.

13. Considérer l'ellipsoïde $\mathcal{S}$ donné par $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$, orienté par le vecteur normal qui pointe vers l'extérieur.

(a) Donner un paramétrage de $\mathcal{S}$.

(b) Calculer le flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$ du champ

$$\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

(c) Vérifier votre réponse de (b) avec le théorème de la divergence.

14. Calculer l'intégrale de flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$, où

$$\mathbf{F} = \big(x^3 + \cos(y^2)\big)\,\mathbf{i} + (y^3 + ze^x)\,\mathbf{j} + \big(z^2 + \arctan(xy)\big)\,\mathbf{k}$$

et $\mathcal{S}$ est la surface qui est le bord de la région solide limitée par le cylindre $x^2 + y^2 = 2$ et les plans $z = 0$ et $z = 2x + 3$. La surface est orientée positivement, c'est-à-dire que le vecteur normal pointe vers l'extérieur.

15. Trouver le flux du champ $\mathbf{F} = (x + y)\,\mathbf{i} + (x + z)\,\mathbf{j} + (y + z)\,\mathbf{k}$ à travers la surface cylindrique d'équation $x^2 + z^2 = 4$, qui s'étend de $y = 0$ à $y = 3$. (Seulement la partie

courbe, pas les disques à droite et à gauche.) La surface est orientée avec le vecteur normal pointant en s'éloignant de l'axe des y.

16. On considère la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe $z = 1 - x^4$ autour de l'axe z. Soit $\mathcal{S}$ la portion de cette surface qui se trouve au-dessus du plan xy, orientée par un vecteur normal qui pointe vers le haut. Le bord de $\mathcal{S}$ est le cercle de rayon 1 centré à l'origine qui se trouve sur le plan xy.

Calculer le flux du champ incompressible $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + (x+z)\,\mathbf{j} + (x^2+y^2)\,\mathbf{k}$ à travers $\mathcal{S}$.

17. Soit $\mathcal{S}$ la portion du paraboloïde $z = 2 - x^2 - y^2$ contenue dans le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et orientée vers le haut. Soit

$$\mathbf{F} = \big(\tan\sqrt{z} + \sin(y^3)\big)\,\mathbf{i} + e^{-x^2}\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Calculer l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

18. Calculer l'intégrale de surface $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$, où $\mathbf{F} = (\cos z + xy^2)\,\mathbf{i} + xe^{-z}\,\mathbf{j} + (\sin y + x^2 z)\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{S}$ est le bord de la région limitée par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$, orientée vers l'extérieur.

19. Soit $\mathcal{S}$ la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 1$ et $z = 0$, orientée vers l'extérieur. Soit

$$\mathbf{F} = (e^y + xz)\,\mathbf{i} + (zy + \sin x)\,\mathbf{j} + (z^2 - 1)\,\mathbf{k}.$$

Calculer l'intégrale de flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

20. Soit $\mathcal{B}$ la région solide comprise entre les plans $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$ et bornée en dessous par le plan $z = 0$ et au-dessus par le plan $z + y = 3$. Soit $\mathcal{S}$ le bord de $\mathcal{B}$. Calculer le flux du champ

$$\mathbf{F} = \big(x^2 z + \cos\pi y\big)\,\mathbf{i} + (yz + \sin\pi z)\,\mathbf{j} + (x - y^2)\,\mathbf{k}$$

à travers $\mathcal{S}$.

21. Soit $\mathcal{S}$ l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$, orientée par le vecteur normal qui s'éloigne de l'origine. Calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

où

$$\mathbf{F} = \big(x + \cos(z^2)\big)\,\mathbf{i} + \big(y + \ln(1 + x^2 + z^2)\big)\,\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}$$

22. Soit $\mathcal{E}$ la région solide limitée par le plan $z = 4$ et le paraboloïde $z = x^2 + y^2$. Soit par ailleurs

$$\mathbf{F} = \Big(-\frac{1}{3}x^3 + e^{z^2}\Big)\,\mathbf{i} + \Big(-\frac{1}{3}y^3 + xe^z\Big)\,\mathbf{j} + 4z\,\mathbf{k}.$$

(a) Calculer le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur à travers le bord de $\mathcal{E}$.

(b) Soit $\mathcal{S}$ la portion du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ en dessous du plan $z = 4$ orientée de sorte que le vecteur $\mathbf{n}$ ait une composante $\mathbf{k}$ positive. Calculer le flux de $\mathbf{F}$ à travers $\mathcal{S}$.

23. Soit le champ de vecteurs

$$\mathbf{F} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}.$$

(a) Calculer $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$.

(b) Soit $\mathcal{S}_1$ la sphère $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ orientée vers l'extérieur. Calculer $\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

(c) Soit $\mathcal{S}_2$ la sphère

$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$$

orientée vers l'extérieur. Calculer $\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

(d) Est-ce que les réponses de (b) et (c) coïncident ? Expliquer mathématiquement votre réponse.

24. Soit $\mathbf{F}$ le champ de vecteurs

$$\mathbf{F} = \left(y^3 z + 2x\right)\,\mathbf{i} + \left(3y - e^{\sin z}\right)\,\mathbf{j} + \left(e^{x^2+y^2} + z\right)\,\mathbf{k}$$

Calculer l'intégrale de flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathcal{S}$ est la surface qui délimite la région solide

$$\mathcal{E} \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 2 + y,$$

avec un vecteur normal pointant vers l'extérieur.

25. Considérer le champ de vecteurs

$$\mathbf{F} = z \arctan(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2+1)\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}.$$

Soit $\mathcal{S}$ la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ qui se trouve au-dessus du plan $z = 1$, orientée vers le bas.

(a) Calculer la divergence de $\mathbf{F}$.

(b) Calculer l'intégrale de flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

26. Soit $\mathcal{S}$ la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, orientée vers l'intérieur. Calculer l'intégrale de flux $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathbf{F} = (xy^2 + y^4 z^6)\,\mathbf{i} + (yz^2 + x^4 z)\,\mathbf{j} + (zx^2 + xy^4)\,\mathbf{k}$.

27. Considérer le champ de vecteurs $\mathbf{F} = -2xy\,\mathbf{i} + \left(y^2 + \sin(xz)\right)\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k}$.

(a) Calculer $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$.

(b) Trouver le flux de $\mathbf{F}$ à travers la surface $\mathcal{S}$ définie par

$$x^2 + y^2 + (z-12)^2 = 13^2, \qquad z \geqslant 0,$$

en utilisant le vecteur normal qui pointe vers l'extérieur.

28. Soit $\mathcal{S}$ la portion de l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ se trouvant entre les plans $z = -1$ et $z = 1$. Trouver le flux de $\mathbf{F} = (x + e^{yz})\,\mathbf{i} + (2yz + \sin(xz))\,\mathbf{j} + (xy - z - z^2)\,\mathbf{k}$ vers l'extérieur de $\mathcal{S}$.

29. Soit $\mathbf{F}$ le champ de vecteurs $\mathbf{F} = (x^2 - y - 1)\,\mathbf{i} + (e^{\cos y} + z^3)\,\mathbf{j} + (2xz + z^5)\,\mathbf{k}$. Calculer $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, où $\mathcal{S}$ est la portion de l'ellipsoïde $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ vérifiant $z \geqslant 0$, orientée vers le haut.

30. Soit $\mathcal{S}$ la portion de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ qui se trouve au-dessus du plan xy. Trouver le flux de $\mathbf{F} = (x^2 + e^{y^2})\,\mathbf{i} + (e^{x^2} + y^2)\,\mathbf{j} + (4 + 5x)\,\mathbf{k}$ vers l'extérieur à travers $\mathcal{S}$.

31. Calculer le flux de $\mathbf{F} = xy^2\,\mathbf{i} + x^2 y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vers l'extérieur, à travers la surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad z \geqslant 0.$$

32. Soit $\mathcal{D}$ le cylindre plein $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 5$. Calculer le flux du champ de vecteurs

$$\mathbf{F} = (x + xye^z)\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}y^2 z e^z\,\mathbf{j} + (3z - yze^z)\,\mathbf{k}$$

vers l'extérieur, à travers la portion courbe du bord de $\mathcal{D}$.

33. Trouver le flux de $\mathbf{F} = (y + xz)\,\mathbf{i} + (y + yz)\,\mathbf{j} - (2x + z^2)\,\mathbf{k}$ vers le haut, à travers la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ qui se trouve dans le premier octant.

34. Soit $\mathbf{F} = (x - yz)\,\mathbf{i} + (y + xz)\,\mathbf{j} + (z + 2xy)\,\mathbf{k}$, puis

- $\mathcal{S}_1$ la portion du cylindre $x^2 + y^2 = 2$ qui se trouve à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
- $\mathcal{S}_2$ la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ qui se trouve à l'extérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 2$;
- $\mathcal{V}$ la région solide limitée par $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

Calculer

(a) $\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ avec $\mathbf{n}$ pointant vers l'axe des z ;

(b) $\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\, dV$;

(c) $\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ avec $\mathbf{n}$ pointant vers l'extérieur.

Utiliser le théorème de la divergence pour répondre à au moins une des parties (a), (b) ou (c).

Pour aller plus loin.

35. Soit $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ le champ électrique dû à une configuration de charges électriques de densité (de charge) $\rho(\mathbf{r})$. La loi de Gauss dit que si $\mathcal{V}$ est un solide dans $\mathbb{R}^3$ de bord (une surface) $\partial\mathcal{V}$, alors le flux électrique

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = 4\pi Q \qquad \text{où} \qquad Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\, dV$$

est la charge totale dans $\mathcal{V}$. Ici, comme d'habitude, $\mathbf{n}$ est le vecteur normal qui pointe vers l'extérieur. Montrer que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$$

pour tout $\mathbf{r}$ dans $\mathbb{R}^3$. Ceci est l'une des équations de Maxwell. Prendre pour acquis que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ et $\rho(\mathbf{r})$ sont bien définis et continus partout.

36. Soit $\mathcal{V}$ une région solide dans $\mathbb{R}^3$ dont le bord est $\partial\mathcal{V}$. Montrer que

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS = 3\,\text{Volume}(\mathcal{V}),$$

où $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ et où, comme d'habitude, $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à $\partial\mathcal{V}$ qui pointe vers l'extérieur. Expliquer géométriquement ce résultat.

37. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de rayon 3 centrée à l'origine, orientée vers l'extérieur, et soit $\mathbf{F} = (x+z)\,\mathbf{k}$.

(a) Calculer (avec la définition) le flux de $\mathbf{F}$ à travers $\mathcal{S}$

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

c'est-à-dire calculer le flux en évaluant l'intégrale de surface directement.

(b) Calculer le même flux avec le théorème de la divergence.

38. Considérer le cube de côté 1 qui se trouve dans le premier octant ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), ayant un sommet à l'origine et le sommet opposé au point $(1,1,1)$. Une de ses faces se trouve dans le plan $x = 0$, une autre dans le plan $y = 0$ et une troisième dans le plan $z = 0$. Les trois autres faces se trouvent dans les plans $x = 1$, $y = 1$ et $z = 1$. Soit $\mathcal{S}$ la surface ouverte formée par les cinq faces du cube qui ne se trouvent pas dans le plan $z = 0$. La surface $\mathcal{S}$ est orientée de sorte que le vecteur normal unitaire pointe vers l'extérieur du cube. Trouver la valeur de

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

où $\mathbf{F}$ est le champ de vecteurs

$$\mathbf{F} = \big(y\cos(y^2) + z - 1\big)\,\mathbf{i} + \left(\frac{z}{x+1} + 1\right)\mathbf{j} + xye^{z^2}\,\mathbf{k}.$$

39.

(a) Trouver un vecteur normal unitaire à la surface $z = xy$ pointant vers le haut, au point $(1,1,1)$.

(b) Considérer maintenant $\mathcal{S}$, la portion de la surface $z = xy$, qui se trouve à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 9$. Calculer le flux vers le haut du champ $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ à travers $\mathcal{S}$.

(c) Trouver le flux de $\mathbf{F}$ à travers la surface cylindrique $x^2 + y^2 = 9$ entre $z = xy$ et $z = 10$. L'orientation est celle qui pointe en s'éloignant de l'axe des z.

40.

(a) Trouver la divergence du champ $\mathbf{F} = (x + \sin y)\,\mathbf{i} + (z+y)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$.

(b) Trouver le flux de $\mathbf{F}$ à travers l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z \geqslant 0$, orienté vers le haut.

(c) Donner une surface fermée $\mathcal{S}$, telle que $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ soit égale à -9.

41. Calculer les intégrales de surface (méthode au choix).

(a) $\iint_{\mathcal{S}} z^2\,dS$, si $\mathcal{S}$ est la portion du cône $x^2+y^2=4z^2$ où $0\leqslant x\leqslant y$ et $0\leqslant z\leqslant 1$.

(b) $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$, si $\mathbf{F}=z\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{S}$ est le rectangle de sommets $(0,2,0)$, $(0,0,4)$, $(5,2,0)$ et $(5,0,4)$, orienté vers le haut.

(c) $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$, où $\mathbf{F}=(y-z^2)\,\mathbf{i}+(z-x^2)\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$ et $\mathcal{S}$ est la surface qui délimite la boîte $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$, $0\leqslant z\leqslant 3$, avec le vecteur normal pointant vers l'extérieur.

42. Soit σ_1 la surface ouverte donnée par $z=1-x^2-y^2$, $z\geqslant 0$. Soit σ_2 la surface ouverte donnée par $z=x^2+y^2-1$, $z\leqslant 0$. Soit σ_3 la surface plane donnée par $z=0$, $x^2+y^2\leqslant 1$. Considérer le champ de vecteurs $\mathbf{F}=[a(y^2+z^2)+bxz]\,\mathbf{i}+[c(x^2+z^2)+dyz]\,\mathbf{j}+x^2\,\mathbf{k}$, où a, b, c et d sont des constantes.

(a) Trouver le flux de $\mathbf{F}$ à travers σ_1 vers le haut.

(b) Trouver les valeurs des constantes a, b, c et d telles que le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur à travers la surface fermée $\sigma_1\cup\sigma_3$ soit nul.

(c) Trouver les valeurs des constantes a, b, c et d telles que le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur à travers la surface fermée $\sigma_1\cup\sigma_2$ soit nul.

43. Soit $\mathcal{S}$ l'ellipsoïde $x^2+2y^2+3z^2=16$ et $\mathbf{n}$ son vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur.

(a) Trouver $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ lorsque $\mathbf{F}=\dfrac{(x-2)\,\mathbf{i}+(y-1)\,\mathbf{j}+(z-1)\,\mathbf{k}}{\left[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]^{3/2}}$;

(b) Trouver $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS$ lorsque $\mathbf{G}=\dfrac{(x-3)\,\mathbf{i}+(y-2)\,\mathbf{j}+(z-2)\,\mathbf{k}}{\left[(x-3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2\right]^{3/2}}$.

44. Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ une région bornée par une surface lisse $\partial\Omega$ et de vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$. Montrer que pour tout champ de vecteurs $\mathbf{F}$ de classe C^1 sur $\Omega\cup\partial\Omega$,

$$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\,dV=-\iint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\times\mathbf{n}\,dS.$$

45. Rappelons que si $\mathcal{S}$ est une surface fermée lisse de vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$, alors pour toute fonction lisse $p(x,y,z)$ sur $\mathbb{R}^3$, on a

$$\iint_{\mathcal{S}} p\mathbf{n}\;dS=\iiint_{\mathcal{E}}\boldsymbol{\nabla}p\;dV,$$

où $\mathcal{E}$ est la région solide bornée par $\mathcal{S}$. Montrer qu'en conséquence la force totale exercée sur la surface d'un solide immergé dans un gaz de pression constante est nulle. La pression agit dans la direction de la normale à la surface.

46. Soit $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs lisse dans $\mathbb{R}^3$ tel que le flux de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ est égal à $\pi(a^3+2a^4)$ pour tout $a>0$. Trouver la valeur de $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(0,0,0)$.

47. Soit $\mathbf{F}=(x^2+y^2+z^2)\,\mathbf{i}+(e^{x^2}+y^2)\,\mathbf{j}+(3+x+z)\,\mathbf{k}$ et soit $\mathcal{S}$ la portion de la surface $x^2+y^2+z^2=2az+3a^2$ telle que $z\geqslant 0$, orientée en s'éloignant de l'origine. Ici, $a>0$ est une constante. Calculer le flux de $\mathbf{F}$ à travers $\mathcal{S}$.

48. Soit $u = u(x, y, z)$ une solution de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{R}$ un solide lisse dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que le flux total de $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} u$ vers l'extérieur à travers le bord de $\mathcal{R}$ est nul.

(b) Montrer que le flux total de $\mathbf{G} = u\boldsymbol{\nabla} u$ vers l'extérieur à travers le bord de $\mathcal{R}$ vaut $\iiint_{\mathcal{R}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dV$.

49. Soit $\mathcal{R}$ la portion du cylindre $x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$ telle que $0 \leqslant z \leqslant y^2$; soit $\mathcal{S}$ le bord de $\mathcal{R}$. Étant donné $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$,

(a) Trouver le flux total de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur à travers $\mathcal{S}$.

(b) Trouver le flux total de $\mathbf{F}$ vers l'extérieur à travers la paroi verticale de $\mathcal{S}$.
Vous pouvez utiliser $\int_0^\pi \sin^n \theta\, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta\, d\theta$ pour $n = 2, 3, 4, \ldots$.

50. Une surface lisse $\mathcal{S}$ se trouve au-dessus du plan $z = 0$ et a pour bord le cercle $x^2 + y^2 = 4y$ dans le plan $z = 0$. Ce cercle délimite aussi un disque $\mathcal{D}$ dans ce plan. Le volume de la région solide $\mathcal{R}$ limitée par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ est de 10 unités cubes. Trouver le flux de

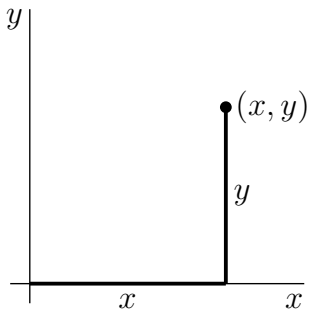
$$\mathbf{F} = (x + x^2 y)\,\mathbf{i} + (y - xy^2)\,\mathbf{j} + (z + 2x + 3y)\,\mathbf{k}$$

à travers $\mathcal{S}$ vers l'extérieur de $\mathcal{R}$.

Points et coordonnées en deux et trois dimensions

A.1 Points et coordonnées en deux et trois dimensions

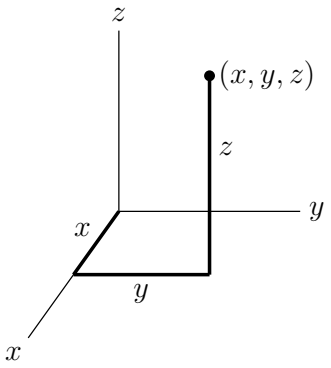
L'ensemble des points du plan est noté $\mathbb{R}^2$ (sans surprise, le 2 dans $\mathbb{R}^2$ signifie que chaque point est étiqueté par deux nombres ; le $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ veut dire que ce sont deux nombres réels). On dit que x est l'**abscisse** du point et que y en est l'**ordonnée**.

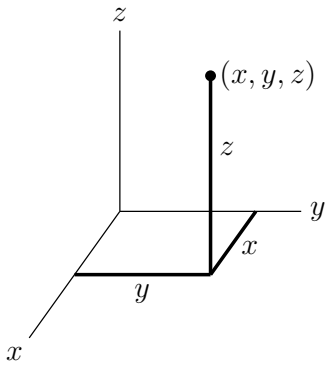


Remarquons que :

- la distance du point (x, y) à l'axe des abscisses est $|y|$;
- si $y > 0$, alors (x, y) se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, et si $y < 0$, alors (x, y) se trouve au-dessous de cet axe ;
- la distance du point (x, y) à l'axe des y est $|x|$;
- si $x > 0$, alors (x, y) se trouve à la droite de l'axe des y, et si $x < 0$, alors (x, y) se trouve à la gauche de l'axe ;
- la distance du point (x, y) à l'origine $(0, 0)$ est $\sqrt{x^2 + y^2}$.

De la même façon, un point dans l'espace tridimensionnel peut être étiqueté par trois coordonnées (x, y, z), tel qu'illustré dans les figures ci-après.



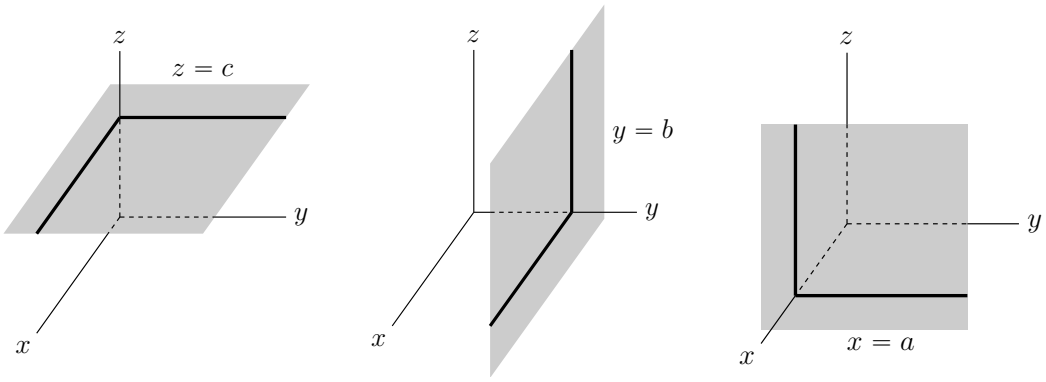


L'ensemble formé par les points dans l'espace tridimensionnel est $\mathbb{R}^3$. Le plan qui contient, entre autres, les axes des abscisses et des coordonnées est appelé le plan xy.

- Le plan Oxy est l'ensemble des points (x, y, z) tels que $z = 0$.
- Le plan Oxz est l'ensemble des points (x, y, z) tels que $y = 0$.
- Le plan Oyz est l'ensemble des points (x, y, z) tels que $x = 0$.

Plus généralement :

- L'ensemble des points (x, y, z) vérifiant $z = c$ est un plan parallèle au plan Oxy et se trouve à une distance $|c|$ de celui-ci. Si $c > 0$, le plan $z = c$ est au-dessus du plan Oxy. Si $c < 0$, le plan $z = c$ est au-dessous du plan Oxy. On dit que le plan $z = c$ est à une *distance signée* c[1] du plan Oxy.
- L'ensemble des points (x, y, z) vérifiant $y = b$ est un plan parallèle au plan Oxz et se trouve à une *distance signée* b de celui-là.
- L'ensemble des points (x, y, z) vérifiant $x = a$ est un plan parallèle au plan Oyz et se trouve à une *distance signée* a de celui-là.

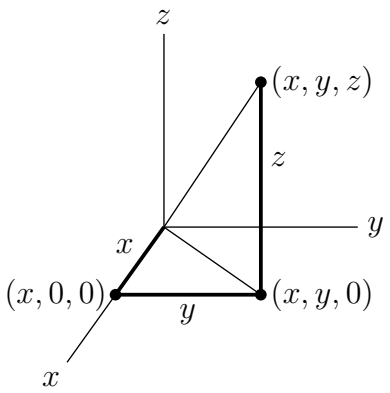


Remarquons que les distances en dimension 3 se calculent comme en dimension 2.

- La distance du point (x, y, z) au plan Oxy est $|z|$;
- La distance du point (x, y, z) au plan Oxz est $|y|$;
- La distance du point (x, y, z) au plan Oyz est $|x|$;
- La distance du point (x, y, z) à l'origine $(0, 0, 0)$ est $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Afin de voir que la distance du point (x, y, z) à l'origine $(0, 0, 0)$ est en fait $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

- on applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle de sommets $(0, 0, 0)$, $(x, 0, 0)$ et $(x, y, 0)$, de sorte que la distance de $(0, 0, 0)$ à $(x, y, 0)$ est $\sqrt{x^2 + y^2}$, puis
- on applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle de sommets $(0, 0, 0)$, $(x, y, 0)$ et (x, y, z), ce qui donne que la distance de $(0, 0, 0)$ à (x, y, z) est $\sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



Plus généralement, la distance du point (x, y, z) au point (x', y', z') est

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Remarquons que ceci fournit l'équation d'une sphère sans effort additionnel. En effet, les points d'une sphère sont les points équidistants du centre de la sphère. Ainsi, par exemple, l'équation

[1] C'est-à-dire une distance affectée en plus d'un signe indiquant une direction.

de la sphère centrée à $(1, 2, 3)$ et de rayon 4, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y, z) dont la distance à $(1, 2, 3)$ est 4, est

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16.$$

Chapitre B

Transformations linéaires et matrices

B.1 Matrices et transformations linéaires

Définition B.1.1

Une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

En somme, dire qu'une application T est linéaire revient à dire qu'elle se comporte bien par rapport aux combinaisons linéaires. En particulier, nous devons avoir que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Voyons quelques exemples.

Exemple B.1.2

(a) Une transformation linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est tout simplement une fonction de la forme $f : x \mapsto ax$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur fixé. Alors, la transformation $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $t \mapsto t\mathbf{u}$ est une transformation linéaire.

(c) Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur fixé. Alors, la transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{x}$ est une transformation linéaire.

(d) Si A est une matrice à m rangées et à n colonnes, alors la multiplication par A fournit une transformation linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Le fait qu'il s'agisse d'une transformation linéaire résulte des propriétés de la multiplication matricielle.

Dans tous les exemples ci-haut, nous avons que la transformation linéaire considérée est donnée par la multiplication par une matrice. En effet, même dans le premier cas, celui des transformations $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut considérer le nombre a comme une matrice à une rangée et à une colonne.

Ceci n'est pas une coïncidence.

Théorème B.1.3

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Alors, il existe une unique $m \times n$ matrice M_T telle que $T(\mathbf{x}) = M_T\mathbf{x}$.

Nous ne donnerons pas la preuve ici, cela relève plutôt d'un cours d'algèbre linéaire. Contentons-nous de dire que les colonnes de la matrice M_T sont précisément les images des vecteurs de la base canonique $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Il faut noter qu'il s'agit de vecteurs dans $\mathbb{R}^m$. Plus précisément,

$$M_T = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Voyons un exemple.

Exemple B.1.4

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ fixe et $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ autour de l'origine. Voyons que T_θ est linéaire et trouvons la matrice correspondante.

Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qu'on suppose non colinéaires pour commencer. Alors, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ est la diagonale (passant par l'origine) du parallélogramme déterminé par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Si l'on applique T_θ au parallélogramme, on obtient un deuxième parallélogramme dont l'origine est un des sommets. Ses côtés sont $T_\theta(\mathbf{u})$ et $T_\theta(\mathbf{v})$, et la diagonale passant par l'origine est $T_\theta(\mathbf{u})+T_\theta(\mathbf{v})$. Cette diagonale est l'image par T_θ de la diagonale $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ du parallélogramme original, c'est-à-dire $T_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$. Si les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires, ils sont multiples l'un de l'autre. Voyons comment T_θ se comporte dans ce cas.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, le vecteur $T_\theta(a\mathbf{u})$ s'obtient en faisant d'abord la multiplication de $\mathbf{u}$ par a, puis la rotation. Ceci revient à faire la rotation d'abord, puis à effectuer la multiplication par le scalaire a. En d'autres termes, $T_\theta(a\mathbf{u}) = aT_\theta(\mathbf{u})$.

Voyons maintenant la matrice associée à T_θ. L'image par T_θ du vecteur $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est le vecteur $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$. De même, l'image de $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$. Ainsi, la matrice associée à T_θ est

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Il est immédiat de démontrer que, si $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sont des transformations linéaires, alors il en va de même pour la composition $T \circ S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie par $\mathbf{x} \mapsto T(S(\mathbf{x}))$. Qui plus est, la matrice de $T \circ S$ s'obtient en multipliant les matrices de T et de S. Plus précisément,

$$M_{T\circ S} = \underbrace{M_T M_S}_{\text{produit matriciel}}.$$

On apprend, dans les cours de calcul différentiel à une variable, que *l'approximation linéaire* d'une fonction f en un point x_0 est la fonction $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Le graphe de la fonction L est la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$. L'appellation *approximation linéaire* comporte un léger abus de notation. En effet, la fonction L n'est généralement pas une fonction linéaire, puisque $L(0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0$, qui n'est généralement pas 0. À proprement parler, il s'agit d'une fonction *affine*.

Si les transformations linéaires sont données par la multiplication par une matrice, les transformations affines comportent en plus un terme additif. Une transformation affine $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une transformation donnée par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, où A est une matrice (la partie linéaire de T) et où $\mathbf{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit en fait de $T(\mathbf{0})$.

Chapitre C

Cylindres et surfaces quadriques

C.1 Cylindres

Dans le plan, une courbe admet une équation générale $F(x, y) = 0$: penser à $x^2 + y^2 - 1 = 0$, où il n'est pas toujours possible d'isoler y. Dans l'espace, l'ensemble solution d'une équation de la forme $F(x, y, z) = 0$ est une **surface**. Les **surfaces quadriques** et les **cylindres** sont parmi les surfaces les plus simples, après les plans. On les retrouve un peu partout (antennes, réservoirs, géolocalisation...).

Définition C.1.1 Les cylindres.

Les cylindres ne sont pas toujours circulaires. Un **cylindre** est une surface obtenue au moyen de :

- une courbe plane quelconque ;
- toutes les droites parallèles à une droite donnée qui passent par chacun des points de la courbe.

Exemple C.1.2

(a) La surface d'équation $z = x^2$ est un **cylindre parabolique**.

La courbe $z = x^2$ est une parabole dans le plan Oxz ; comme la variable y n'apparaît pas dans l'équation, on peut prendre cette parabole et la déplacer dans la direction des y.

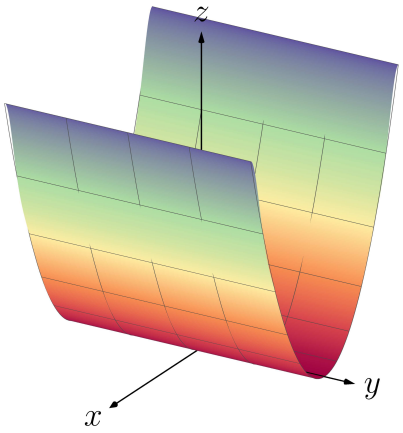


Figure C.1.3 Le cylindre parabolique $z = x^2$.

(b) Un cylindre « cardiaque » : la courbe plane de départ est ici un cardioïde.

Le cardioïde $r = 1 + \cos\theta$ (en coordonnées polaires dans le plan Oxy) est déplacé dans la direction des z.

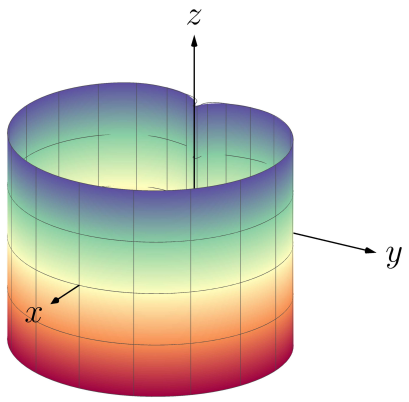


Figure C.1.4 Un cylindre dont la base est un cardioïde.

C.2 Surfaces quadriques

Définition C.2.1 Les surfaces quadriques.

Ce sont des surfaces obtenues par une équation de la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

où F est un polynôme de degré 2 dans les variables x, y, z.

Remarque C.2.2 Forme générale.

Dans un système d'axes X, Y, Z quelconque, l'équation générale d'une surface quadrique est

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DXY + EYZ + FXZ + GX + HY + IZ + J = 0.$$

Des changements de variables appropriés (rotations et translation) permettent toujours de se ramener, en minuscules x, y, z pour les nouvelles coordonnées, à l'une des deux formes suivantes :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0 \qquad \text{ou} \qquad Ax^2 + By^2 + Cz = 0.$$

La classification des surfaces quadriques est basée sur les signes de A, B, C et de D dans la première forme, et sur les signes de A, B dans la seconde. Notons que les traces et les sections selon les différentes directions sont des coniques (cercles, ellipses, paraboles, hyperboles), ou des droites (cas dégénérés).

Cas $A, B, C \neq 0$.

si A, B, C sont de même signe et D de signe opposé, on se ramène à la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

- La surface est un **ellipsoïde**, Toutes ses traces et sections sont des ellipses (des cercles si deux des trois dénominateurs coïncident). Si $a = b = c$, c'est une **sphère** de rayon a ;

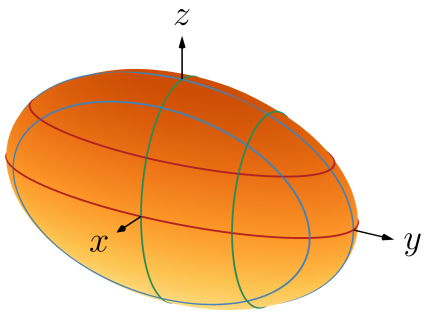


Figure C.2.3 Un ellipsoïde.

Si A, B, C ne sont pas tous de même signe (disons A, B de même signe et C de signe opposé) et D de signe opposé à celui de C, on se ramène à la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

- La surface est un **hyperboloïde à une nappe** : une seule surface connexe, en forme de manchon. Ses traces horizontales ($z =$ cste) sont des ellipses, et ses sections verticales ($x =$ cste ou $y =$ cste) sont des hyperboles.

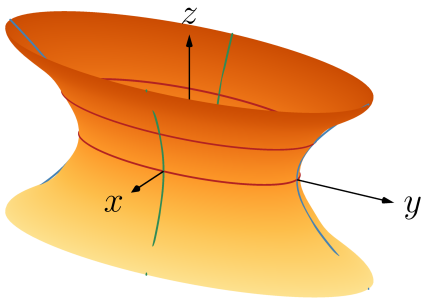


Figure C.2.4 Un hyperboloïde à une nappe.

Si au contraire D est de même signe que C (donc de signe opposé à A et B), on se ramène à la forme

$$\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

- La surface est un **hyperboloïde à deux nappes** : deux surfaces disjointes, l'une pour $z \geqslant c$ et l'autre pour $z \leqslant -c$. Ses traces horizontales sont des ellipses, mais seulement pour $|z| \geqslant c$; ses sections verticales sont des hyperboles ;

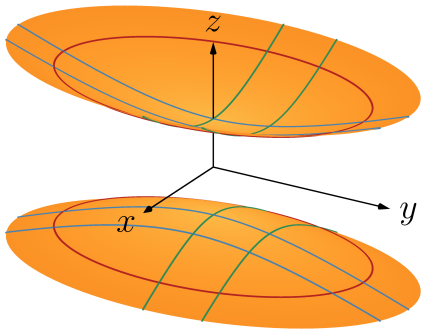


Figure C.2.5 Un hyperboloïde à deux nappes.

si A, B, C ne sont pas tous de même signe et $D = 0$, on se ramène à la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2.$$

- La surface est un **cône** : ses traces horizontales ($z =$ cste $\neq 0$) sont des ellipses, et ses sections verticales ($x =$ cste ou $y =$ cste) sont des hyperboles, où, dans le cas $x = 0$ ou $y = 0$ des paires de droites passant par l'origine, le **sommet** du cône.

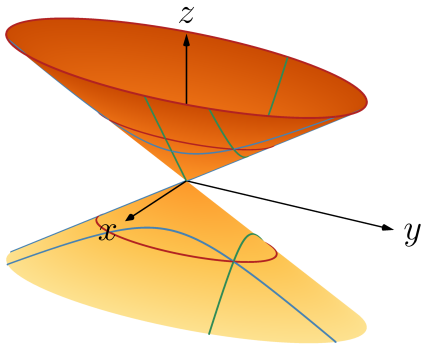


Figure C.2.6 Un cône elliptique.

Cas $C \neq 0$.

si $A, B \neq 0$ sont de même signe, on se ramène à la forme

$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

- La surface est un **paraboloïde elliptique** : ses traces horizontales ($z = \text{cste} > 0$) sont des ellipses, et ses sections verticales ($x = \text{cste}$ ou $y = \text{cste}$) sont des paraboles. On peut penser à un bol elliptique (ou rond si m $a = b$) ou à une antenne parabolique.

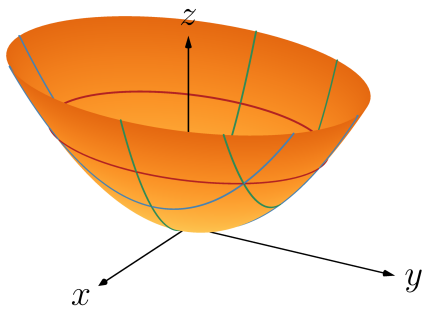


Figure C.2.7 Un paraboloïde elliptique.

Si $A, B \neq 0$ sont de signes opposés, on se ramène à la forme

$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

- La surface est un **paraboloïde hyperbolique** (une « selle de cheval ») : ses traces horizontales ($z = \text{cste} \neq 0$) sont des hyperboles, et sa trace $z = 0$ dégénère en deux droites qui se croisent au **col** ; ses sections verticales sont des paraboles, tournées vers le haut dans le plan $y = 0$ et vers le bas dans le plan $x = 0$.

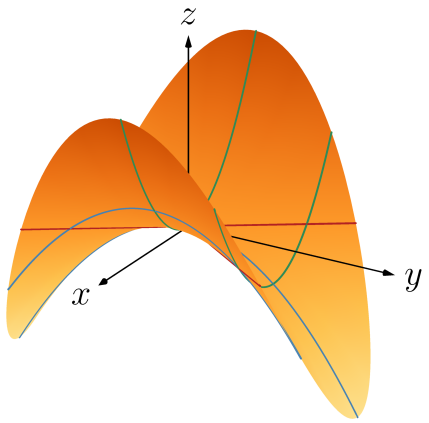


Figure C.2.8 Un paraboloïde hyperbolique.

- Si l'un des deux, disons B, est nul : un **cylindre parabolique** — comme celui de l'exemple C.1.2 (partie a).

Remarque C.2.9 Axe de symétrie.

Dans les équations sous forme standard ci-dessus (obtenues en l'absence de termes croisés XY, YZ, XZ, ou après les changements de variables qui les éliminent), les cylindres, cônes et paraboloïdes ne traitent pas les trois variables de façon symétrique : une seule d'entre elles apparaît au premier degré (ou est carrément absente, dans le cas d'un cylindre). On appelle **axe de symétrie** de la surface l'axe correspondant à cette variable. Par exemple :

- le cylindre $x^2 + y^2 = r^2$ (variable z absente) a pour axe de symétrie l'axe des z ;
- le paraboloïde elliptique $z = x^2 + 4y^2$ (variable z au premier degré) a pour axe de symétrie l'axe des z ;
- le cône $z^2 = x^2 + 4y^2$ (variable z au deuxième degré, mais seule à apparaître avec un signe opposé aux deux autres) a aussi pour axe de symétrie l'axe des z.

Attention : malgré son nom, un axe de symétrie n'est en général *pas* un axe de révolution. Ce qu'on a montré ci-dessus, c'est que l'équation reste inchangée si on remplace x par $-x$, ou y par $-y$: l'axe de symétrie est l'intersection des deux plans de symétrie correspondants (par exemple, les plans xz et yz pour le paraboloïde $z = x^2 + 4y^2$). Ceci n'entraîne pas de symétrie par rotation autour de cet axe : les sections perpendiculaires à l'axe sont des ellipses (ici, dilatées d'un facteur 2 selon y), pas des cercles. La surface n'est donc une **surface de révolution** (image d'une courbe par rotation autour de l'axe) que dans le cas particulier où ces sections sont circulaires — par exemple $z = x^2 + y^2$, mais pas $z = x^2 + 4y^2$.

De même, un ellipsoïde n'a pas d'axe de symétrie privilégié au sens ci-dessus (les trois variables jouent un rôle semblable), sauf si deux des trois demi-axes coïncident, auquel cas il devient une surface de révolution autour du troisième axe.

Chapitre D

SageMath

D.1 Généralités

Nous nous penchons maintenant sur le code informatique nécessaire pour élaborer des figures et réaliser certains calculs avec le logiciel SageMath. Il s'agit d'un puissant système de logiciels pour les mathématiques et les sciences. Il utilise et inclut plusieurs logiciels libres comme R, NumPy, SciPy, matplotlib, GAP, FLINT...

En tant que logiciel libre, il peut être téléchargé et installé librement dans n'importe quel ordinateur. Les instructions pour l'installation se trouvent à l'adresse SageMath.org. Nous suggérons d'utiliser l'interface Jupyter, ça vient avec. Par ailleurs, si vous disposez déjà d'Anaconda, il est possible d'installer SageMath dans cet environnement de travail.

Au delà de ce qui se trouve ici, nous suggérons certaines ressources additionnelles :

(a) Ce tutoriel en français, contient bien plus que ce qui est nécessaire.

(b) Computational Mathematics with SageMath. Un livre très complet !

(c) La documentation de SageMath en ligne. Par exemple ce lien mènera vers la documentation pour faire des figures de surfaces, plus précisément de la fonction `plot3d(...)`

(d) Une recherche en ligne avec un mot-clé raisonnable, et le mot « *sagemath* » devrait mener à la page de référence relevante. Par exemple, la recherche avec mots-clés « *plot3d* » et « *sagemath* », vous mènera vers le lien de l'item ci-haut.

(e) Une bonne partie de la documentation est disponible directement à part de sage directement. Si l'on veut avoir de la documentation au sujet de, disons, la commande `plot3d`, on fera `plot3d?` dans Sage lui-même, et on aura une quantité non négligeable d'aide.

D.2 Vecteurs et courbes

Vecteurs, produit scalaire, produit vectoriel

Pour déclarer un vecteur on l'entre comme une liste de nombres. L'addition des vecteurs et la multiplication par une constante se font de la façon naturelle. Voyons un exemple avec des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

```
a = vector([1,2,3,4])
b=vector([5,6,7,8])
c = a+2*b
show(c)
```

Le produit scalaire et le produit vectoriel se font grâce aux commandes `_dot_product()` ou `_cross_product()`. Le produit scalaire peut aussi se faire au moyen de `*`. Voyons des exemples

```
u = vector([-1,-3,1])
v = vector([4,2,8])
w = u.cross_product(v)
z = u.dot_product(v)
y = u * v
print("w = ", w)
print("z = ", z)
print("y = ", y)
```

De la même façon, la commande `norm(...)` permet de calculer la norme d'un vecteur.

Courbes

Afin de tracer une courbe parametrique, c'est la commande `parametric_plot(...)` qu'il faut utiliser. Noter que si le paramètre est une variable autre que x, il faut la déclarer. Il y a plusieurs options, voyons l'exemple de l'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, traité à l'exemple 1.5.6.

```
var('t')
a= 1
x(t) = a*cos(t)^3
y(t) = a*sin(t)^3
parametric_plot([x(t),y(t)], (t,0,2*pi))
```

Notons que nous avons défini les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ séparément, mais ceci n'est pas nécessaire, on aurait pu faire `parametric_plot([a*cos(t)^3, a*sin(t)^3],...)`. La portion `(t,0,2*pi)` est là pour dire que le paramètre t prend les valeurs entre 0 et 2π.

Voyons maintenant la même figure, un peu retouchée.

```
var('t')
a= 1
x(t) = a*cos(t)^3
y(t) = a*sin(t)^3
parametric_plot([x(t),y(t)], (t,0,2*pi),
    color = "steelblue", thickness = 2, gridlines = "True",
    axes_labels=["$x$","$y$"], axes_labels_size=1.2,
    tick_formatter = "latex",fontsize= 12)
```

Pour les courbes dans $\mathbb{R}^3$ le principe est le même. Il faut cependant noter que les possibilités d'annoter une figure soient beaucoup moins variées que pour les figures dans $\mathbb{R}^2$. Voici un exemple, celui de l'exemple 1.5.14, où il s'agissait de tracer la courbe intersection cône $z^2 = x^2 + y^2$ et du plan $z = 1 + y$. Notons cependant que dans les notes, afin de mieux visualiser la courbe, elle est dessinée avec le cône et plan. Le paramétrage obtenu est

$$\mathbf{r}(s) = s\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(s^2 - 1)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(s^2 + 1)\,\mathbf{k} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Ce code montrera seulement la courbe. Afin de voir les autres éléments, faites `show(Courbe + Plan + Cone)` à la dernière ligne, et changez la valeur du paramètre `frame = ...` pour voir l'effet.

```
var('u,v,r,s')
Courbe =  parametric_plot3d([s,(s^2 - 1)/2,(s^2 + 1)/2],
  (s,-2,2), color = "red", thickness = 5)
Plan  = parametric_plot3d([u,v,1+v],(u,-2,2),(v,-1,2),
  mesh = True, texture = "lightblue")
Cone = parametric_plot3d([r*cos(s), r*sin(s),r],
  (r,0, 2),(s,0,2*pi), mesh = True,
  texture = "orange", opacity = 0.75)
show(Courbe, frame = True)
```

Coordonnées polaires

Bien que les coordonnées polaires aient été traitées dans le Chapitre 3 3, finissons cette section avec un exemple de tracée de courbes en coordonnées polaires. En plus on remarquera l'utilisation de la commande `graphics_array(...)`. On trace les courbes dont l'équation polaire est $r = 1 + c\sin t$ pour différentes valeurs de c. La commande `Courbes(...)` construit une liste de courbes, puis avec `graphics_array(...)` on les dispose en tableau.

```
var('t')
C=[3, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1, -1.5,-3]
Courbes = [polar_plot(1+c*sin(t),0,t,2*pi,
    gridlines = True,
    axes_labels=["$x$","$y$"],
    tick_formatter = "latex",
    legend_label = "$%s$"%c.n(digits=2)) for c in C]
for g in Courbes:
    g.set_legend_options(font_size = 8, loc = 7)
    g.fontsize(8)
Graphique = graphics_array(((Courbes[0],Courbes[1], Courbes[2]),
               (Courbes[3], Courbes[4], Courbes[5]),
               (Courbes[6],Courbes[7], Courbes[8])))
Graphique.show(figsize  = 7)
```

D.3 Calcul différentiel

Fonctions de plusieurs variables

La figure de l'exemple 2.1.1. On voit comment composer une figure, étape par étape. De plus, la commande `text(...)` sert à ajouter des annotations. Il existe d'autres façons de le faire, par exemple en utilisant les options `legend` ou `legend_label`.

```
var('x')
Fig = plot(sqrt(1-x^2/4), 0, 2, thickness = 2,
  fill='axis', axes_labels=['$x$', '$y$'],
  fillcolor = "blue", fillalpha=0.2,
  linestyle = "dashed", tick_formatter="latex",
  ticks = [[1,2],[1/2, 1]], fontsize = 14)
Fig+= line([(2,0), (0,0), (0,1)],
  color = "blue", thickness=2)
Fig += text("$x^2+4y^2 = 4$", (1.75,0.75),
  fontsize = 16, xmin=-0.25, xmax= 2,
  ymin=-0.25, ymax=1)
show(Fig, figsize = 6)
```

Pour tracer le graphe d'une fonction de deux variables, c'est la commande `plot3d(...)` qu'il faut utiliser. Voici le graphe de l'exemple 2.1.7. Noter cependant que dans le texte, la figure en question a été produite avec GeoGebra.

```
var('x,y')
plot3d(x^2 * sin(2*y), (x,0,10), (y,0,2*pi),
  color = "orange", mesh = True, opacity = 0.85,
  aspect_ratio = [20,40,1])
```

Plusieurs options sont disponibles, notamment on peut colorier une surface avec une couleur qui varie. Ceci utilise les « *colormaps* », de matplotlib. Ce sont des règles qui servent à assigner une couleur d'une échelle donnée à un nombre compris entre 0 et 1. Ce lien mène vers les « *colormaps* » disponibles.

Voici un exemple.

```
var('x,y')
f(x,y) = x^2 * sin(2*y)
def macouleur(x,y):
    return float((f(x,y)+100)/200)
Fig = plot3d(f(x,y),(x,0,10), (y,0,2*pi),
     color=(macouleur,colormaps.Spectral),
     plot_points = 80, frame = True,
     aspect_ratio = [20,40,1])
show(Fig)
```

L'élément à noter est la définition de `macouleur(...)` : il s'agit d'une fonction qui prendra des valeurs entre 0 et 1. Noter que dans l'exemple qui nous occupe, f varie en $f_{min} = -100$ et $f_{max} = 100$. On obtiendra quelque chose qui varie entre 0 et 1 en faisant

$$\frac{f - f_{min}}{f_{max} - f_{min}}$$

À l'intérieur de `Fig(...)`, la portion `color=(macouleur, colormaps.Spectral)` dit à SageMath d'utiliser `macouleur(...)` pour obtenir une valeur entre 0 et 1, puis utiliser la règle `Spectral` pour assigner une couleur.

Voici maintenant comment faire des diagrammes de courbes de niveau. C'est la fonction de l'exemple 2.2.7

```
var('x,y')
f(x,y) = (x*y^2)/(x^2 + y^4)
C = contour_plot(f ,(-2,2), (-2,2), cmap = "Spectral",
  colorbar = True,
  labels = True, label_colors="black",
  label_inline=True, label_fontsize=11,
  label_fmt=lambda x: "$z=%s$"%round(x,1),
  gridlines=True, frame = False,
  axes = True,
  axes_labels=["$x$","$y$"],
  tick_formatter = "latex", fontsize= 10)
show(C)
```

On suggère de commenter une ligne, à l'aide du caractère # en tout début de ligne, puis d'exécuter le code pour voir l'effet de chaque option. Il y a plus d'options, on pourra regarder la page de référence.

Une autre commande utile est `implicit_plot3d(...)`. Elle a été utilisée pour produire la figure 2.1.9. Voici un exemple un peu plus simple. L'astuce ici est que les traces horizontales sont en réalité des petits morceaux de cylindres, d'une hauteur presque négligeable, en l'occurrence chaque tel cylindre va, en hauteur, de `zlevel -0.02` à `zlevel +0.02`.

```
var('x y z')
g(x,y,z) =  y/(x^2+y^2)
xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax = -1,1,-1,1,-2,2
f = z==g
S = implicit_plot3d(z==g(x,y),
  (x,xmin,xmax), (y,ymin,ymax), (z,zmin, zmax),
  color = "orange", opacity = 0.5,
  frame = True, projection = "orthographic", aspect_ratio=[2,2,1])
levels=srange(-2,2,0.2)
for zlevel in levels:
      S+=implicit_plot3d(g(x,y,z)-zlevel,
        (x,xmin,xmax),(y,ymin,ymax),(z,zlevel - 0.02,zlevel + 0.02),
        color = "brown")
```

```
show(S)
```

Dérivées partielles et champs gradients

Le calcul des dérivées partielles avec SageMath se fait avec la commande `diff(...)`. À nouveau, plusieurs options sont disponibles : `diff(f,x,1,y,2)` par exemple retourne la dérivée partielle d'une fonction f (qui doit être définie) par rapport à x une fois, et par rapport à y deux fois, c'est-à-dire $\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}$. Voici d'autres exemples.

```
f(x,y) = x*y*exp(x^2)
show(diff(f,x,1,y,1)(x,y))
show(diff(f,x,2)(x,y))
show(f.derivative()(x,y))
show(f.gradient()(x,y))
show(f.derivative(2)(x,y))
show(f.hessian()(x,y))
```

Ceci définit la fonction $f(x,y) = xye^{x^2}$ puis on calcule certaines dérivées, à savoir :

(a) La dérivée partielle d'ordre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$

(b) La dérivée partielle d'ordre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(c) La dérivée totale (du premier ordre de f), à savoir la fonction que nous avons notée $\mathbf{D}f(x,y)$.

(d) La commande `f.gradient()` est une autre façon d'obtenir la dérivée (totale, du premier ordre) d'une fonction à valeurs scalaires f.

(e) La dérivée totale d'ordre 2, de f, $\mathbf{D}^2 f(x,y)$, c'est-à-dire la matrice hessienne de f

(f) La commande `f.hessian()` est une autre façon d'obtenir la matrice hessienne d'une fonction f.

Voyons maintenant comment représenter un champ de vecteurs, avec la commande `plot_vector_field(..)`. Dans l'exemple ci-bas, on considère le champ$\mathbf{F}(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, celui de la figure 4.1.6.

```
var('x,y')
#Fig = plot_vector_field((-y,x), (x,-2,2),(y,-2,2),
#  color = "steelblue", axes = True,
#  axes_labels = ['$x$','$y$'],
#  axes_labels_size=1.4, aspect_ratio = 1,
#  ticks = [[],[]],
#  frame= False,
#  plot_points = 10)
Fig = plot_vector_field((-y,x), (x,-2,2),(y,-2,2),
  color = "steelblue", axes = True,
  axes_labels = ['$x$','$y$'],
  axes_labels_size=2, aspect_ratio = 1,
  ticks = [[],[]],
  frame= False,
  plot_points = 10, width=0.004)
show(Fig)
```

Pour le champ gradient d'une fonction f déjà définie, on pourrait faire `plot_vector_field(f.gradient()...)`.

Approximations de Taylor

Afin de calculer les polynômes de Taylor d'une fonction d'une ou de plusieurs variables, c'est la commande `taylor(...)` qu'il faut utiliser. On doit spécifier le point autour duquel on calcule le polynôme, et le degré total.

Ci-bas on calcule le polynôme de Taylor de degré total 2 de $f(x,y) = e^{2x}\sin 3y$ autour du point $(x_0, y_0) = (0,1)$

```
var('x,y')
taylor(exp(2*x)*sin(3*y), (x,0),(y,1),2)
```

Points critiques et multiplicateurs de Lagrange

Pour trouver les points critiques d'une fonction il faut résoudre certaines équations. La commande `solve(...)` fait ceci. On doit lui passer en paramètres deux listes, d'abord les équations à résoudre, puis les variables pour lesquelles on veut les solutions. Ci-après on fait les calculs de l'exemple 2.8.10.

```
var('x,y')
f(x,y) = x*y*(5*x+y-15)
df = f.gradient()
show(df(x,y))
Solutions = solve([df[0](x,y) ==0, df[1](x,y) ==0],[x,y] )
show(Solutions)
```

On peut aussi calculer la matrice hessienne de f évaluée en chacun de ces points. La commande `().rhs` extrait le terme de droite (« *right-hand side* ») d'une expression donnée. Il faut garder à l'esprit que les listes sont numérotées à compter de zéro.

```
H(x,y) = f.hessian()(x,y)
show(H(x,y))
Hess = [H(Solutions[j][0].rhs(), Solutions[j][1].rhs()) for j in
    range(len(Solutions))]
show(Hess)
```

Voyons maintenant comment optimiser un problème avec contraintes, à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Nous nous servons du contexte de l'exemple 2.9.9, à savoir trouver des demi-axes de l'ellipse $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$. On doit maximiser la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Pour faire ceci avec Sage, on doit introduire une variable, `L`, qui jouera le rôle de λ. Par la suite, il s'agit de former le système d'équations et de le résoudre.

```
var('x,y,L')
f(x,y) = x^2 + y^2
g(x,y)= 3*x^2 -2*x*y+3*y^2
df=f.gradient()
dg=g.gradient()
solve([df[0](x,y) == L*dg[0](x,y),
    df[1](x,y)==L*dg[1](x,y),
    g(x,y)==4],[x,y,L])
```

D.4 Calcul intégral

Intégration

On aura intérêt à regarder la documentation, car il y a bien des subtilités. Disons pour commencer que dans SageMath, afin de calculer une intégrale, qu'elle soit définie ou pas on utilise la commande `integrate(...)`. Pour une intégrale indéfinie, c'est à dire $\int f(x)\,dx$, on fait `integrate(f,x)`, pour une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ on fait plutôt `integrate(f,x,a,b)`. Il faut cependant noter que les constantes d'intégration seront omises.

```
f(x) = x^2 + cos(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
show(F(x))
A = integrate(f(x),x,0,pi)
show(A)
```

Sans aller trop loin, disons que des fois dans ce bas monde on doit se contenter d'une approximation numérique pour une intégrale. Dans ce cas c'est la commande `numerical_integral(...)` qu'il faut utiliser. Par exemple, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t + 8\cos^2 t - 4\sin t\,\cos t}\,dt$$

ne peut pas être évaluée analytiquement, mais

```
var('t')
numerical_integral(sqrt(2*sin(t)^2 + 8*cos(t)^2 - 4*sin(t)*cos(t)), 0,
    2*pi)
```

donne comme sortie une paire de nombres. La première est une valeur approchée de l'intégrale, la deuxième une borne pour l'erreur.

Intégrales doubles et triples

Comme dans la vraie vie, on calcule une intégrale double en itérant des intégrales simples. Voyons l'intégrale double de l'exemple 3.1.18, à savoir $\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx$

```
var('x,y')
integrate(integrate(1,y,x^2, x+2),x,-1,2)
```

D.5 Surfaces paramétrées

Lorsqu'une surface est donnée par une équation cartésienne $F(x,y,z) = k$, on peut la tracer directement avec la commande `implicit_plot3d(...)`, sans avoir à la paramétrer. Voyons l'exemple de l'ellipsoïde de l'C.2.3 (voir l'C.2), d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

```
var('x,y,z')
a,b,c = 1, 2.5, 1.5
implicit_plot3d(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 ==1, (x,-a,a), (y,-b,b),
    (z,-c,c),
  plot_points=(15,15,15),
  mesh=True, opacity=0.65, frame=True)
```

Ceci donne une surface d'une seule couleur uniforme. Pour faire varier la couleur d'un point à l'autre de la surface, il faut faire appel à une **colormap** (palette de couleurs) : il s'agit d'une fonction qui associe à chaque nombre de l'intervalle $[0,1]$ une couleur, de sorte qu'en faisant varier ce nombre de façon continue, on obtient une progression de couleurs. SageMath fournit les colormaps de `matplotlib` (voir la documentation de matplotlib à ce sujet pour une liste et un aperçu visuel de celles-ci) ; on y accède par `colormaps.NomDeLaColormap`, par exemple `colormaps.YlOrBr` ou `colormaps.Greens`.

Reprenons l'exemple de l'ellipsoïde, en choisissant cette fois de faire varier la couleur en fonction de la hauteur z, en paramétrant la surface. De la même façon qu'une courbe dans l'espace peut être décrite par une fonction d'un seul paramètre, $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, une surface peut être décrite par une fonction de *deux* paramètres,

$$(u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big),$$

où (u,v) parcourt une région du plan uv. En SageMath, une telle surface se trace avec la commande `parametric_plot3d(...)`, à qui l'on passe la liste `[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]` ainsi que les intervalles parcourus par u et par v ; l'argument `color` peut alors être une paire `(fonction, colormap)`, où `fonction` retourne, pour chaque (u,v), le nombre de $[0,1]$ à envoyer dans la colormap.

Une paramétrisation naturelle de l'ellipsoïde, calquée sur les coordonnées sphériques, est

$$\mathbf{r}(u,v) = \big(a\cos u \sin v,\, b \sin u \sin v,\, c\cos v\big), \qquad u \in [0,2\pi],\ v \in [0,\pi],$$

de sorte que la hauteur est $z = c\cos v$. Le code ci-dessous trace l'ellipsoïde avec une couleur qui varie avec z, ainsi que ses traces sur les trois plans de coordonnées (chacune étant elle-même une courbe paramétrée par un seul paramètre t, obtenue en fixant l'un des deux paramètres u, v). Les appels à `arrow3d` et `text3d` ne servent qu'à dessiner les axes.

```
var('u,v,t')
a,b,c = 1, 2.5, 1.5
def macouleur(u,v):
    z = c*cos(v)
    return float(0.5 + 0.25*(z/c))
S = parametric_plot3d([a*cos(u)*sin(v), b*sin(u)*sin(v), c*cos(v)],
      (u,0,2*pi), (v,0,pi), color=(macouleur, colormaps.YlOrBr),
      mesh=False, opacity=1, frame=False)
S += parametric_plot3d([a*cos(t), b*sin(t), 0], (t,0,2*pi),
    color="firebrick", thickness=1.5)
S += parametric_plot3d([a*cos(t), 0, c*sin(t)], (t,0,2*pi),
    color="seagreen", thickness=1.5)
S += parametric_plot3d([0, b*cos(t), c*sin(t)], (t,0,2*pi),
    color="steelblue", thickness=1.5)
S += arrow3d((0,0,0), (a+0.5,0,0), color="black")
S += text3d("x", (a+0.8,0,0), color="black", fontsize=26)
S += arrow3d((0,0,0), (0,b+0.5,0), color="black")
S += text3d("y", (0,b+0.8,0), color="black", fontsize=26)
S += arrow3d((0,0,0), (0,0,c+0.5), color="black")
S += text3d("z", (0,0,c+0.8), color="black", fontsize=26, frame=False)
show(S)
```

Contrairement aux quadriques, une surface paramétrique n'a pas besoin d'être décrite par une équation cartésienne $F(x,y,z) = k$ simple (ni donc d'être tracée avec `implicit_plot3d`), ni même d'avoir une topologie familière. Le **ruban de Möbius** en est un exemple classique : une surface qui n'a qu'un seul côté et qu'une seule courbe frontière. Avec $R = 2$ fixant le rayon du cercle central, une paramétrisation possible est

$$\mathbf{r}(s,t) = \Big(\big(R + s\cos\tfrac{t}{2}\big)\cos t,\ \big(R + s\cos\tfrac{t}{2}\big)\sin t,\ s\sin\tfrac{t}{2}\Big), \qquad s \in [-1,1],\ t \in [0,2\pi].$$

Le paramètre t fait le tour du cercle central, alors que s déplace le point transversalement, en tordant d'un demi-tour ($t/2$) au fur et à mesure que t parcourt $[0, 2\pi]$ — c'est cette torsion qui rend la surface non orientable. Le code ci-dessous trace le ruban, ainsi que sa courbe frontière (en rouge, correspondant à $s = -1$) : en la suivant, on constate qu'elle rejoint, après un tour complet en t, l'endroit où se trouverait $s = 1$ — la surface entière n'a donc qu'une seule frontière, malgré les deux valeurs extrêmes de s.

```
var('s,t')
R = 2
def x(s,t):
    return (R+s*cos(t/2))*cos(t)
def y(s,t):
    return (R+s*cos(t/2))*sin(t)
def z(s,t):
    return s*sin(t/2)
def macouleur(s,t):
    return 0.5+0.5*sin(t)**2
S = parametric_plot3d((x(s,t), y(s,t), z(s,t)), (s,-1,1), (t,0,2*pi),
    color=(macouleur, colormaps.Greens))
Bord = parametric_plot3d((x(-1,t), y(-1,t), z(-1,t)), (t,0,2*pi),
    color="red", thickness=3)
show(S + Bord)
```

Références

[**1**] W. Briggs, L. Cochran, B. Gillett, *Calculus for Scientists and Engineers Early Transcendentals*, Pearson, (2013).

[**2**] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, Gauthier-villars, (1915).

[**3**] J. Feldman, A. Rechnitzer, E. Yeager, *CLP-3 Multivariable Calculus*, https ://personal.math.ubc.ca/ ~CLP/CLP3/(2023).

[**4**] J. Feldman, A. Rechnitzer, E. Yeager, *CLP-4 Vector Calculus*, https ://personal.math.ubc.ca/ ~CLP/CLP4/(2023).

[**5**] S. Lang, *Undergraduate Analysis*, Springer, (1997).

[**6**] D. Hugues-Hellet, A. Gleason, W. McCallum, *Fonctions de plusieurs variables*, Chenelière Éducation, (2006).

[**7**] S. Schlicker, M. T. Keller, N. Long, *Active Calculus - Multivariable*, https ://activecalculus.org/ multi/book-1.html(2023).

[**8**] G. Strang, *Calculus Volume 3*, Open Stax, (2018).

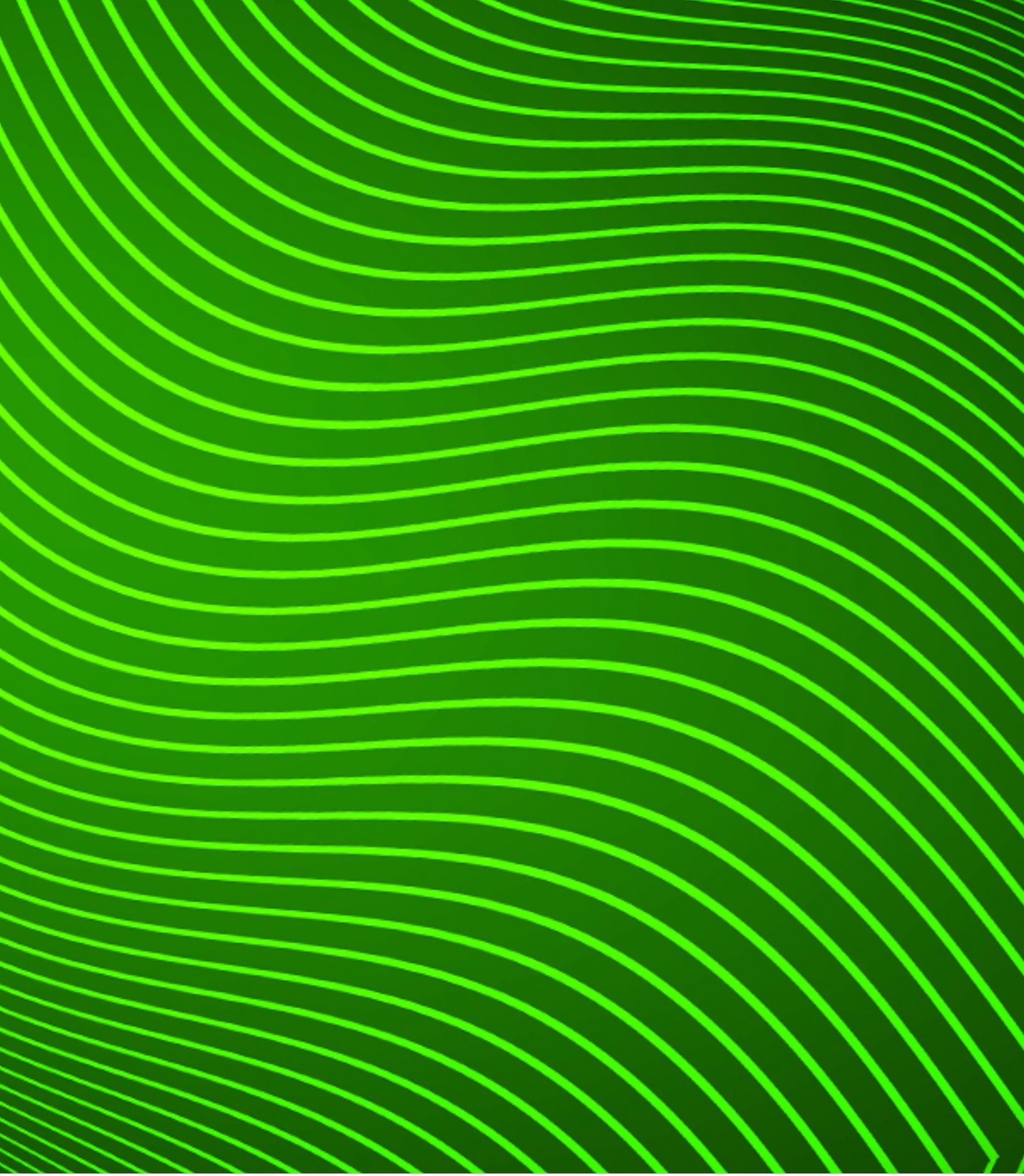
[**9**] T. Marsden, A. Tromba, *Vector Calculus (6è édition)*, Freeman, (2012).

[**10**] James Stewart, *Calcul à plusieurs variables (2è édition)*, Modulo, (2016).

[**11**] G. Thomas, M. Weir, J. Hass, F. Giordano, *Thomas' calculus, early trascendentals (11è édition)*, Pearson Addison-Wesley, (2008).

Colophon

Ce livre a été écrit en PreTeXt.



UDS Université de Sherbrooke